ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 89 * PRAHA 30. VIII. 1964 * ČÍSLO 3

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВАЦЛАВ ПФЕФФЕР (Václav Pfeffer), Прага

(Поступило в редакцию 15/IX 1961 г. — переработанное 20/IX 1963 г.)

(Продолжение)

61. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и пусть $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна а аддитивна. Если $_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $\sum\{F(\{x\}) : x \in \bar{A}\} \neq \pm\infty$* [1]) *и, следовательно, множество $\{x \in \bar{A} : F(\{x\}) \neq 0\}$ счетно.*

Лемма вытекает из 34 и 23.

62. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна и аддитивна, и пусть $S = \{x \in \bar{A} : {}_0F(x) < 0\}$. Если $_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то множество $\bar{S}$ счетно.*

Доказательство. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $\sigma_n = \{B \in \sigma_A : F(B)/G(B) \leqq -n\}$ и обозначим S_n множество всех $x \in P$, для которых существует последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_n$, $\{B_n\} \in \eta_x$. Пусть $B_1, B_2 \in \sigma_A - \sigma_n$ и $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Легко проверится (см. [7], 67), что

$$\frac{F(B_1 \cup B_2)}{G(B_1 \cup B_2)} = \frac{F(B_1) + F(B_2)}{G(B_1) + G(B_2)} > -n\,,$$

как только частное $F(B_1 \cup B_2)/G(B_1 \cup B_2)$ определено. Отсюда следует, что системы σ_n полунаследственны в σ (см. 3, 7). Итак, в силу $\mathscr{E}_7$, множества S_n, $n = 1, 2, \ldots$, замкнуты.

Пусть множество $S_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ несчетно. Тогда, в силу 61, найдется такое $x \in S_0$, что $F(\{x\}) = 0$. Выберем натуральное число n. Так как $x \in S_n$, то существует последовательность $\{B_k\} \subset \sigma_n$, $\{B_k\} \in \eta_x$. Если мы положим $C_k = B_k \cup \{x\}$, то $F(C_k) = F(B_k)$, $G(C_k) = G(B_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ и $C_k \to x$. Следовательно,

$$_*F(x) \leqq \liminf\,[F(C_k)/G(C_k)] = \liminf\,[F(B_k)/G(B_k)] \leqq -n\,,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Значит, $_*F(x) = -\infty$, что и есть противоречие.

Пусть $x \in S$. Тогда имеется последовательность $\{B_k\} \subset \sigma_A$, $\{B_k\} \in \eta_x$, для которой $\lim F(B_k) < 0$. Так как $\lim G(B_k) = 0$, то существуют такие k_n, что $F(B_k)/G(B_k) \leqq -n$ для всех $k \geqq k_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $B_k \in \sigma_n$ для всех $k \geqq k_n$. Итак, в силу $\mathscr{E}_1$, будет $x \in S_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, $S \subset S_0$. Так как множество S_0 замкнуто, то также $\bar{S} \subset S_0$.

63. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $x \in \bar{A}$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна и аддитивна. Пусть, далее, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ такая последовательность, что $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\sup F(B_n) < +\infty$. Если ${}_0F(x) > -\infty$, то последовательность $\{F(B \cap B_n)\}$ ограничена для каждого множества $B \in \sigma_A$.*

Доказательство. Пусть $B \in \sigma_A$. Так как функция F конечна, ${}_0F(x) > -\infty$ и $\{B \cap B_n\} \in \eta_x$ (см. $\mathscr{E}_2$), то $\inf F(B \cap B_n) > -\infty$. Применяя этот результат для множества $\bar{A} - B$, получим

$$\sup F(B \cap B_n) \leqq \sup F(B_n) - \inf F(B_n - B) < +\infty .$$

64. Обозначение. Из теоремы Хана-Банаха (Hahn-Banach) о распространении линейного функционала следует, что на системе всех ограниченных последовательностей действительных чисел существуют *обобщенные пределы* (см. [2], гл. IV, 2.9). Выберем определенный обобщенный предел и, в отличие от обычного предела, обозначим его символом Lim.

65. Соглашение. В абзацах 66–71 мы будем предполагать, что, кроме требований $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$, выполнено также требование $\mathscr{E}_9$.

66. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $x \in \bar{A}$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна и аддитивна. Если ${}_*F(x) > -\infty$, то существует конечная аддитивная функция $F_x \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, имеющая следующие свойства:*

а) $F_x(\{x\}) = |{}_0F(x)|$, $F_x(\bar{A}) = 0$ *и* $|F_x| \leqq |{}_0F(x)|$;
б) $[B \in \sigma_A, x \notin B] \Rightarrow F_x(B) \leqq 0$;
в) $[B \in \sigma_A, x \notin \bar{B}] \Rightarrow F_x(B) = 0$;
г) $[\{B_k\} \subset \sigma_A, \{B_k\} \in \eta_x] \Rightarrow \liminf [F(B_k) - F_x(B_k)] \geqq 0$.

Доказательство. Пусть $a = {}_0F(x)$. Тогда $-\infty < a \leqq 0$ (см. 17 и 34). В силу $\mathscr{E}_9$ существует последовательность $\{C_n\} \subset \sigma_A$, для которой $\{C_n\} \in \eta_x$ и $\lim F(C_n) = a$. Учитывая примечание в абзаце 33, мы можем предполагать, что $x \notin C_n$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу 34 и 63 можно для всех $B \in \sigma_A$ положить

$$F_x(B) = \operatorname{Lim} F(B \cap C_n) - a\, \chi_B(x) ,$$

где χ_B — характеристическая функция множества B. Таким образом определенная функция $F_x \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна и аддитивна, $F_x(\{x\}) = -a = |{}_0F(x)|$ и $F_x(\bar{A}) = a - a = 0$. Пусть $B \in \sigma_A$. Из $\mathscr{E}_2$ следует

$$F_x(B) \geqq \operatorname{Lim} F(B \cap C_n) \geqq \liminf F(B \cap C_n) \geqq a .$$

Применяя этот результат для множества $\bar{A} - B$, мы получим

$$F_x(B) = F_x(\bar{A}) - F_x(\bar{A} - B) = -F_x(\bar{A} - B) \leqq -a\,.$$

Итак, $|F_x| \leqq |a|$. Если $x \notin B$, то

$$F_x(B) = \operatorname{Lim} F(B \cap C_n) = \operatorname{Lim} F(C_n) - \operatorname{Lim} F(C_n - B) \leqq$$
$$\leqq \lim F(C_n) - \liminf F(C_n - B) \leqq a - a = 0\,.$$

Если $x \notin \bar{B}$, то, в силу $\mathscr{E}_5$, имеем $F_x(B) = 0$.

Предположим, что утверждение г) неверно. Из $\mathscr{E}_1$ тогда вытекает, что существует последовательность $\{B_k\} \subset \sigma_A$, для которой $\{B_k\} \in \eta_x$ и $\lim F(B_k) < \lim F_x(B_k)$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что либо $x \in B_k$, либо $x \notin B_k$ одновременно для всех индексов k. В первом случае из 34 и уже доказанного утверждения а) вытекает

$$\lim F(B_k - \{x\}) = \lim F(B_k) - F(\{x\}) < \lim F_x(B_k) - |{}_0F(x)| =$$
$$= \lim F_x(B_k) - F_x(\{x\}) = \lim F_x(B_k - \{x\})\,.$$

Итак, в силу 17, достаточно исследовать лишь второй случай. Положим $b = \lim F(B_k)$ и выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\lim F_x(B_k) > b + 2\varepsilon$. Тогда, начиная с определенного индекса k_0, будет

$$\limsup_{n\to\infty} F(B_k \cap C_n) \geqq \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} F(B_k \cap C_n) = F_x(B_k) > b + 2\varepsilon$$

и $F(B_k) < b + \varepsilon$. К числам $k_j = k_0 + j$, $j = 1, 2, \ldots$, существуют натуральные числа n_j, для которых $n_j < n_{j+1}$, $F(B_{k_j} \cap C_{n_j}) > b + 2\varepsilon$ и, следовательно,

$$F(B_{k_j} - C_{n_j}) = F(B_{k_j}) - F(B_{k_j} \cap C_{n_j}) < -\varepsilon\,.$$

Значит,

$$\liminf F(B_{k_j} \cup C_{n_j}) \leqq \lim F(C_{n_j}) + \limsup F(B_{k_j} - C_{n_j}) \leqq a - \varepsilon < a\,.$$

Это, однако, невозможно, потому что $\{B_{k_j} \cup C_{n_j}\} \in \eta_x$ (см. $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_4$).

67. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна и аддитивна и пусть $S = \{x \in \bar{A} : {}_0F(x) < 0\}$. Если ${}_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $\sum\{{}_0F(x) : x \in \bar{A}\} \neq \pm\infty$* [1]) *и существует конечная аддитивная функция $F_1 \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, имеющая следующие свойства:*

а) $|F - F_1| \leqq \sum\{|{}_0F(x)| : x \in \bar{A}\}$, $F_1(\bar{A}) = F(\bar{A})$ *и* ${}_0F_1(x) \geqq 0$ *для всех* $x \in \bar{A}$;
б) $[B \in \sigma_A,\ B \cap S = \emptyset] \Rightarrow F_1(B) \geqq F(B)$;
в) $[B \in \sigma_A,\ \bar{B} \cap S = \emptyset] \Rightarrow F_1(B) = F(B)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы сразу вытекает из 34 и 61. Для $x \in \bar{A}$ пусть F_x означает функцию, определенную в лемме 66. В силу предыдущего и 66 а) можем определить функцию $F_1 \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ соотношением

$$F_1(B) = F(B) - \sum\{F_y(B) : y \in \bar{A}\}$$

для всех $B \in \sigma_A$. Функция F_1, очевидно, конечна, аддитивна и $F_1(\bar{A}) \leqq F(\bar{A})$. Для всех $B \in \sigma_A$ будет

$$|F(B) - F_1(B)| \leqq \sum\{|F_y(B)| : y \in \bar{A}\} \leqq \sum\{|{}_0F(y)| : y \in \bar{A}\}.$$

Пусть $x \in \bar{A}$, $\{B_k\} \subset \sigma_A$ и $\{B_k\} \in \eta_x$. Из 66 г) и $\mathscr{E}_5$ вытекает

$$\liminf F_1(B_k) = \liminf [F(B_k) - F_x(B_k) - \sum\{F_y(B_k) : y \in \bar{A} - (x)\}] \geqq$$
$$\geqq \liminf [F(B_k) - F_x(B_k)] - \limsup \sum\{F_y(B_k) : y \in \bar{A} - (x)\} \geqq 0.$$

Итак, ${}_0F_1(x) \geqq 0$.

Утверждения б) и в) непосредственно следуют из 66, б) и в).

68. Определение. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Аддитивная функция $M \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ называется *слабой мажорантой* функции f на множестве A, если $M > -\infty$ и если

$$x \in \bar{A} \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x) \geqq f(x).$$

Совокупность всех слабых мажорант функции f на множестве A мы обозначим $\mathfrak{N}(f, A)$.

69. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Тогда*

$$I_I(f, A) = \inf M(\bar{A}) \quad [M \in \mathfrak{N}(f, A)].$$

Доказательство. Пусть $a = \inf M(\bar{A})$ $[M \in \mathfrak{N}(f, A)]$. Так как $\mathfrak{M}(f, A) \subset \mathfrak{N}(f, A)$ (см. примечание в абзаце 31), то $I_I(f, A) = I_I(f, \bar{A}) \geqq a$. Предположим, что $I_I(f, \bar{A}) > a$. Тогда найдется $M \in \mathfrak{N}(f, A)$, для которой $M(\bar{A}) < I_I(f, \bar{A})$. Так как функция M конечна (см. 5), то к ней существует функция $M_1 \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, определенная в лемме 67. Из 62 и 67 вытекает, что $M_1 \in \mathfrak{M}_0(f, A)$ и $M_1(\bar{A}) = M(\bar{A}) < I_I(f, \bar{A})$. Это, однако, противоречит теореме 43.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Пусть, далее, $F > -\infty$ и ${}_*F(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$. Тогда $F(B) \geqq 0$ для каждого замкнутого множества $B \in \sigma_A$.

Примечание. Читателю советуется сравнить это следствие с леммой 36.

70. Определение. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Аддитивная функция $M \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ называется *обобщенной слабой мажорантой* функции f на множестве A, если $M > -\infty$ и если существует счетное множество $S \subset \bar{A}$, удовлетворяющее требованиям:

α) $x \in S \Rightarrow {}_0M(x) \geqq 0$,

β) $x \in \bar{A} - S \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x) \geqq f(x)$.

Совокупность всех обобщенных слабых мажорант функции f на множестве A мы обозначим $\mathfrak{N}_0(f, A)$.

71. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Тогда*

$$I_I(f, A) = \inf M(\bar{A}) \ [M \in \mathfrak{N}_0(f, A)] .$$

Доказательство подобно доказательству теоремы 43.

72. Обозначение. Пусть μ – *пополненная регулярная борелевская мера,* определенная на системе $\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ – относительно μ *пополненная система всех множеств Бореля* пространства P (см. [1], §§ 7, 13, 51, 52).

Пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $f \in \mathfrak{F}(A)$. Через $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ мы обозначим *интеграл Лебега* от функции f вдоль меры μ на множестве A – если он, конечно, существует. Систему всех $\mathfrak{B}$-*измеримых функций* $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, для которых существует конечный интеграл $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$, мы обозначим $\mathfrak{L}(A)$.

73. Соглашение. В абзацах 74, 75 и 78 будем предполагать, что $\sigma \subset \mathfrak{B}$ и что $G(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \sigma$.

В абзацах 74 и 75 будем, далее, предполагать, что выполнены требования $\mathscr{E}_1$ – $\mathscr{E}_8$. Выполнение требования $\mathscr{E}_9$ уже не предполагается.

74. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f, g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если $f = g$ почти всюду, в частности, если $f(x) = g(x)$ для всех $x \in A$, то $I_I(f, A) = I_I(g, A)$.*

Доказательство подобно доказательству теоремы [7], 51, и читатель может его провести сам по приведенному образцу.

75. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{L}(A) \subset \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ для каждой функции $f \in \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство подобно доказательству теоремы [7], 56 и его можно опять предоставить читателю.

Примечание. Подобно как и в [7], 57, здесь имеется открытый вопрос, будут ли теоремы 74, 75 справедливы и в том случае, если мы опустим требование регулярности меры μ, введенной в 72.

76. Теорема. *Если выполнены требования $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$ и $\mathscr{E}'_8$, то выполнено также требование $\mathscr{E}_8$.*

Доказательство. Пусть выполнены требования $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$, и $\mathscr{E}'_8$. Пусть, далее, $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ – такая супераддитивная функция, что ${}_0F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$. Предположим, что существует $B \in \sigma_A$, для которого $F(B) = -\infty$. Из $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_5$ и $\mathscr{E}'_8$ вытекает, что $\eta_x \neq \emptyset$ для всех $x \in P$. Итак, в силу примечания в абзаце 17, будет $B \neq \emptyset$. В силу примечания к теореме [7], 59, $\mathscr{E}'_8$ и $\mathscr{E}_2$ существует точка $x \in P$ и такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что

$\{B_n\} \in \eta_x$ и $F(B_n) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, ${}_0F(x) = -\infty$. Это, однако, противоречие, потому что $B_n \neq \emptyset$ и, следовательно, $x \in \bar{A}$ (см. 18).

Примечание. В предположении $\mathscr{E}_8$ заменим слово „аддитивна" словом „супераддитивна" (см. примечание в абзаце 36). Из доказательства предыдущей теоремы вытекает, что также после этой замены предположение $\mathscr{E}_8$ будет следствием предположений $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$ и $\mathscr{E}'_8$.

77. Соглашение. В абзаце 78 мы будем предполагать, что выполнены требования $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_7$ и $\mathscr{E}'_8$.

Примечание. В силу теоремы 76 будет выполнено и требование $\mathscr{E}_8$. Значит, при только что приведенных предположениях имеют место все утверждения абзацев 17–63, 74 и 75. Если было бы, сверх того, выполнено требование $\mathscr{E}_9$, то имели бы место также все утверждения абзацев 66–71.

78. Теорема. *Если $A \in \sigma$, то $\mathfrak{P}_0(A) = \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство подобно доказательству [7], 63. Читатель его легко проведет сам.

79. Некоторые обозначения. Пусть $r \geqq 1$ — определенное целое число. Через E_r мы обозначим *r-мерное евклидово пространство* и через μ *лебеговскую меру* в E_r. Скажем, что множества $A, B \subset E_r$ *эквивалентны* и пишем $A \doteq B$, если $\mu[(A - B) \cup (B - A)] = 0$.

Если множество $A \subset E_r$ ограничено и измеримо, то число $\|A\|$, определенное в [5], 2, мы назовем *площадью поверхности* множества A. $\mathfrak{A}$ будет совокупность всех ограниченных измеримых множеств $A \subset E_r$, для которых $\|A\| < +\infty$. Положим $\mathfrak{A}_0 = \{A \in \mathfrak{A} : \mu(\dot{A}) = 0\}$. Строго говоря, в статье [5] число $\|A\|$ и система $\mathfrak{A}$ определяются лишь тогда, когда $r > 1$. Однако, эти определения допускают естественное распространение и на случай $r = 1$ (см. [7], 64).

Через $\mathfrak{K}$ обозначим систему всех *интервалов* вида $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j)$,[3]) где a_j, b_j — действительные числа, $a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, и через $\mathfrak{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, систему всех интервалов вида $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle i_j/2^n, (i_j + 1)/2^n)$, где i_j — целые числа, $j = 1, 2, \ldots, r$. Из [5], 20 вытекает, что $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}_0$, $n = 1, 2, \ldots$.

