Časopis pro pěstování matematiky

Čestmír Vitner

Der Orthogonalisationsprozess in pseudoeuklidischen Räumen

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 89 (1964), No. 1, 31--35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117493

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

# DER ORTHOGONALISATIONSPROZESS IN PSEUDOEUKLEIDISCHEN RÄUMEN

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Eingelangt am 29. Juni 1962)

Die expliziten Formeln (4) für orthonormale Vektoren $e_1, \ldots, e_m$, welche mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisationsprozess aus einer endlichen Folge $a_1, \ldots, a_m$ linear unabhängiger Vektoren in pseudoeukleidischen Vektorräumen von einem beliebigen Index gewonnen sind, stellen das Hauptergebniss der Arbeit dar.

Sei $X_n$ ein pseudoeukleidischer nichtsingulärer Vektorraum mit der Dimension $n$ und mit einem beliebigen Index $r$ $(0 \leqq r \leqq n)$ (Siehe z. B. [1]). Das Skalarprodukt der Vektoren $a, b$ wir mit $(a, b)$ bezeichnet. Sei nun $a_1, \ldots, a_m$ eine endliche Folge von $m$ linear unabhängigen Vektoren. (Es gilt also $m \leqq n$). Der Schmidtsche Orthogonalisationsprozess besteht in der Feststellung einer endlichen Folge von $m$ linear unabhängigen Vektoren $e_1, \ldots, e_m$, für welche

$$(1) \qquad (e_i, e_k) = 0 \text{ für } i \neq k, \quad (e_i, e_i) = \pm 1 \text{ für } i, k = 1, \ldots, m ;$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} e_1 &= c_{11}a_1 , \\ e_2 &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_k &= c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kk}a_k , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m &= c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \ldots + c_{mm}a_m , \end{aligned}$$

wo

$$(3) \qquad c_{ii} > 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \text{ ist} ,$$

gilt.

Die Bedingung (2) drückt aus, dass für die Vektorunterräume $\{a_1, \ldots, a_k\}$, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ die Gleichung $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ für $k = 1, \ldots, m$ gilt. Die Gleichung (1) ist eine Bedingung dafür, dass diese Unterräume nicht isotrop sind (das heisst dass die in ihnen induzierte Metrik nicht singulär ist) und die Vektoren $e_1, \ldots, e_k$ in diesen eine orthonormale Basis bilden. Die Bedingung (3) präzisiert die Orientationsauswahl der Vektoren $e_1, \ldots, e_k$; sie drückt die Forderung aus, dass die Basen $a_1, \ldots, a_k$ und $e_1, \ldots, e_k$ für alle $k = 1, \ldots, m$ die gleiche Orientation haben.

Aus den eben angegebenen Tatsachen folgt, dass der Orthogonalisationsprozess nur auf solche Folge linear unabhängiger Vektoren anwendbar ist, für welche die Vektorunterräume $\{a_1\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_k\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_m\}$ nicht isotrop sind.

Es gilt:

**Satz.** *Sei $a_1, \ldots, a_m$ solche endliche Folge linear unabhängiger Vektoren, dass die Unterräume $\{a_1\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_4\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_m\}$ nicht isotrop sind. Dann existiert ein einziges Orthonormalsystem von Vektoren $e_1, \ldots, e_m$, welche aus den Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ durch den Schmidtschen Orthogonalisationsprozess gebildet ist. (D. h., dass die Bedingungen* (1), (2), (3) *erfüllt sind.) Dabei gelten folgende explizite Formeln:*

$$e_k = \frac{\varepsilon_{k-1} U_k}{|D_{k-1} D_k|^{1/2}}\,, \quad k = 1, \ldots, m\,, \tag{4}$$

*wo $D_0 = 1$, $D_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ die aus den Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ gebildete Gramsche Determinante ist, $\varepsilon_{k-1} = \operatorname{sgn} D_{k-1}$ und wo $U_k$ die Determinante bezeichnet, welche man aus $D_k$ bekommt, wenn man in $D_k$ die letzte Spalte durch die Spalte $a_1, \ldots, a_k$ ersetzt.*

Beweis. *Eindeutigkeit:* Es gilt zuerst $D_k \neq 0$. Das folgt daraus, dass der Unterraum $\{a_1, \ldots, a_k\}$ nicht isotrop ist. Sei $C_k$ die Determinante der Übergangsmatrix von Basis $a_1, \ldots, a_k$ zur Basis $e_1, \ldots, e_k$, $E_k$ die Gramsche Determinante, die aus den Vektoren $e_1, \ldots, e_k$ gebildet ist ($E_0 = 1$) und $T_k$ die Determinante, welche man aus $E_k$ bekommt, wenn man in $E_k$ die letzte Spalte durch die Spalte $e_1, \ldots, e_k$ ersetzt. Nun gilt (siehe [2] – es liegt vorläufig noch nicht daran, dass die Basis $e_1, \ldots, e_k$ orthonormal ist):

$$E_k = C_k^2 D_k\,, \tag{5}$$

$$T_k = C_{k-1} C_k U_k\,. \tag{6}$$

Dabei setzen wir $C_0 = 1$. Für orthonormale Vektoren $e_1, \ldots, e_k$ folgt aus (5)

$$\varepsilon_k = \operatorname{sgn} D_k = E_k\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m\,. \tag{7}$$

