Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

NEŘEŠENÉ ÚLOHY A PROBLÉMY

Pro naše čtenáře otiskujeme znovu texty úloh a problémů, které byly předloženy k řešení v Časopise pro pěstování matematiky v letech 1954 až 1962 a které nebyly dosud řešeny. Domníváme se, že aspoň některé z nich čtenáře znovu zaujmou. Jsou to úlohy resp. problémy:

Z roč. 79 (1954), str. 163 a 367:

2. Vyšetřete chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n : n^2] \,.\, [(x^n - 1) : (x - 1)] \,.\, x^{n(n-1)/2}$ na kružnici $|x| = 1$ (spojitost limity, stejnoměrnost konvergence). Podobně pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n : (n \,.\, b_n)] \,.\, [(x^{b_n} - 1) : : (x - 1)] \,.\, x^{c_n}$, kde b_n jsou přirozená čísla, $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ a potom pro mocninnou řadu, vzniklou „rozepsáním" této řady. *J. Mařík*

3. Platí věta: Nechť $a_n \to 0$. Pak řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pro každé x, pro něž platí $|x| = 1$ a které je bodem regularity funkce f. Nelze dokázat podobnou větu pro sčítatelnost místo pro konvergenci? (Rozhodněte např. o správnosti této věty: Nechť platí $(a_n/n) \to 0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sčítatelná podle aritmetického středu v každém bodě x ($|x| = 1$), který je jejím bodem regularity.) *J. Mařík*

4. Buď C jednoduchá rovinná křivka konečné délky a D její vnitřek (komplement). Budiž $t_0 \in C$. Utvořme funkci $\vartheta(z, t)$, kde z probíhá množinu D a t množinu $(C - t_0)$ tak, aby $\vartheta(z, t)$ bylo úhlem mezi kladným směrem osy x a vektorem $\overrightarrow{zt}$ a aby funkce ϑ byla spojitá. Budiž $F(z) = \int_C |d_t \vartheta(z, t)|$. (Funkce F je zřejmě spojitá na D a nezávisí na volbě funkce ϑ.) Dokažte (přesně a pokud možno jednoduše) nějakou nutnou a postačující podmínku, aby funkce F byla omezená, (Viz J. RADON, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. 128, Abt. 2a, IIa, 1123; 1919.)

I. Babuška

5. Buď T čtverec. Rozhodněte, zda existuje funkce φ holomorfní na T taková, že platí

$$\iint_T (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, dx \, dy < \infty \,, \tag{1}$$

$$\iint_T (\operatorname{Im} \varphi)^2 \, dx \, dy = \infty \,. \tag{2}$$

Poznámka. Lze dokázat, že platí-li (1), pak je $\iint_T (\operatorname{Im} \varphi)^{2-\varepsilon} \, dx \, dy < \infty$ pro každé $\varepsilon > 0$.

I. Babuška

6. Dá se ukázat (viz např. HORN, Gewöhnliche Diff.-Gleichungen beliebiger Ordnung, 1905. § 72), že řešení dif. rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda y + \sin x}{y} \quad (\lambda > 0),$$

lze v okolí počátku rozvinout v mocninnou řadu. Určete poloměr konvergence těchto řad.

O. Vejvoda

7. Buď $c(x)$ po částech spojitá funkce v $\langle 0, 1 \rangle$. Nazveme řešení problému K vzhledem k funkci $c(x)$ a číslu P funkci $y(x)$ a koeficienty a, b, které splňují rovnici

$$y''(x) + P\,y(x) = ax + b + c(x)$$

a okrajové podmínky $y(0) = y(1) = 0$; $y''(0) = 0$, $y'(1) = 0$. Charakteristickým číslem problému K nazveme číslo P^0 takové, že existuje netriviální řešen íproblému K vzhledem k funkci $c(x) = 0$ a $P = P^0$. Toto řešení nazveme charakteristickou funkcí problému. Prvou charakteristickou funkcí nazveme charakteristickou funkci příslušnou k nejmenšímu charakteristickému číslu P_1^0. Buď M množina všech funkcí $c(x)$ po částech konstantní (s konečným počtem nespojitostí) v $\langle 0, 1 \rangle$ splňující tam vztah $|c(x)| = \varepsilon$. Lze ukázat, že problém K vzhledem ke každému $c(x) \in M$ a $P \neq P^0$ má jediné řešení a při tom $y''(x)$ jest po částech spojitá funkce. Definujme na M funkcionálu F tímto předpisem:

$$F(c(x)) = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} y''(x),$$

kde $y(x)$ jest řešením problému K vzhledem k $c(x)$ [$c(x) \in M$] a $0 < P < P_1^0$. Domnívám se, že funkcionála F má tyto vlastnosti: 1. Existuje funkce $c^*(x) \in M$, pro kterou funkcionála F nabývá svého maxima. 2. Funkce $c^*(x)$ má právě tolik bodů nespojitosti, jako má prvá charakteristická funkce bodů, v nichž platí $y''(x) = 0$. 3. Funkce $c^*(x)$ má skoky právě v těch bodech, ve kterých řešení $y(x)$ problému K vzhledem k $c(x)$ a P splňuje vztah $y''(x + 0) + y''(x - 0) = 0$.

I. Babuška

8. Lze dokázat tuto větu:

Buď $f(x)$ spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$. Označme

$$G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} E_k f(x_k)$$

Gaussovu kvadraturu funkce $f(x)$. Jestliže $f(x)$ má p spojitých derivací a $f^{(p)}(x)$ splňuje Lipschitzovu podmínku s koeficientem α $(0 < \alpha \leqq 1)$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx - G_n(f) \leqq 0\,(1/n^{p+\alpha}) \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,.$$

Rozhodněte, zda tuto větu lze obrátit. (Viz podrobnější text na str. 368.)

I. Babuška

Z roč. 81 (1956), str. 247, 354 a 470:

1. Dokažte bez použití teorie Lebesgueova integrálu tuto větu: Buďte f, g konečné funkce v intervalu $(0, 1)$; funkce g nechť je spojitá, funkce f nechť má primitivní funkci a nechť je nezáporná. Potom funkce $f \,.\, g$ má primitivní funkci. Poznámka: Z vět o Lebesgueově integrálu plyne naše tvrzení ihned takto: Pro každé $x \in (0, 1)$ existuje Lebesgueův integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,g(t)\,dt = H(x)$ a platí (jak se snadno zjistí) $H'(x) = f(x)\,g(x)$.

J. Mařík

2. Dokažte elementárními prostředky, že platí tato věta: Nechť funkce f má (vlastní) Riemannův integrál v intervalu $\langle c, d\rangle$. Nechť funkce φ má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $c \leqq \varphi(t) \leqq d$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Potom existuje Riemannův integrál $\int_b^a f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ a rovná se $\int_{\varphi)a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$. Poznámka: Důkaz lze provést dosti jednoduše pomocí některých ne zcela triviálních vět z theorie reálných funkcí.

J. Mařík

3. Rozhodněte, zda platí tato věta: Buďte G, H otevřené konvexní množiny v obyčejném trojrozměrném (event. n-rozměrném) prostoru. Množina H buď omezená a nechť $\overline{H} \subset G$. Nechť funkce f má omezené spojité (resp. omezené) derivace prvního řádu na množině $G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \overline{H}$). Poznámka: Z názoru se zdá být jasné, že funkci f lze spojitě rozšířit na hranici množiny H; odtud by stejnoměrná spojitost snadno vyplynula.

J. Mařík

4. Nechť F je distribuční funkce (tj. neklesají zprava spojitá funkce na $(-\infty, +\infty)$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$), nechť $\int x\, dF(x) = 0$, $\int x^2\, dF(x) = 1$. Definujme posloupnost distribučních funkcí $F_1, F_2, \ldots$ takto: $F_1 = F$ a $F_n(x/\sqrt{2}) = \int F_{n-1}(x - z)\, dF_{n-1}(z)$. Položme $\varepsilon_n = \sup |F_n(x) - \Phi(x)|$, $x \in (-\infty, +\infty)$, kde $\Phi(x) = [1/\sqrt{(2\pi)}] \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$. Je známo z počtu pravděpodobnosti, že $\varepsilon_n \to 0$ a pro některá speciální F jsou známy i bližší odhady čísel ε_n (viz FELLER: On the Normal Approximations to the Binomial Distribution, Annals of Mathematical Statistics, vol. *16* (1945), pp. 319—329). Protože pro mnohé důležité funkce F jsou tabelovány funkce F_n (a je tedy možné určit ε_n) pro některá n, bylo by zajímavé blíže studovat povahu konvergence ε_n k nule; zejména ukázat, za jakých předpokladů $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \ldots$. (Viz též autorovu poznámku na str. 248.)