80. Соглашение. Вплоть до конца этой статьи мы будем предполагать, что $P = E_r$, $\mathfrak{K} \subset \sigma \subset \mathfrak{A}$ и что каждой точке $x \in E_r$ поставлены в соответствие множества

$$\eta_x^1 = \{\{B_n\} \subset \sigma : d(B_n \cup \{x\}) \to 0\}\,,^{4)} \quad \eta_x^2 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \sup \|B_n\| < +\infty\}$$

---

[3]) $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} A_j$ есть декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

и, если $r > 1$, также множество $\eta_x^3 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \|B_n\| \to 0\}$.

Примечание. Всегда, когда мы будем в дальнейшем употреблять множества η_x^3, будем, уже этого не оговаривая, предполагать, что $r > 1$.

81. Несколько примечаний. а) Пусть $A \in \sigma$. Так как множество A ограничено, то существует такое $K \in \mathfrak{K}$, что $\bar{A} \subset K^0$. Пусть $B = \bar{K} - A$. В силу 7 имеем $\dot{A} = (\bar{A} - A) \cup (\bar{B} - B) \in \sigma$ и $A^0 = A - \dot{A} \in \sigma$. Из 33, α) теперь следует, что $G(\dot{A}) = 0$ и $G(A) = G(\bar{A}) = G(A^0)$.

б) Ясно, что множества η_x^i, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют требованиям $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_3$, $\mathscr{E}_5$ и $\mathscr{E}_6$ (см. [5], 20). Требования $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_4$, очевидно, выполнены для множеств η_x^1. Для множеств η_x^2 и η_x^3 вытекают $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_4$ из [5], 35 и [6].

в) Для $n = 1, 2, \ldots$ образуют $\mathfrak{K}_n$ локально конечные непересекающиеся покрытия E_r, причем $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{K} \subset \sigma$ и $\mathfrak{K}_{n+1}$ является уплотнением $\mathfrak{K}_n$ (см. [7], 12). Следовательно, система σ удовлетворяет предположению $\mathscr{S}$.

г) Множества η_x^i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют предположению $\mathscr{E}'_8$. В самом деле, если $K_n \in \mathfrak{K}_n$ и $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует точка $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n$ и из [5], 20 вытекает, что $\{K_n\} \in \eta_{x_0}^i$, $i = 1, 2, 3$.

д) Из 76 и предыдущего вытекает, что во всех случаях выполнено требование $\mathscr{E}_8$.

е) Сразу видно, что множества η_x^1 для всех $x \in E_r$ совпадают с множествами η_x, определенными в 11. Следовательно, из 12 и 14 вытекает, что множества η_x^1 удовлетворяют также требованиям $\mathscr{E}_7$ и $\mathscr{E}_9$.

ж) Легко проверится, что требованиям $\mathscr{E}_7$ и $\mathscr{E}_9$ удовлетворяют также множества η_x^3. Доказательство этого является аналогом доказательства лемм 12 и 14.

з) Так как $\eta_x^2 \subset \eta_x^1$ и, если $r > 1$, также $\eta_x^3 \subset \eta_x^2$ для всех $x \in E_r$, то, в силу 60 и 82, будет $\mathfrak{P}^1(A) \subset \mathfrak{P}^2(A)$ и, если $r > 1$, также $\mathfrak{P}^2(A) \subset \mathfrak{P}^3(A)$ для всякого множества $A \in \sigma$. При этом каждых два из интегралов I^i, $i = 1, 2, 3$ совпадают на пересечении своих областей определения.

82. Лемма. *Пусть $\sigma_0 \subset \sigma$ — полунаследственная система в σ и пусть A^i — множество всех $x \in E_r$, для которых существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_0$, что $\{B_n\} \in \eta_x^i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $A^1 = A^2$ и, если $r > 1$, также $A^1 = A^3$.*

Доказательство. Так как $\eta_x^3 \subset \eta_x^2 \subset \eta_x^1$ для всех $x \in E_r$, то $A^3 \subset A^2 \subset A^1$. Выберем $x \in A^1$ и последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_0$, $\{B_n\} \in \eta_x^1$.

Пусть $r > 1$. Из полунаследственности системы σ_0 вытекает существование таких $K_n^p \in \mathfrak{K}_p$, что $B_n \cap K_n^p \in \sigma_0$, $n, p = 1, 2, \ldots$, (см. 3). В силу [5], 20 и [6],

---

[4]) Через $d(B)$ обозначается диаметр множества $B \subset E_r$.

имеем $\lim\limits_{p\to\infty} \|B_n \cap K_n^p\| = 0$. Итак, можно найти натуральные числа p_n, для которых $\|B_n \cap K_n^{p_n}\| < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, $\{B_n \cap K_n^{p_n}\} \in \eta_x^3$ и, следовательно, $x \in A^3$.

Пусть $r = 1$. Тогда существуют целые числа l_n и такие действительные числа $a_1^n < b_1^n < \ldots < a_{l_n}^n < b_{l_n}^n$, что $B_n \doteq \bigcup\limits_{i=1}^{l_n} (a_i^n, b_i^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, (см. [7], 64). Пусть p_n — натуральные числа, для которых $2^{-p_n} < \min(a_i^n - b_{i-1}^n)$ $(i = 2, 3, \ldots, l_n)$. Из полунаследственности системы σ_0 вытекает существование таких $K_n \in \mathfrak{K}_{p_n}$, что $B_n \cap K_n \in \sigma_0$. Однако, $\|B_n \cap K_n\| \leqq 2$, так что $\{B_n \cap K_n\} \in \eta_x^2$. Значит, $x \in A^2$.

Следствие. Множества η_x^2 удовлетворяют требованию $\mathscr{E}_7$.

83. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $x \in E_r$. Пусть, далее λ — множество всех значений* $\liminf F(B_n)$, *где $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $\{B_n\} \in \eta_x^1$ и* $\sup \|B_n\| \leqq 2^{r+1}$. *Если функция F аддитивна и ${}_0F^2(x) > -\infty$, то ${}_0F^2(x) = \min \lambda$.*

Доказательство. Сразу видно, что ${}_0F^2(x) \leqq \inf \lambda$. Пусть ${}_0F^2(x) < \inf \lambda$ и пусть $\{B_n\} \subset \sigma_A$ — такая последовательность, для которой $\{B_n\} \in \eta_x^2$ и $\lim F(B_n) < \inf \lambda$.

В силу [5], 20 и [6], если $r > 1$, и в силу [7], 64, если $r = 1$, существуют такие натуральные числа p_n, что для $K \in \mathfrak{K}_{p_n}$ будет $\|B_n \cap K\| \leqq 2$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $C_1 = \bigcup (B_1 \cap K)$ $(K \in \mathfrak{K}_{p_1},\ x \in \overline{K})$ и $D_1 = B_1 - C_1$. Тогда $B_1 = C_1 \cup D_1$, $C_1 \cap D_1 = \emptyset$ и

$$\|C_1\| \leqq \sum \|B_1 \cap K\| \leqq 2^{r+1} \quad (K \in \mathfrak{K}_{p_1},\ x \in \overline{K})$$

(см. [5], 35). Пусть $n(1) = 1$. Так как $x \notin \overline{D}_1$ и $d(B_n \cup \{x\}) \to 0$, то существует такое натуральное число $n(2) > n(1)$, что $B_{n(2)} \cap D_1 = \emptyset$. Положим $C_2 = \bigcup (B_{n(2)} \cap K)$ $(K \in \mathfrak{K}_{p_{n(2)}}, x \in \overline{K})$ и $D_2 = B_{n(2)} - C_2$. Тогда $B_{n(2)} = C_2 \cup D_2$, $C_2 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ и

$$\|C_2\| \leqq \sum \|B_{n(2)} \cap K\| \leqq 2^{r+1} \quad (K \in \mathfrak{K}_{p_{n(2)}},\ x \in \overline{K})\,.$$

Продолжая этот процесс, мы индукцией построим подпоследовательность $\{B_{n(k)}\}$ последовательности $\{B_n\}$ и последовательности $\{C_k\}$, $\{D_k\}$, для которых $\|C_k\| \leqq 2^{r+1}$, $B_{n(k)} = C_k \cup D_k$, $C_k \cap D_k = \emptyset$ и $D_k \cap D_l = \emptyset$ для $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\liminf F(D_k) = a < 0$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что $F(D_k) \leqq a/2$ для $k = 1, 2, \ldots$. Выберем натуральное число $p > (2/a)\ {}_0F^2(x)$ и положим $A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_{k+i}$. Так как $d(A_k \cup \{x\}) \to 0$ и

$$\|A_k\| \leqq \sum_{i=1}^{p} \|D_{k+i}\| \leqq \sum_{i=1}^{p} \|B_{n(k+i)}\| + \sum_{i=1}^{p} \|C_{k+i}\| \leqq p \,.\, (\sup \|B_n\| + 2^{r+1}) < +\infty$$

для $k = 1, 2, \ldots$ (см. [5], 35), то $\{A_k\} \in \eta_x^2$. Значит,

$$ {}_0F^2(x) \leqq \liminf F(A_k) = \liminf \sum_{i=1}^{p} F(D_{k+i}) \leqq pa/2 < {}_0F^2(x)\,, $$

что и невозможно. Следовательно, $\liminf F(D_k) \geqq 0$. Итак,

$$ \inf \lambda \leqq \liminf F(C_k) \leqq \lim F(B_{n(k)}) - \liminf F(D_k) \leqq \lim F(B_n) < \inf \lambda\,. $$

Это противоречие.

