Zbyněk Šidák

O počtu kladných prvků v mocninách nezáporné matice

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 28--30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117492`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O POČTU KLADNÝCH PRVKŮ V MOCNINÁCH NEZÁPORNÉ MATICE

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Došlo dne 23. července 1962)

Je ukázáno, že počet kladných prvků v mocninách nezáporné matice nemusí být neklesající; je uvedena podmínka, která však k tomu stačí.

1. Jestliže A je nějaká čtvercová matice s nezápornými prvky, budeme označovat $\kappa(A)$ počet kladných prvků v této matici A; obdobně pro nezáporný vektor z symbol $\kappa(z)$ bude značit počet kladných prvků v z.

Předpokládejme dále, že A je nerozložitelná primitivní matice řádu n. Pro takovou matici klasická Frobeniusova věta říká, že $\kappa(A^k) = n^2$ pro všechna dostatečně velká k. H. WIELANDT [4] publikoval bez důkazu zpřesnění této věty tvrdící, že $\kappa(A^k) = n^2$ pro všechna $k \geqq (n-1)^2 + 1$ (a obecně tuto hranici nelze již snížit). Důkaz Wielandtova tvrzení pak podali V. PTÁK [3] a J. C. HOLLADAY, R. S. VARGA [2].

V této souvislosti vzniká přirozeně otázka, zdali k této positivitě mocniny A^k se dospívá monotonně, to jest zdali $\kappa(A^k)$ je neklesající funkcí k.

V našem příspěvku ukážeme nejprve příklad, v němž $\kappa(A^k)$ není neklesající, a potom uvedeme jednoduchou postačující podmínku pro to, aby $\kappa(A^k)$ bylo neklesající.

2. Je jasné, že problémy, o kterých zde hovoříme, závisí pouze na rozmístění kladných prvků a nul v dané matici, nikoliv na přesné číselné velikosti prvků. Proto stačí matici určovat pouze tím, že udáme, které její prvky jsou kladné. Jestliže v matici A jsou kladné prvky v prvním řádku právě $a_{1i_1}, a_{1i_2}, \ldots, a_{1i_r}$, v druhém řádku právě $a_{2j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{2j_s}, \ldots$ atd., zapíšeme to symbolicky tak, že A je určena $1 \to (i_1, i_2, \ldots, i_r)$, $2 \to (j_1, j_2, \ldots, j_s)$, ... atd. Tento způsob zápisu je velmi názorný v jiných ekvivalentních formulacích této části teorie nezáporných matic: v teorii Markovových řetězců (resp. v teorii orientovaných grafů), kde značí, že ze stavu 1 lze přejít do stavů $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$, atd. (resp. z uzlu 1 jdou orientované hrany do uzlů $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$, atd.). Z tohoto zápisu lze též mnohem snadněji zjišťovat rozmístění kladných prvků a nul v mocninách matice A.

Příklad 1. Matice A budiž určena $1 \to (1, 2)$, $2 \to (3, 4, 5)$, $3 \to (6, 7, 8)$, $4 \to (6, 7, 8)$, $5 \to (6, 7, 8)$, $6 \to (9)$, $7 \to (9)$, $8 \to (9)$, $9 \to (1)$, takže $\kappa(A) = 18$. Matice A je zřejmě nerozložitelná a poněvadž diagonální prvek a_{11} je kladný, je také primitivní. Snadno vidíme dále, že A^2 je určena $1 \to (1, 2, 3, 4, 5)$, $2 \to (6, 7, 8)$, $3 \to (9)$, $4 \to (9)$, $5 \to (9)$, $6 \to (1)$, $7 \to (1)$, $8 \to (1)$, $9 \to (1, 2)$, takže $\kappa(A^2) = 16$. Tedy $\kappa(A) > \kappa(A^2)$, a proto $\kappa(A^k)$ není neklesající funkcí k.

Pro imprimitivní matice uvedeme ještě jednodušší příklad, v němž $\kappa(A^k)$ není neklesající.

Příklad 2. Matice A budiž určena $1 \to (2, 3)$, $2 \to (4, 5)$, $3 \to (4, 5)$, $4 \to (6)$, $5 \to (6)$, $6 \to (1)$, takže $\kappa(A) = 9$. A je opět nerozložitelná a má index imprimitivnosti 4. A^2 je určena $1 \to (4, 5)$, $2 \to (6)$, $3 \to (6)$, $4 \to (1)$, $5 \to (1)$, $6 \to (2, 3)$, takže $\kappa(A^2) = 8$.

3. Dokážeme nyní větu o něco obecnější, než potřebujeme. Myšlenka jejího důkazu je podobná jako v lemmatu 1 na str. 322 knihy F. R. GANTMACHERA [1].