V. Fabian

5. Hledejme řešení rovnice $dx/dt = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ splňující podmínku $x(0) = 0$ ve tvaru mocninné řady $x(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ a označme r_n poloměr konvergence této řady. Snadno vypočteme, že poloměr konvergence řešení $y(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots$ rovnice $dy/dt = 1 + y + y^2 + \ldots$ je $\frac{1}{2}$. Platí: $\infty = r_1 > r_2 \geqq r_3 \geqq \ldots \geqq \frac{1}{2}$. Stanovte $\lim r_n$ (platí $\lim r_n = \frac{1}{2}$?) a nalezněte asymptotický vzorec pro r_n.

J. Kurzweil

6. Nech R je teleso racionálnych čísel, nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú reálne čísla a nech $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ je teleso, ktoré vznikne z telesa racionálnych čísel adjunkciou čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Či existuje taká postupnosť reálnych čísel $\{\lambda_n\}$, $n = 1, \ldots, \infty$, a taký konečný počet čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ vlastnou podmnožinou

$$R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \quad \text{a} \quad R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subset R(\mu_1, \ldots, \mu_r)\,.$$

L. Mišík

10. Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď f spojitá funkce na množině G, která je otevřená v m-rozměrném kartézském prostoru E_m. Nechť ke každému $s \in G$ existuje uzavřená koule K o středu s tak, že $K \subset G$ a že $\int_K f(x)\, dx = \int_K f(s)\, dx\ (= f(s)\,.\,V$, kde V je objem koule K). Potom je funkce f harmonická na množině G. (Viz též autorovu poznámku na str. 470.)

J. Mařík

Z roč. 82 (1957), str. 100, 365 a 454:

1. Rozhodněte, zda každá nespočetná část E_m (resp. E_1) obsahuje řídkou nespočetnou část.

J. Mařík

3. Je známo, že existují ordinální typy ξ té vlastnosti, že platí $\xi = \xi^n$ pro každé $n \geqq 1$; podobně existují ordinální typy ξ, pro něž ξ^n je různé od $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$ pro každé n. Rozhodněte, zda existuje ordinální typ ξ tak, že platí např. $\xi = \xi^3 + \xi^2$, nebo obecněji $\xi = \xi^n$, $n \geqq 3$, při čemž $\xi^i \neq \xi$ pro $i = 2, \ldots, n-1$. (Viz též autorovu poznámku a literaturu na str. 100–101.) Speciální případ tohoto problému položil W. SIERPIŃSKI v knize „Cardinal and ordinal numbers". Warszawa 1958, str. 232.

K. Karták

5. Buď G otevřená množina v m-rozměrném Euklidově prostoru E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Je-li funkce F spojitá na $G \cup H$, harmonická na G a rovna f na H, nazveme funkci F řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G. Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom ke každé nezáporné omezené spojité funkci na množině H existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

J. Mařík

6. Rozhodněte, zda platí: Čtyřstěn $ABCD$ je (až na čtyřstěny shodné) jednoznačně určen:

a) velikostmi hran AB, BC, CD a vnitřních úhlů stěn $B(AC)D$, $D(BC)A$, $A(BD)C$;

b) velikostmi hran AB, BC, CD, DA a vnitřních úhlů stěn $A(BD)C$, $B(AC)D$;

c) velikostmi hran AB, CD a vnitřních úhlů stěn $A(BD)C$, $C(AD)B$, $B(AC)D$, $D(BC)A$.