Доказательство утверждения, что множество λ содержит наименьший элемент, является наподобием доказательства леммы 14.

Следствие. Множества η_x^2 удовлетворяют требованию $\mathscr{E}_9$.

84. Теорема. *Пусть выполнены требования абзаца* 80. *Тогда выполнено требование* $\mathscr{S}$, *и если* i — *целое число,* $1 \leqq i \leqq 3$, *то для множеств* η_x^i, $x \in P$, *введенных в абзаце* 80, *выполнены требования* $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_9$ *и* $\mathscr{E}'_8$.

Теорема является непосредственным следствием утверждений абзацев 81—83.

85. Теорема. *Пусть* $x \in E_r$, $A \in \sigma$ *и* $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ *аддитивна. Если* ${}_0F^1(x) > -\infty$, *то* ${}_0F^1(x) = {}_0F^2(x)$. *Если* $r > 1$ *и* ${}_0F^2(x) > -\infty$, то ${}_0F^2(x) = {}_0F^3(x)$.

Доказательство подобно доказательству леммы 83.

86. Обозначение. Пусть $K \subset E_r$ — невырожденный компактный интервал и пусть $f \in \mathfrak{F}(K)$. В силу 81, а) функция G, введенная в 33, является аддитивной функцией в интервале K в смысле определения [4], II, 21. Следовательно, мы можем рассматривать интеграл $\int_K f \,\mathrm{d}G$, определенный в [4], II, 47 (если он, конечно, существует).

Пусть $a, b \in E_r$, $a = [a_1, \ldots, a_r]$, $b = [b_1, \ldots, b_r]$. Пересечение всех компактных интервалов, содержащих точки a, b, мы обозначим $K(a_1, \ldots, a_r;\, b_1, \ldots, b_r)$ или просто $K(a;\, b)$. Очевидно, $K(a;\, b)$ является также компактным интервалом, может быть вырожденным, и, наоборот, каждый компактный интервал можно представить в виде $K(a;\, b)$. Интервал $K(a;\, b)$ не будет вырожденным тогда и только тогда, когда $a_i \neq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Пусть k — целое число, $0 \leqq k \leqq r$. Интервал $K(x_1, \ldots, x_r;\, y_1, \ldots, y_r)$ называется *k-мерной гранью* невырожденного интервала $K(a;\, b)$, если $x_i = a_i$ или $x_i = b_i$ и $y_i = a_i$ или $y_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, причем $x_i = y_i$ для точно $r - k$ различных индексов i. Через $\partial_k K$ мы обозначим соединение всех k-мерных граней невырожденного компактного интервала K. Для удобства положим еще $\partial_{-1} K = \emptyset$. Так как каждая грань интервала K является пересечением двух невырожденных компактных интервалов, то $\partial_k K \in \sigma$, $k = -1, 0, \ldots, r$. Для $k = -1, 0, \ldots, r - 1$ имеем $\partial_k K \subset \dot{K}$ и, следовательно, $G(\partial_k K) = 0$ (см. 81, а)); $\partial_r K = K$.

87. Теорема. *Пусть i — целое число, $1 \leqq i \leqq 3$, и $K \subset E_r$ — невырожденный компактный интервал. Если $f \in \mathfrak{P}^i(K)$, то существует $\int_K f \, \mathrm{d}G$ и $I^i(f, K) = \int_K f \, \mathrm{d}G$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{P}^i(K)$ и $M \in \mathfrak{M}^i(f, K)$. Для невырожденного компактного интервала $L \subset K$ положим

$$N(L) = \sum_{j=0}^{r} 2^{j-r} M(\partial_j L - \partial_{j-1} L).$$

Учитывая [4], II, 19, читатель без особого труда докажет, что функция N аддитивна в интервале K в смысле определения [4], II, 21. Выберем $x \in K$ и такую последовательность $\{K_k\} \subset \sigma_K$ невырожденных компактных интервалов, что $\{K_k\} \in \kappa_x^i$. Из 40 вытекает

$$N(K_k) = M(K_k^0) + \sum_{j=0}^{r-1} 2^{j-r} M(\partial_j K_k - \partial_{j-1} K_k) \geqq M(K_k^0).$$

Пусть $M(\{x\}) = 0$. Так как $\{K_k^0 \cup (x)\} \in \kappa_x^i$, то

$$\liminf\,[N(K_k)/G(K_k)] \geqq \liminf\,[M(K_k^0 \cup \{x\})/G(K_k^0 \cup \{x\})] \geqq {}_*M^i(x, K).$$

Пусть $M(\{x\}) > 0$. Для каждого натурального числа k существует целое число j_k, $0 \leqq j_k \leqq r$, для которого $x \in \partial_{j_k} K - \partial_{j_k - 1} K$. Так как $\{K_k^0 - (x)\} \in \eta_x^i$, то из 40 вытекает

$$\liminf N(K_k) \geqq \liminf M(K_k^0 - \{x\}) + \liminf 2^{j_k - r} M(\{x\}) \geqq 2^{-r} M(\{x\}) > 0.$$

Следовательно, опять

$$\liminf\,[N(K_k)/G(K_k)] = +\infty \geqq {}_*M^i(x, K).$$

Значит, для всех $x \in K$ будет $\underline{N}(G, x, K) \geqq {}_*M^i(x, K)$, где символ $\underline{N}(G, x, K)$ обозначает нижнюю производную от функции N, определенную в [4], II, 26. Итак, N является мажорантой функции f в интервале K в смысле определения [4], II, 41, причем

$$N(K) \leqq \sum_{j=0}^{r} M(\partial_j K - \partial_{j-1} K) = M\Big(\bigcup_{j=0}^{r} [\partial_j K - \partial_{j-1} K]\Big) = M(K).$$

Следовательно, $\overline{\int}_K f \, \mathrm{d}G \leqq I^i(f, K)$. Применяя только что доказанное для функции $-f$, мы получим неравенство $\underline{\int}_K f \, \mathrm{d}G \geqq I^i(f, K)$. Справедливость теоремы теперь вытекает из [4], II, 43.

88. Соглашение. Вплоть до конца этой статьи мы будем предполагать, что $G = \mu$ [2], где μ — лебеговская мера в E_r.

Следствие. Из 81, а) вытекает, что $\sigma \subset \mathfrak{A}_0$ и, в силу [5], 35, мы можем положить прямо $\sigma = \mathfrak{A}_0$.

Примечание. Несмотря на то, что $G = \mu$, мы будем без опасности недоразумения сохранять обозначение $\int_K f\,\mathrm{d}\mu$ для интеграла Лебега (см. 72) и $\int_K f\,\mathrm{d}G$ для интеграла Перрона (см. 86).

89. Лемма. *Пусть $K \subset E_r$ – невырожденный компактный интервал и пусть $f \in \mathfrak{F}(K)$. Если существует $\int_K f\,\mathrm{d}G$, то функция f измерима.*

Доказательство. Пусть существует $\int_K f\,\mathrm{d}G$. Тогда имеются такие мажоранты M_n и миноранты m_n функции f в интервале K (см. [4], II, 41), что $M_n(K) - m_n(K) < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Для $x \in K$ положим $g_n(x) = \underline{M}_n(G, x, K)$ и $h(x) = \overline{m}_n(G, x, K)$. В силу [8], гл. 4, § 4 функции g_n, h_n, $n = 1, 2, \ldots$, измеримы. Следовательно, измеримы также функции $g = \inf g_n$ и $h = \sup h_n$. Имеем $h \leqq f \leqq g$ и

$$\overline{\int_K} (g - h)\,\mathrm{d}G \leqq \inf \overline{\int_K} (g_n - h_n)\,\mathrm{d}G =$$

$$= \inf\left[\overline{\int_K} g_n\,\mathrm{d}G - \underline{\int_K} h_n\,\mathrm{d}G\right] \leqq \inf\left[M_n(K) - m_n(K)\right] = 0\,.$$

Однако, отсюда в силу [4], III, 18 вытекает, что $g = h = f$ почти всюду.

90. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда все функции из $\mathfrak{P}^i(A)$, $i = 1, 2, 3$, измеримы.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{P}^i(A)$, где i – целое число, $1 \leqq i \leqq 3$. Так как множество A ограничено, то существует невырожденный компактный интервал $K \subset E_r$, содержащий множество A. Для $x \in K$ положим $\tilde{f}(x) = f(x)$, если $x \in \bar{A}$, и $\tilde{f}(x) = 0$ в противном случае. Из 38, 74 и 46 вытекает, что $\tilde{f} \in \mathfrak{P}^i(K)$. Итак, в силу 87 и 89, функция $\tilde{f}$ измерима. Следовательно, измерима и функция f.

91. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{P}^1(A)$. Если хотя одно из множеств $\{x \in \bar{A} : : f(x) > 0\}$, $\{x \in \bar{A} : f(x) \geqq 0\}$, $\{x \in \bar{A} : f(x) < 0\}$ и $\{x \in \bar{A} : f(x) \leqq 0\}$ эквивалентно* (см. 79) *открытому множеству, то $f \in \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно исследовать только случай существования открытого множества B, для которого либо $B \doteq \{x \in \bar{A} : f(x) < 0\}$ либо $B \doteq \{x \in \bar{A} : f(x) \leqq 0\}$. Учитывая следствие в абзаце 88, можем предполагать, что $B \subset A^0$.

Пусть $\int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Тогда

$$\int_B f\,\mathrm{d}\mu = -\int_B f^-\,\mathrm{d}\mu = -\int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = -\infty\,.$$

В силу примечания к теореме [7], 59 существуют такие $K_n \in \mathfrak{K}_n$, что $K_{n+1} \subset K_n$ и $\int_{B \cap K_n} f\,\mathrm{d}\mu = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n = (x)$. Так как множества $B \cap K_n^0$

открыты, то существуют такие последовательности $\{K_n^j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{K}$ непересекающихся множеств, что $B \cap K_n^0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_n^j$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_n^j} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{B \cap K_n^0} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{B \cap K_n} f \,\mathrm{d}\mu = -\infty ,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Выберем числа j_n, для которых $\sum_{j=1}^{j_n} \int_{K_n^j} f \,\mathrm{d}\mu < -n$, и положим $B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} K_n^j$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x^1$. Однако, $|f(y)| = -f(y)$ для почти всех $y \in \bar{B}_n$, так что, в силу 48 и 74, имеем $|f| \in \mathfrak{P}^1(B_n)$. Из 75 и 78 теперь вытекает

$$\lim I^1(f, B_n) = \lim \int_{B_n} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{j_n} \int_{K_n^j} f \,\mathrm{d}\mu = -\infty$$

что и противоречит теореме 49.

Значит, $\int_A f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Следовательно, $f^- \in \mathfrak{P}^1(A)$ (см. 75). Так как $|f(x)| = 2f^-(x) + f(x)$, как только сумма вправо имеет смысл, то также $|f| \in \mathfrak{P}^1(A)$ (см. 39). Итак, в силу 78, $f \in \mathfrak{L}(A)$.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{P}^1(A)$. Пусть, далее, существует такое множество B, что $\mu(B) = 0$ и что функция f, рассматриваемая только на множестве $\bar{A} - B$, непрерывна (в частности, это условие выполняется, если функция f непрерывна почти всюду в множестве A). Тогда $f \in \mathfrak{L}(A)$.

Примечание. Нам неизвестно, справедливо ли соотношение $\mathfrak{P}^1(A) = \mathfrak{L}(A)$.

92. Теорема. *Пусть* $a, b \in E$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathfrak{F}(\langle a, b\rangle)$ *и пусть* $f \in \mathfrak{P}^2(\langle a, x\rangle)$ *для всех* $x \in (a, b)$. *Если существует*

$$\lim_{x\to b-} I^2(f, \langle a, x\rangle) = c \neq \pm\infty ,$$

то $f \in \mathfrak{P}^2(\langle a, b\rangle)$ *и* $I^2(f, \langle a, b\rangle) = c$.

Доказательство. Пусть $\{B_n\} \subset \sigma_{\langle a,b\rangle}$, $\{B_n\} \in \eta_b^2$ и $b \notin \overline{\langle a, b\rangle - B_n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Легко проверится (см. [7], 64), что существует целое число $l \geqq 0$ и такие действительные числа $a_1^n \leqq b_1^n \leqq \ldots \leqq a_l^n \leqq b_l^n$, что $B_n \doteq \bigcup_{i=1}^{l} (a_i^n, b_i^n)$. Очевидно, $a \leqq a_1^n < b_l^n = b$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_i^n = \lim_{n\to\infty} b_i^n = b$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Итак, в силу 47, имеем

$$\lim I^2(f, \langle a, b\rangle - B_n) = \lim_{n\to\infty} [I^2(f, \langle a, a_1^n\rangle) + \sum_{i=1}^{l-1} I^2(f, \langle b_i^n, a_{i+1}^n\rangle)] =$$
$$= \lim I^2(f, \langle a, a_1^n\rangle) + \sum_{i=1}^{l-1} \lim_{n\to\infty} [I^2(f, \langle a, a_{i+1}^n\rangle) - I^2(f, \langle a, b_i^n\rangle)] = c .$$

Утверждение теоремы теперь вытекает из 53.

Следствие. Пусть $a, b \in E$, $-\infty < a < b < +\infty$ и $f \in \mathfrak{F}(\langle a, b\rangle)$. Из предыдущей теоремы и 75 вытекает, что если существует *несобственный* интеграл Лебега $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, то $f \in \mathfrak{P}^2(\langle a, b\rangle)$ и

$$I^2(f, \langle a, b\rangle) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

93. Пример. Пусть $r = 1$, $a, b \in E$, $-\infty < a < b < +\infty$ и $K = (a, b)$. Определим функции $f_K, g_K \in \mathfrak{F}(E)$ равенством

$$f_K(x) = 2(x-a)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{x-a}\right)^2 + \pi\,\frac{(b-a)^2}{x-a}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{x-a}\right)^2 + \\ + \pi\,\frac{x-a}{b-a}\,(a+2b-3x)\,,$$

$$g_K(x) = (x-a)^2\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{x-a}\right)^2 + \frac{\pi}{b-a}(x-a)^2\,(b-x)$$

для $x \in (a, b)$ и $f_K(x) = g_K(x) = 0$ для $x \in E - (a, b)$. Тогда функция g_K непрерывна в E и $g_K'(x) = f_K(x)$ для всех $x \in E$, $x \neq \pm\infty$. Так как

$$\int_a^b \frac{1}{x-a}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{x-a}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$$

(подстановка $y = \frac{1}{2}\pi([b-a]/[x-a])^2$), то мы легко обнаружим, что не существует собственный интеграл Лебега от функции f_K в интервале K. Если мы обозначим

$$K_n = \left(a + \frac{b-a}{\sqrt{4n+2}},\quad a + \frac{b-a}{2\sqrt{n}}\right),\quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

то $[1/(x-a)]\sin\frac{1}{2}\pi([b-a]/[x-a])^2 > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Отсюда просто следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} I^2(f_K, K_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n} f_K\,\mathrm{d}\mu = +\infty\,.$$

При этом $\{K_n\} \subset \sigma_K$ – последовательность непересекающихся множеств, для которой $\{K_n\} \in \eta_a^2$.

Пусть D – совершенное множество Кантора и пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность всех ограниченных смежных интервалов множества D. Определим функции $f, g \in \mathfrak{F}(\langle 0,1\rangle)$ соотношением

$$f(x) = \sum\{f_K(x) : K \in \mathfrak{D}\}\,,\quad g(x) = \sum\{g_K(x) : K \in \mathfrak{D}\}\ ^1)$$

для всех $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Функция g, очевидно, непрерывна в $\langle 0, 1 \rangle$ и $g(x) = 0$ для всех $x \in D$. Так как для каждого $K = (a, b)$ имеем

$$\sup_{x \in K} \max \left(\left| \frac{g_K(x)}{x - a} \right| , \left| \frac{g_K(x)}{x - b} \right| \right) \leqq 2\pi(b - a) ,$$

то без особого труда докажется, что $g'(x) = f(x)$ для всех $x \in (0, 1)$. Следовательно, существует интеграл Ньютона $\int_0^1 f(x)\, dx = g(1) - g(0) = 0$ (см. [4], II, 56, 62 и 88). Однако, из предыдущего вытекает, что для каждой точки $x \in D$ существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_{\langle 0,1 \rangle}$ непересекающихся множеств, что $\{B_n\} \in \eta_x^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} I^2(f, B_n) = +\infty$. Так как множество D несчетно, то, в силу 51, будет $f \notin \mathfrak{P}^2(\langle 0, 1 \rangle)$.