Věta. *Budiž A nezáporná nerozložitelná matice řádu n, v jejíž hlavní diagonále je nejvýše jeden prvek nulový. Budiž B libovolná nezáporná matice řádu n. Pak $\kappa(B) \leqq \kappa(AB)$.*

Důkaz. Označme $C = AB$ a považujme sloupce matice B, resp. C, za sloupcové vektory $b_1, b_2, \ldots, b_n$, resp. $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Pro libovolné $i = 1, 2, \ldots, n$ pak máme $Ab_i = c_i$.

Nechť nejprve $0 < \kappa(b_i) < n$. Po vhodném stejném zpermutování řádků a sloupců matice A a řádků vektorů b_i, c_i můžeme předpokládat, že kladné prvky vektoru b_i jsou právě na jeho prvních $\kappa(b_i)$ místech, to znamená, že b_i má tvar

$$b_i = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde vektor u má právě $\kappa(b_i) = \kappa(u)$ souřadnic. Odpovídajícím způsobem rozdělíme též matici A a vektor c_i, to jest

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

kde A_{11} je čtvercová matice řádu $\kappa(b_i)$ a vektor v má $\kappa(b_i)$ souřadnic. V našem označení tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

což dává $A_{11}u = v$, $A_{21}u = w$. Jestliže nyní všechny diagonální prvky matice A_{11} jsou kladné, pak zřejmě $\kappa(v) = \kappa(u)$; jestliže právě jeden diagonální prvek A_{11} je nulový, pak buď $\kappa(v) = \kappa(u) - 1$ nebo opět $\kappa(v) = \kappa(u)$; v každém případě však $\kappa(v) \geqq \kappa(u) - 1$. Dále kdyby bylo $\kappa(w) = 0$, to jest $w = 0$, pak z $A_{21}u = w = 0$ by vyplývalo $A_{21} = 0$. To je však spor s nerozložitelností matice A, takže musí být $\kappa(w) \geqq 1$. Celkem tedy dostáváme $\kappa(c_i) = \kappa(v) + \kappa(w) \geqq \kappa(u) - 1 + 1 = \kappa(u) = \kappa(b_i)$.

Dále jestliže $\kappa(b_i) = n$, pak obdobně z nerozložitelnosti matice A vyplývá $\kappa(c_i) = n$. Jestliže konečně $\kappa(b_i) = 0$, pak zřejmě $\kappa(c_i) = 0$.

Shrnutím výsledků tedy máme $\kappa(AB) = \sum_{i=1}^{n} \kappa(c_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \kappa(b_i) = \kappa(B)$.

Důsledek. *Jestliže A je nezáporná nerozložitelná matice, v jejíž hlavní diagonále je nejvýše jeden prvek nulový, pak $\kappa(A^k)$ je neklesající funkcí k.*

Důkaz je ihned zřejmý z naší věty, položíme-li $B = A^k$ pro $k = 1, 2, \ldots$

Literatura

[1] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц. Москва 1954.

[2] *J. C. Holladay, R. S. Varga*: On powers of non-negative matrices. Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 631–634.

[3] *В. Птак* (V. Pták): Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам. Чех. мат. ж. *8* (83) (1958), 487–495.

[4] *H. Wielandt*: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Zeitschrift *52* (1950), 642–648.

Резюме

О ЧИСЛЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СТЕПЕНЯХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

ЗБЫНЕК ШИДАК, (Zbyněk Šidák), Прага

Пусть $\kappa(A)$ – число положительных элементов в неотрицательной квадратной матрице A. Пусть в дальнейшем A неразложима и примитивна. Показывается на примере (в котором порядок A равен 9 и только одни элементы $a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{36}, a_{37}, a_{38}, a_{46}, a_{47}, a_{48}, a_{56}, a_{57}, a_{58}, a_{69}, a_{79}, a_{89}, a_{91}$ положительны), что $\kappa(A^k)$ не должна быть неубывающей функцией от k. Но если A имеет в главной диагонали не более одного нуля, доказывается, что $\kappa(B) \leqq \leqq \kappa(AB)$ для произвольной неотрицательной B, так что в этом случае $\kappa(A^k)$ неубывающая.

Summary

ON THE NUMBER OF POSITIVE ELEMENTS IN POWERS OF A NON-NEGATIVE MATRIX

Zbyněk Šidák, Praha

Let $\kappa(A)$ be the number of positive elements in a non-negative square matrix A. Let A be irreducible primitive. It is shown by an example (in which A has order 9 and precisely the elements $a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{36}, a_{37}, a_{38}, a_{46}, a_{47}, a_{48}, a_{56}, a_{57}, a_{58}, a_{69}, a_{79}, a_{89}, a_{91}$ are positive) that $\kappa(A^k)$ need not be a non-decreasing function of k. However, if A has at most one zero in its main diagonal, it is proved $\kappa(B) \leqq \leqq \kappa(AB)$ for every non-negative B, so that in this case $\kappa(A^k)$ is non-decreasing.