M. Fiedler

7. Nechť M, N jsou úplně uspořádané množiny. Pišme $M \underset{1}{>} N$, jestliže existuje isotonní zobrazení množiny M na množinu N, a pišme $M \underset{2}{>} N$, jestliže existuje podmnožina $M' \subset M$ podobná množině N. Pomocí axiomu výběru lze dokázat, že platí

(1) $$M \underset{1}{>} N \Rightarrow M \underset{2}{>} N \text{ pro každé } M, N\,.$$

Má-li množina M příp. N ordiální typ λ příp. η, potom, jak ukázal M. SEKANINA, obrácení implikace (1) neplatí. Má-li však množina M příp. N např. ordinální typ: a) $\omega\, 2$ příp. ω, b) $(\omega^*)\, 2$ příp. ω^*, c) $(\omega^*)\, 2 + \omega\, 2$ příp. $\omega^* + \omega$, snadno se dokáže, že obrácení implikace (1) platí.

a) Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro ordinální typy množin M, N, aby platilo obrácení implikace (1)? Pro dobře uspořádané množiny M, N platí

(2) $$M \underset{2}{>} N\,, \quad N \underset{2}{>} M \Rightarrow M \cong N\,,$$

ale existují M, N takové, že (2) neplatí.

b) Pro jaké ordinální typy množin M, N platí implikace (2)? Z (1) a (2) plyne, že pro dobře uspořádané množiny M, N platí

(3) $$M \underset{1}{>} N\,, \quad N \underset{1}{>} M \Rightarrow M \cong N\,,$$

ale existují M, N takové, že (3) neplatí.

c) Pro jaké ordinální typy množin M, N platí implikace (3)?

K. Čulík

8. V článku „K teorii vícerozměrného integrálu", Čas. pro pěst. matem. *80* (1955), 400–414 dokázal jsem tuto větu: Buď Q dvourozměrný interval, $a \in Q$. Nechť existuje vlastní limita $\lim \int_{Q-I} f(x, y)\, dx\, dy = A$, kde $I \to a$, $a \in \operatorname{int} I$. Potom existuje též $\int_Q f(x, y)\, dx\, dy$ a rovná se A (je míněn Perronův integrál).

Rozumíme-li nyní objemem konečnou nezápornou aditivní funkci intervalu, můžeme v podstatě stejným způsobem dokázat podobnou větu i pro integrály podle objemu, který je součinem jednorozměrných spojitých objemů. Rozhodněte, zda platí taková věta i pro případ objemu V, slabě spojitého v bodě a (tj. $\lim V(I) = 0$ pro $I \to a$).

K. Karták

9. Najděte nějakou (dosti obecnou) postačující podmínku k tomu, aby k dané funkci f existovala primitivní funkce. (Nutnou podmínkou je např., aby funkce f byla funkcí 1. Baireovy třídy a aby v každém intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nabývala každé hodnoty mezi $f(\alpha)$ a $f(\beta)$.)

Poznámka autora: Problém položil jako první patrně N. N. LUZIN; viz Интеграл и тригонометрический ряд, Москва-Ленинград, str. 381, problém 40. — Bohatá literatura se najde v článku Z. ZAHORSKI: Sur la première dérivée, TAMS 69 (1950), 1—54. — Nutné a postačující podmínky udává C. J. NEUGEBAUER: Darboux functions of Baire class one and derivates, Proc. AMS 13 (1962), 838—843.

K. Karták

10. Buď $\mathfrak{M}$ nespočetný systém částí intervalu $\langle 0, 1\rangle$, z nichž každá má kladnou vnější míru. Rozhodněte, zda existuje bod $x \in \langle 0, 1\rangle$, který leží v nekonečně mnoha množinách ze systému $\mathfrak{M}$. (K tomu viz autorovu poznámku na str. 455.)

J. Mařík

11. Jest charakterisovat (a na příkladech ilustrovat) všechna uspořádaná komutativní algebraická tzv. *logaritmická tělesa*, tj. taková tělesa, která stejně jako těleso reálných čísel mají aditivní grupu všech prvků isomorfní a podobnou s multiplikativní grupou všech kladných prvků.