94. Пример. Пусть $r = 2$, $A = (0, 1\rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $K = (0) \times \langle 0, 1 \rangle$ и пусть μ_1 – одномерная лебеговская мера на отрезке K. Для $B \in \sigma_A$ положим $F(B) = -\mu_1(\bar{B} \cap K)$, если $B \cap K = \emptyset$, и $F(B) = 0$ в противном случае. Легко покажется, что определенная таким образом функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ конечна, супераддитивна, но не аддитивна, и что ${}_0F(x) = {}_*F(x) = 0$ для всех $x \in \bar{A}$. Однако, $F(A) = -\mu_1(K) = -1$.

95. Пример. Пусть $r = 2$, $A_n = (0, 1/n\rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, и $K = (0) \times \langle 0, 1 \rangle$. Для $B \in \sigma_{A_1}$ положим $F(B) = -\mathrm{Lim}\, [G(B \cap A_n)/G(A_n)]$ (см. 64), если $B \cap K = \emptyset$, и $F(B) = +\infty$ в противном случае. Таким образом определенная функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_{A_1})$ аддитивна и, очевидно, ${}_0F(x) = 0$ и ${}_*F(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}_1$. Однако, $F(\bar{A}_1) = +\infty$ и $F(A_1) = -1$.

96. Пример. Пусть $r = 1$ и $A_n = (0, 1/n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$. Для $B \in \sigma_{A_1}$ положим $F(B) = \chi_B(0) - \mathrm{Lim}\, [G(B \cap A_n)/G(A_n)]$ (см. 65), где χ_B – характеристическая функция множества B. Таким образом определенная функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_{A_1})$ конечна и аддитивна. При этом ${}_*F(x) = 0$ для всех $x \in \bar{A}_1$ и ${}_0F(x) = 0$ для всех $x \in A_1$. Однако, ${}_0F(0) = -1$ и $F(A_1) = -1$.

Следствие. Из примеров 94–96 вытекает необходимость предположений леммы 36 (необходимость предположения „${}_*F(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$“, хотя не была доказана, все-таки она очевидна).

97. Определение. Пусть $U \subset E_r$ – открытое множество и пусть $\varphi_i \in \mathfrak{F}(U)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ – конечные функции. Скажем, что отображение φ множества U в E_r, определенное соотношением $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)]$ для всех $x \in U$, *регулярно*, если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ имеют в множестве U непрерывные первые производные и если

$$D_\varphi(x) = \det\, (\partial\varphi_i(x)/\partial x_k)_{i,k=1}^r \neq 0$$

для всех $x \in U$. Функциональный определитель D_φ мы назовем *определителем Якоби* отображения φ.

98. Пример. Пусть $r \geqq 2$, $\sigma = \mathfrak{A}_0$, $a \geqq 0$ и $b = a + r - 1$. Далее, пусть $g(t) = t^a \cos t^{-b}$, если $t > 0$, и $g(0) = 0$. Для $x = [x_1, \ldots, x_r] \in E_r$ положим $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и $f(x) = g(|x|)$. Тогда $f \in \mathfrak{F}(E_r)$ является борелевской функцией, ограниченной на каждом компактном подмножестве пространства E_r и имеющей в $E_r - (0)$ [5]) непрерывные производные всех порядков. В особенности, $\partial f(x)/\partial x_1 = g'(|x|)(x_1/|x|)$. Если мы положим $v = [f, 0, \ldots, 0]$, то для каждого $B \in \mathfrak{A}$ существует поверхностный интеграл $P(B, v)$ от вектора v на границе множества B (см. [5], 15). В силу [5], 16 имеем

$$(*) \qquad |P(B, v)| \leqq \|B\| \sup_{x \in \dot{B}} |f(x)|$$

для каждого $B \in \mathfrak{A}$ и

$$(**) \qquad P(B, v) = \int_B \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \, \mathrm{d}x$$

для каждого $B \in \mathfrak{A}$, для которого $0 \notin \bar{B}$. Пусть $A = \{x \in E_r : |x| < 1,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, r\}$. Тогда $A \in \sigma$ и функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, определенная равенством $F(B) = P(B, v)$ для всех $B \in \sigma_A$, конечна и аддитивна (см. [5], 14, примечание 2). Из соотношения (**) вытекает

$$_*F^i(x, A) = -_*(-F)^i (x, A) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \quad i = 1, 2, 3,$$

для всех $x \in \bar{A} - (0)$ (доказательство является аналогом доказательства [7], 45). Из соотношения (*) вытекает $_0F^3(0, A) = -_0(-F)^3 (0, A) = 0$ и, если $a > 0$, также $_0F^2(0, A) = -_0(-F)^2 (0, A) = 0$. Итак, в силу 71, мы получим $(\partial f/\partial x_1) \in \mathfrak{P}^3(A)$ и, если $a > 0$, также $(\partial f/\partial x_1) \in \mathfrak{P}^2(A)$.

Пусть $\Omega = \{[\xi_2, \ldots, \xi_r] : 0 < \xi_i < \pi/2,\ i = 2, 3, \ldots, r\}$ и пусть φ — отображение пространства E_r в себя, определенное уравнениями:

$$x_1 = \xi_1 \cos \xi_2,\ x_2 = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{r-1} = \xi_1 \sin \xi_2 \ldots \sin \xi_{r-1} \cos \xi_r,\ x_r = \xi_1 \sin \xi_2 \ldots \sin \xi_{r-1} \sin \xi_r\,.$$

Хорошо известно, что $D_\varphi(\xi) = \xi_1^{r-1} \sin^{r-2} \xi_2 \ldots \sin \xi_{r-1}$. Итак, отображение φ регулярно в области $(0, +\infty) \times \Omega$ и отображает эту область взаимно однозначно на множество $\{x \in E_r : x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, r\}$. Положим

$$\alpha = \int_\Omega \mathrm{D}_\varphi(\xi)\, \xi_1^{1-r} \cos \xi_2 \, \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_r,$$

$$\beta = \int_\Omega \mathrm{D}_\varphi(\xi)\, \xi_1^{1-r} \, \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_r, \quad \gamma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{r-2} t \, \mathrm{d}t\,.$$

Очевидно, α, β, γ — положительные постоянные.

---

[5]) Так как недоразумение исключено, то мы через 0 обозначим точку $[0, \ldots, 0]$.

Пусть $\partial f/\partial x_1 \in \mathfrak{P}^1(A)$. Тогда, в силу следствия теоремы 91, существует интеграл Лебега $\int_A [\partial f(x)/\partial x_1]\, dx$. Используя теорему о замене переменной и теорему Фубини, мы получим

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\, dx = \int_{(0,1)\times\Omega} g'(\xi_1)\cos\xi_2\, D_\varphi(\xi)\, d\xi = \int_0^1 \alpha g'(\xi_1)\,\xi_1^{r-1}\, d\xi_1\,.$$

Так как $\alpha > 0$, то существует также

$$\int_0^1 g'(t)\, t^{r-1}\, dt = (a/b)\int_1^{+\infty} t^{-2}\cos t\, dt + \int_1^{+\infty} t^{-1}\sin t\, dt\,.$$

Это, однако, невозможно, потому что последний интеграл вправо не существует как собственный интеграл Лебега.

Пусть $a = 0$ и пусть $\partial f/\partial x_1 \in \mathfrak{P}^2(A)$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $\varrho_n = (n\pi)^{-1/b}$ и $A_n = \{x \in A : \varrho_{2n} < |x| < \varrho_{2n-1}\}$. Легко проверится, что

$$\begin{aligned}\|A_n\| &= \beta(\varrho_{2n-1}^{r-1} + \varrho_{2n}^{r-1}) + (r\beta/\gamma)(\varrho_{2n-1}^{r-1} - \varrho_{2n}^{r-1}) \leqq \\ &\leqq \beta(2 + r/\gamma)\,\varrho_{2n-1}^{r-1} = \beta(2 + r/\gamma)\,[(2n-1)\,\pi]^{-1} \leqq \delta/n\pi\,,\end{aligned}$$

где $\delta = \beta(2 + r/\gamma)$ — положительная постоянная. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| \geqq \beta\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^{-1} = +\infty$ и $\|A_n\| \leqq \|A_1\|$ для $n = 1, 2, \ldots$, то существуют такие натуральные числа k_n, что $k_n < k_{n+1}$ и $\delta/\alpha \leqq \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}} \|A_k\| \leqq \delta/\alpha + \|A_1\|$. Положим $B_n = \bigcup_{k=k_n}^{k_{n+1}} A_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\sup\|B_n\| \leqq \delta/\alpha + \|A_1\|$ и, следовательно, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_0^2$. При этом

$$\begin{aligned}I^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, B_n\right) &= \int_{B_n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\, dx = \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}} \int_{A_k} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\, dx = \\ &= \alpha\sum_{k=k_n}^{k_{n+1}} \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} t^{-1}\sin t\, dt \leqq -\alpha\sum_{k=k_n}^{k_{n+1}} (k\pi)^{-1} \leqq (-\alpha/\delta)\sum_{k=k_n}^{k_{n+1}} \|A_k\| \leqq -1\,,\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Это, однако, противоречит теореме 49.