Mit Rücksicht darauf, dass nach (3) $C_k > 0$ ist, man bekommt aus (5) auch

$$C_k = \frac{1}{|D_k|^{1/2}}\,. \tag{8}$$

Nimmt man jetzt in Betracht, dass offenbar $T_k = E_{k-1} e_k$ ist, dann bekommt man aus (6) nach (7) und (8) die Formel (4).

Damit ist also gezeigt, dass höchstens eine Basis existiert, welche die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt, und ist durch die Formeln (4) gegeben.

*Existenz:*

Wir haben noch zu zeigen, dass die durch die Formeln (4) definierten Vektoren $e_k$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) haben.

Vor allem folgt aus der Formel (4), dass die Vektoren die Eigenschaft (2) haben.

Zeigen wir, dass die Vektoren $e_i$, $e_k$ für $i \neq k$ orthogonal sind. Setzen wir für Bestimmtheit voraus, dass $i < k$ ist. Es gilt offenbar

$$(U_k, a_i) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1), & \ldots, & (a_1, a_{k-1}), & (a_1, a_i) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1), & \ldots, & (a_k, a_{k-1}), & (a_k, a_i) \end{vmatrix} = 0$$

und nach (2) auch $(U_k, e_i) = 0$. Davon bekommt man endlich

$$(e_k, e_i) = \frac{\varepsilon_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} (U_k, e_i) = 0 .$$

Damit ist die Ortogonalität bewiesen.

Weiter gilt

$$(e_k, e_k) = \frac{\varepsilon_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} (U_k, e_k) = \frac{\varepsilon_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} D_{k-1}(a_k, e_k) =$$

$$= \frac{\varepsilon_{k-1}D_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} \cdot \frac{\varepsilon_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} (U_k, a_k) = \frac{D_{k-1}D_k}{|D_{k-1}D_k|} = \operatorname{sgn}(D_{k-1}D_k) = \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k ,$$

das ist

$$(9) \qquad (e_k, e_k) = \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k .$$

Aus der Formel (9) folgt, dass die Vektoren $e_k$ Einheitsvektoren sind (d. h. dass $(e_k, e_k) = \pm 1$ gilt).

Die Vektoren $e_k$ haben also die Eigenschaft (1).

Der Koeffizient bei $a_k$ auf der rechten Seite der Formel (4) ist gleich $c_{kk}$. Es gilt also

$$c_{kk} = \frac{\varepsilon_{k-1}}{|D_{k-1}D_k|^{1/2}} D_{k-1} = \left|\frac{D_{k-1}}{D_k}\right|^{1/2} > 0 .$$

Damit ist die Beziehung (3) und damit auch der ganze Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Im Falle des eukleidischen Raume (dessen Index also Null ist) ist $\varepsilon_k > 0$ für jedes $k$ und die Formeln (4) reduzieren sich auf bekannte Formeln. Siehe [2].)

Im Falle des Raumes mit Index Eins (für $n = 4$ liegt der Minkowskische Zeitraum vor) bekommt man aus Formeln (4) speziele Formeln. *Wenn $(a_1, a_1) < 0$ ist, dann genügt es die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ vorauszusetzen, weil weitere Bedingungen der Anisotropie von sich selbst erfüllt sind.* Das folgt aus dem folgendem Satz:

*Wenn der Unterraum $B_k$ (mit Dimension $k$) des Raumes $X_n$ mit Index Eins einen Vektor $a$ der Imaginärlänge (d. h. $(a, a) < 0$) enthält, dann ist dieser Unterraum nicht isotrop und hat den Index Eins.*