Примечание. Предположение $\sigma = \mathfrak{A}_0$ мы ввели лишь для удобства. Подобный, но более сложный пример можно было бы построить и без этого ограничивающего предположения.

99. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{P}^1(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^2(A)$, и если $r > 1$, также $\mathfrak{P}^2(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^3(A)$.*

Доказательство. Для $r > 1$ теорема является непосредственным следствием 81 з) и предыдущего примера. Для $r = 1$ теорема вытекает из 81 з), 91 и из следствия теоремы 92.

100. Соглашение. В следующих двух абзацах мы будем предполагать, что $\sigma = \mathfrak{A}_0$.

101. Лемма. *Пусть $U \subset E_r$ – открытое множество, $A \in \sigma$ и $\bar{A} \subset U$. Тогда взаимно однозначное регулярное отображение φ множества U в E_r является допустимым отображением множества $\bar{A}$ на множество $\overline{\varphi(A)}$* (см. 55).

Доказательство. Если регулярное отображение φ взаимно однозначно, то обратное отображение φ^{-1} также регулярно. Отсюда, из [5], 59 и из хорошо известной теоремы о замене переменной в интеграле Лебега, вытекает существование таких положительных постоянных α, β, что

$$\alpha\|B\| \leqq \|\varphi(B)\| \leqq \beta\|B\| \quad \text{и} \quad \alpha\,\mu(B) \leqq \mu[\varphi(B)] \leqq \beta\,\mu(B)$$

для всех $B \in \sigma_A$. Допустимость отображения φ является теперь простым следствием его гомеоморфности.

102. Теорема. *Пусть $U \subset E_r$ – открытое множество, $A \in \sigma$, $\bar{A} \subset U$ и пусть φ – взаимно однозначное регулярное отображение множества U в E_r. Выберем определенное целое число i, $1 \leqq i \leqq 3$. Тогда*

$$I^i(f, \varphi(A)) = I^i(f * \varphi \,.\, |D_\varphi|, A)$$

для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\overline{\varphi(A)})$, для которой существует хотя один из интегралов.

Доказательство. В силу теоремы о замене переменной в интеграле Лебега $G * \varphi = \int |D_\varphi| \,\mathrm{d}\mu$. Подобным способом как и в [7], 45 мы покажем, что

$$G * \varphi \in \mathfrak{M}^i(|D_\varphi|, A) \quad \text{и} \quad -G * \varphi \in \mathfrak{M}^i(-|D_\varphi|, A)\,.$$

Утверждение теоремы теперь следует из 101, 58 и 54.

При подготовке предложенной статьи ряд ценных замечаний сделал проф. Ян Маржик (Jan Mařík). Автор выражает ему свою благодарность.

Литература

[1] *P. R. Halmos:* Measure theory. New York 1950.

[2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

[3] *J. L. Kelley:* General topology. New York 1955.

[4] *J. Mařík:* Základy teorie integrálu v Euklidových prostorech. Časopis pro pěst. mat. *77* (1952), 1–51, 125–145, 267–300.

[5] *J. Mařík:* The surface integral. Чехословацкий мат. журнал, *6* (81), 1956, 522–558.

[6] *J. Mařík, J. Matyska:* O jednom zobecnění Lebesgueova integrálu v E_m. Подготовляется к печати.

[7] *V. Pfeffer:* Интеграл Перрона в топологических пространствах. Časopis pro pěst. mat. *88* (1963), 322–348.

[8] *S. Saks:* Theory of the integral. New York.

Výtah

O JEDNÉ DEFINICI INTEGRÁLU V TOPOLOGICKÝCH PROSTORECH

VÁCLAV PFEFFER, Praha

Budiž P Hausdorffův lokálně kompaktní topologický prostor splňující první axiom spočetnosti a budiž σ množinový okruh, jehož prvky jsou částmi prostoru P. Nechť $\{x\} \in \sigma$ pro všechna $x \in P$ a nechť $\bar{A}$ je kompaktní a $\bar{A} \in \sigma$ pro všechna $A \in \sigma$. Je-li $A \in \sigma$, je σ_A systém všech částí $\bar{A}$, jež patří do σ. Ke každému bodu $x \in P$ přiřaďme jistou množinu posloupností $\{B_n\}$, $B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, a označme ji η_x. Dále označme κ_x množinu všech $\{B_n\} \in \eta_x$, pro něž $x \in B_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Na systému σ budiž pevně dána nezáporná aditivní funkce G, pro kterou platí:

$$A \in \sigma \Rightarrow G(\bar{A} - A) = 0\,, \quad [x \in P,\ \{B_n\} \in \eta_x] \Rightarrow \lim G(B_n) = 0\,.$$

Budiž $x \in P$, $A \in \sigma$ a budiž F funkce definovaná na σ_A. *Dolní limitou* funkce F v bodě x vzhledem k množině A nazveme infimum množiny všech hodnot $\liminf F(B_n)$, kde $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$, a $\{B_n\} \in \eta_x$. Označíme ji ${}_0F(x, A)$. *Dolní derivací* funkce F v bodě x vzhledem k množině A nazveme infimum množiny všech hodnot $\liminf [F(B_n)/G(B_n)]$, kde $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$, a $\{B_n\} \in \kappa_x$ (přitom klademe $a/0 = +\infty$ pro $a > 0$, $a/0 = -\infty$ pro $a < 0$, podíl $0/0$ se nedefinuje). Označíme ji ${}_*F(x, A)$.

Budiž $A \in \sigma$ a budiž f funkce definovaná na $\bar{A}$. Aditivní funkci M definovanou na σ_A nazveme *majorantou* funkce f na množině A, jestliže $M(\bar{A}) < +\infty$ a jestliže

$$x \in \bar{A} \Rightarrow [{}_0M(x, A) \geqq 0,\ -\infty \neq {}_*M(x, A) \geqq f(x)]\,.$$

Číslo $\inf M(A)$, kde infimum se bere přes všechny majoranty funkce f na množině A, nazveme *horním integrálem* funkce f na množině A a označíme je $I_I(f, A)$. Je-li $I_I(f, A) = -I_I(-f, A) \neq \pm\infty$, nazveme tuto společnou hodnotu *integrálem* funkce f na množině A a označíme ji $I(f, A)$. $\mathfrak{P}(A)$ bude systém všech funkcí, jež mají na množině A integrál.

Předpokládejme nyní, že jsou splněny podmínky $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$ uvedené v odstavci 9.

Potom systém $\mathfrak{P}(A)$, $A \in \sigma$, obsahuje všechny spojité konečné funkce a je uzavřený vůči limitním přechodům pro posloupnosti majorisované a minorisované integrovatelnými funkcemi. Je-li $f, g \in \mathfrak{P}(A)$, je také $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{P}(A)$ (po libovolném dodefinování tam, kde $\alpha f(x) + \beta g(x)$ nemá smysl) pro všechna reálná čísla α, β. Integrál $I(f, A)$ je nezáporným lineárním funkcionálem definovaným na $\mathfrak{P}(A)$, pro nějž platí obvyklé věty o limitních přechodech za integračním znamením. Existuje-li $I(f, A)$, existuje také $I(f, B)$ pro každou množinu $B \in \sigma_A$ přičemž $I(f, \bar{A}) = I(f, A)$. Neurčitý integrál $I(f)$ je aditivní množinou funkcí.

Dále platí věta: *Budiž* $A \in \sigma$, $x \in \bar{A}$ *a budiž* f *funkce definovaná na* $\bar{A}$. *Nechť je* $f \in \mathfrak{P}(B)$, *jakmile je* $B \in \sigma_A$ *a* $x \notin \bar{B}$, *a nechť existuje* $\lim I(f, A - B_n) = c \neq \pm \infty$ *pro každou posloupnost* $\{B_n\} \in \eta_x$, *pro niž* $x \notin \overline{A - B_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Pak je* $f \in \mathfrak{P}(A)$ *a* $I(f, A) = c$.

Jsou-li všechny množiny systému σ borelovské a existuje-li regulární borelovská míra μ, jež na σ splývá s funkcí G, nezávisí hodnota $I_I(f, A)$ na tom, jak je funkce f definována na $\bar{A} - A$. Existuje-li Lebesgueův integrál $\int_A f \, d\mu$, je $f \in \mathfrak{P}(A)$ a $I(f, A) = = \int_A f \, d\mu$.

Platí-li ještě podmínky $\mathscr{S}$ a $\mathscr{E}'_8$, uvedené v odstavci 9, existuje Lebesgueův integrál $\int_A f \, d\mu$, právě když existují integrály $I(f, A)$ a $I(|f|, A)$. Přitom předpoklad $\mathscr{E}_8$ je důsledkem předpokladů $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$ a $\mathscr{E}'_8$.

Nyní budiž P r-rozměrný Eukleidův prostor, $r \geqq 1$ celé, a μ budiž Lebesgueova míra v P. Je-li množina $A \subset P$ omezená a měřitelná, je $\|A\|$ její povrch (viz [5], 2). Nechť σ je systém všech omezených měřitelných podmnožin P s konečným povrchem, jejichž hranice má míru nula. Předpokládejme, že na systému σ je $G = \mu$. Ke každému bodu $x \in P$ přiřaďme množiny

$$\eta_x^1 = \{\{B_n\} : B_n \in \sigma,\ n = 1, 2, \ldots,\ \lim d(B_n \cup \{x\}) = 0\}\,,^{*)}$$
$$\eta_x^2 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \sup \|B_n\| < +\infty\}$$

a je-li $r > 1$, také množinu $\eta_x^3 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \lim \|B_n\| = 0\}$. Zaveďme symboly I^i a $\mathfrak{P}^i$, $i = 1, 2, 3$, jejichž význam je nasnadě. Pro každý systém množin η_x^i, $i = 1, 2, 3$, jsou nyní splněny předpoklady $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$, $\mathscr{S}$ a $\mathscr{E}'_8$.

Budiž $A \in \sigma$. Pak je $\mathfrak{P}^1(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^2(A)$ a je-li $r > 1$, je také $\mathfrak{P}^2(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^3(A)$, při čemž každé dva z integrálů I^i, $i = 1, 2, 3$, splývají na průniku svých definičních oborů. Všechny funkce ze systémů $\mathfrak{P}^i(A)$, $i = 1, 2, 3$ jsou měřitelné.

Nakonec budiž φ prosté regulární zobrazení otevřené množiny $U \subset P$ do P a D_φ budiž jeho Jakobián. Zvolme celé číslo i, $1 \leqq i \leqq 3$. Je-li $A \in \sigma$, $\bar{A} \subset U$, je také $\varphi(A) \in \sigma$ a

$$I^i(f, \varphi(A)) = I^i(f * \varphi \cdot |D_\varphi|, A)$$

pro každou funkci f definovanou na množině $\overline{\varphi(A)}$, pro kterou alespoň jeden z obou integrálů existuje.

*) Je-li $B \subset P$, je $d(B)$ průměr množiny B.

Summary

ON A DEFINITION OF THE INTEGRAL IN TOPOLOGICAL SPACES

VÁCLAV PFEFFER, Praha

Let P be a locally compact first-countable Hausdorff topological space and, σ a ring of subsets of P. Let $\{x\} \in \sigma$ for each $x \in P$, and let $\bar{A}$ be compact and $\bar{A} \in \sigma$ for all $A \in \sigma$. If $A \in \sigma$ denote by σ_A the set of those parts of $\bar{A}$ which belong to σ. To each $x \in P$ associate a certain set of sequences $\{B_n\}$, $B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, and denote it by η_x. Furthermore, denote by κ_x the set of all $\{B_n\} \in \eta_x$ for which $x \in B_n$, $n = 1, 2, \ldots$. On the system σ let there be given a non-negative finite additive function G for which the following conditions are fulfilled:

$$A \in \sigma \Rightarrow G(\bar{A} - A) = 0\,, \quad [x \in P,\ \{B_n\} \in \eta_x] \Rightarrow \lim G(B_n) = 0\,.$$

Let there be given a point $x \in P$, a set $A \in \sigma$ and a function F defined on σ_A. We call the *lower limit* of F at x relative to A the lower bound of the set of all values $\liminf F(B_n)$, where $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$, and $\{B_n\} \in \eta_x$. We shall denote it by ${}_0F(x, A)$. We call the *lower derivate* of F at x relative to A the lower bound of the set of all values $\liminf [F(B_n)/G(B_n)]$, where $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$, and $\{B_n\} \in \kappa_x$ (putting $a/0 = +\infty$ for $a > 0$, $a/0 = -\infty$ for $a < 0$, and leaving $0/0$ undefined). We shall denote it by ${}_*F(x, A)$.

Let $A \in \sigma$ and f be a function defined on $\bar{A}$. An additive function M defined on σ_A is termed a *major function* of f on A if $M(\bar{A}) < +\infty$ and if

$$x \in \bar{A} \Rightarrow [{}_0M(x, A) \geqq 0,\ -\infty \neq {}_*M(x, A) \geqq f(x)]\,.$$

The number $\inf M(A)$, where M is any major function of f on A, is called the *upper integral* of f on A and denoted by $I_I(f, A)$. If $I_I(f, A) = -I_I(-f, A) \neq \pm\infty$, then this common value is called the *integral* of f on A and is denoted by $I(f, A)$. $\mathfrak{P}(A)$ will be the system of all functions integrable on the set A.

Assume the conditions $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$ introduced in section 9.

Then the system $\mathfrak{P}(A)$, $A \in \sigma$, contains all finite continuous functions defined on $\bar{A}$, and is closed with respect to taking limits of sequences majorized and minorized by integrable functions. If $f, g \in \mathfrak{P}(A)$, then also $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{P}(A)$ (we asign $\alpha f + \beta g$ an arbitrary value at points $x \in \bar{A}$ at which $\alpha f(x) + \beta g(x)$ is meaningless) for all real numbers α, β. The integral $I(f, A)$ is a non-negative linear functional defined on $\mathfrak{P}(A)$ for which the usual theorems on the limit transitions under the integral sign are valid. If $I(f, A)$ exists, then there also exists $I(f, B)$ for each set $B \in \sigma_A$ and $I(f, \bar{A}) = I(f, A)$. The indefinite integral $I(f)$ is an additive set function.

Furthermore, the following theorem holds: *Let there be given a set $A \in \sigma$, a point*

$x \in \bar{A}$ and a function f defined on $\bar{A}$. Let $f \in \mathfrak{P}(B)$ whenever $B \in \sigma_A$ and $x \notin \bar{B}$, and let $\lim I(f, A - B_n) = c \neq \pm\infty$ for each sequence $\{B_n\} \in \eta_x$ for which $x \notin \overline{A - B_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Then $f \in \mathfrak{P}(A)$ and $I(f, A) = c$.

Suppose that every set of the system σ is a Borel set and that there exists a regular Borel measure μ, equal to G on σ. Then the value $I_I(f, A)$ does not depend on the values of the function f on $\bar{A} - A$. If the Lebesgue integral $\int_A f \, d\mu$ exists, then $f \in \mathfrak{P}(A)$ and $I(f, A) = \int_A f \, d\mu$.

If, in addition, the conditions $\mathscr{S}$ and $\mathscr{E}'_8$ introduced in section 9 are fulfilled, then the Lebesgue integral $\int_A f \, d\mu$ exists if and only if both the integrals $I(f, A)$ and $I(|f|, A)$ exist. The assumption $\mathscr{E}_8$ is then a consequence of the assumptions $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$ and $\mathscr{E}'_8$.

Now let P be an r-dimensional Euclidean space (integer $r \geqq 1$), and let μ be the Lebesgue measure in P. If a set $A \subset P$ is bounded and measurable, let $\|A\|$ denote its surface area (see [5], 2). Let σ be the system of all bounded measurable subsets of P which have finite surface area and boundary of zero measure. Suppose that $G = \mu$ on the system σ. With each point $x \in P$ associate the sets

$$\eta_x^1 = \{\{B_n\} : B_n \in \sigma,\ n = 1, 2, \ldots,\ \lim d(B_n \cup \{x\}) = 0\}\ ,^{*)}$$
$$\eta_x^2 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \sup \|B_n\| < +\infty\}$$

and if $r > 1$, also the set $\eta_x^3 = \{\{B_n\} \in \eta_x^1 : \lim \|B_n\| = 0\}$. Let us introduce the symbols I^i and $\mathfrak{P}^i$, $i = 1, 2, 3$, the meaning of which is quite clear. The assumptions $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$, $\mathscr{S}$ and $\mathscr{E}'_8$ will now be satisfied for each of the systems of sets η_x^i, $i = 1, 2, 3$.

Let $A \in \sigma$. Then $\mathfrak{P}^1(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^2(A)$, and if $r > 1$, also $\mathfrak{P}^2(A) \subsetneqq \mathfrak{P}^3(A)$. Any two of the integrals I^i, $i = 1, 2, 3$, coincide on the intersection of their domains. All functions of the systems $\mathfrak{P}^i(A)$, $i = 1, 2, 3$, are measurable.

Finally, let φ be a one-to-one regular mapping of an open set $U \subset P$ into P, and D_φ its Jacobian. Take any integer i, $1 \leqq i \leqq 3$. If $A \in \sigma$, $\bar{A} \subset U$, then also $\varphi(A) \in \sigma$ and

$$I^i(f, \varphi(A)) = I^i(f * \varphi \,.\, |D_\varphi|, A)$$

for each function f defined on the set $\overline{\varphi(A)}$ for which there exists at least one of these two integrals.

*) If $B \subset P$, then $d(B)$ is the diameter of B.