Den Beweis dieses Satzes kann man zum Beispiel auf diese Weise durchführen: Zu dem betrachteten nichtisotropen Vektor $a$ existiert eine orthogonale Ergänzung $A_{n-1}$ von Dimension $n - 1$. Mit Rücksicht darauf, dass der Raum $X_n$ den Index Eins hat und dass $(a, a) < 0$ für den Vektor $a$ gilt, die induzierte Metrik in $A_{n-1}$ ist eukleidisch. Der Durchschnitt von $B_k$ mit $A_{n-1}$ hat offenbar die Dimension $k - 1$. Dieser Durchschnitt ist ein eukleidischer Unterraum. Wählen wir darin eine Orthogonalbasis $b_2, \ldots, b_k$ $((b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$; $(b_i, b_i) > 0)$. Damit haben wir in dem Unterraum $B_k$ eine Orthogonalbasis $a, b_2, \ldots, b_k$, für welche $(a, a) < 0, (b_i, b_i) > 0$ gilt, konstruiert. $B_k$ ist also ein nichtisotroper Unterraum mit dem Index Eins. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Kehren wir nun zu den Formeln (4) im Falle, wenn $(a_1, a_1) < 0$ ist, zurück. Aus dem eben bewiessenen Satz folgt, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_m = -1$ und selbstverständlich auch $\varepsilon_0 = 1$ ist. Die Formeln (4) reduzieren sich also auf die Formeln

$$(10) \qquad e_1 = \frac{U_1}{|D_1|^{1/2}}, \quad e_k = -\frac{U_k}{(D_{k-1}D_k)^{1/2}} \quad \text{für} \quad k = 2, \ldots, m.$$

Bemerkung 2. Betrachten wir noch die Bedeutung der Gramschen Determinante $D_k$. Wir werden die Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ nur als linear unabhängige voraussetzen. Es ist bekannt (vergl. [1]), dass *die Bedingung* $D_k = 0$ *die Isotropie des Unterraumes* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *ausdrückt*. Zweigen wir, dass im Falle $D_k \neq 0$ folgende Behauptung gilt: $D_k$ *ist positiv im Falle, dass die im Unterraume* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *induzierte Metrik den geraden Index hat, und negativ, wenn die induzierte Metrik in diesem Unterraume einen ungeraden Index hat.* Für eine Orthonormalbasis ist der Beweis dieser Behauptung offenbar. In allgemeinem Falle kann der Beweis durch einen Übergang zur Orthonormalbasis (welche immer existiert) mit Benutzung einer zu (5) analogischer Formel durchgeführt werden.

*Literatur*

[1] *П. К. Рашевский:* Римановa геометрия и тензорный анализ. Москва 1953.
[2] *G. Kowalewski*: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, 423–426.

## Výtah

## ORTOGONALISAČNÍ PROCES V PSEUDOEUKLIDOVSKÝCH PROSTORECH

ČESTMÍR VITNER, Praha

Hlavním cílem tohoto článku je odvození explicitních vzorců pro ortonormální vektory $e_1, \ldots, e_m$, získané ortogonalisačním procesem E. SCHMIDTA z konečné posloupnosti $a_1, \ldots, a_m$ lineárně nezávislých vektorů v pseudoeuklidovských vektorových prostorech libovolného indexu. Zmíněný ortogonalisační proces je charakterisován vztahy (1), (2) a (3). Aby bylo možno ortogonalisační proces provést, je třeba předpokládat, že podprostory $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_m\}$ nejsou isotropické. Jest ukázáno (Věta), že vektory $e_1, \ldots, e_m$ jsou stanoveny jednoznačně a že jsou dány explicitními vzorci (4).

V případě indexu 1 a $(a_1, a_1) < 0$ je ukázáno, že další podmínky neisotropnosti podprostorů $\{a_1, \ldots, a_k\}$ jsou automaticky splněny, při čemž pak platí speciální explicitní vzorce (10).

V poznámce 2 je dán geometrický význam znaménka Gramova determinantu $D_k$ utvořeného z $k$ lineárně nezávislých vektorů $a_1, \ldots, a_k$. Determinant $D_k$ je větší resp. menší než nula, jestliže indukovaná metrika v prostoru $\{a_1, \ldots, a_k\}$ je nesingulární a má sudý resp. lichý index.

## Резюме

## ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЧЕСТМИР ВИТНЕР, (Čestmír Vitner), Прага

Главной целью статьи является вывод формул в явном виде для ортонормальных векторов $e_1, \ldots, e_m$, полученных с помощью процесса ортогонализации Э. Шмидта из конечной последовательности $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимых векторов в псевдоевклидовых векторных пространствах любого индекса. Упомянутый процесс ортогонализации характеризуется соотношениями (1), (2) и (3). Процесс ортогонализации можно использовать лишь при условии, что подпространства $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_m\}$ не являются изотропными. Показано (Теорема), что векторы $e_1, \ldots, e_m$ определяются однозначно и даны в явном виде формулами (4).

В случае индекса 1 и $(a, a) < 0$ показано, что дальнейшие условия неизотропности подпространств $\{a_1, \ldots, a_k\}$ автоматически выполняются, причем тогда имеют место специальные формулы явного вида (10).

В замечании 2 толкуется геометрический смысл знака определителя Грама $D_k$, образованного из $k$ линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_k$. Определитель $D_k$ больше или меньше нуля, если индуцированная метрика в пространстве $\{a_1, \ldots, a_k\}$ неособая и ее индекс является соответственно, четным или нечетным.