L. Rieger

12. Budiž G Abelova lokálně kompaktní topologická grupa s invariantní (Haarovou) mírou. Grupovým okruhem $\mathfrak{R}_G$ se pak rozumí okruh všech komplexních, měřitelných a absolutně integrovatelných funkcí f definovaných na G při následujících definicích sčítání a násobení:

$$f + g = h \quad \text{značí} \quad f(x) + g(x) = h(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in G\,,$$

$$f \,.\, g = h \quad \text{značí} \quad h(x) = \int_G f(x - y)\, g(y)\, \mathrm{d}y \quad \text{pro každé} \quad x \in G\,.$$

Tento okruh $\mathfrak{R}_G$ je dokonce normovaným okruhem při normě $\|f\| = \int_G |f(x)|\, \mathrm{d}x$ (viz Гельфанд И. И., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированние кольца, Успехи мат. наук *1:2* (12), 1946, 48—148).

Uvažme podokruh $\mathfrak{R}_G^*$ okruhu $\mathfrak{R}_G$ těch funkcí $f^* \in \mathfrak{R}_G$, které jsou mimo jistou kompaktní množinu $\mathfrak{M}_{f^*} \subseteqq G$ (tzv. kompaktní nosič funkcí f^*) identicky rovny 0. Otázka zní:

Kdy $\mathfrak{R}_G^*$ má a kdy nemá dělitele nuly? (K tomu viz autorovu poznámku na str. 456.)

L. Rieger

13. Nechť $k \geqq d$ jsou daná přirozená čísla a nechť posloupnost celých čísel d_i, $i = 1, 2, \ldots$ je definována podmínkami $d_1 = d$, $0 < d_{i+1} < d_i$ a $k = n_i d_i + d_{i+1}$, kde n_i je vhodné přirozené číslo. Pak poslední definované číslo je d_p, kde $p \geqq 1$, pro něž platí $d_p \mid k$.

a) Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby $d_p = 1$.

b) Udejte hodnotu čísla d_p v závislosti na k, d.

c) Udejte nutné a postačující podmínky pro k a d, aby $p = r$, kde r je předem dané přirozené číslo.

K. Čulík

14. Incidenční maticí se rozumí matice vytvořená z nul a jedniček. O dvou incidenčních maticích téhož typu řekneme, že jsou silně ekvivalentní, jestliže jednu lze vytvořit z druhé vhodnou výměnou jejích řádků mezi sebou a sloupců mezi sebou.

Nechť m/n je předepsaný typ incidenční matice (tj. m příp. n udává počet jejích řádků příp. sloupců).

a) Určete počet $\varphi_1(m/n)$ incidenčních matic typu m/n, které (I) nejsou silně ekvivalentní, (II) nejsou přímým součtem dvou incidenčních matic a (III) nemají žádné dva řádky ani žádné dva sloupce stejné.

b) Určete počet $\varphi_2(m/n)$ příp. $\varphi_3(m/n)$ příp. $\varphi_4(m/n)$ incidenčních matic typu m/n, které splňují (I), příp. (I) a (II), příp. (I) a (III).

c) Najděte vztahy mezi funkcemi $\varphi_i(m/n)$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. (Viz podrobnější text na str. 456 až 457.)

K. Čulík

Z roč. 83 (1958), str. 355 a 466:

4. Označme $M_h(n)$ množinu všech reálných čtvercových n-řádkových matic hodnosti h, $P_h(n)$ množinu všech symetrických nezáporně definitních matic z $M_h(n)$, $O(n)$ množinu všech ortogonálních matic z $M_n(n)$. Dále definujme pro reálnou matici $A = (a_{ij})$ matici sgn A = (sgn a_{ij}).

Najděte množiny všech matic s prvky 0, 1 a -1, které vzniknou jako matice sgn A pro a) $A \in M_h(n)$, b) $A \in P_h(n)$, c) $A \in O(n)$.

M. Fiedler

6. V n-rozměrném eukleidovském prostoru nechť jsou dány jednotkové vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vytvářející m-rozměrný podprostor, kde $m < \frac{1}{2}(n-1)$. Jest dokázat, že existují reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že charakteristická čísla $g_1, g_2, \ldots, g_n$ Gramovy matice vektorů $c_1\mathbf{a}_1, c_2\mathbf{a}_2, \ldots, c_n\mathbf{a}_n$ splňují podmínku $g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

V. Havel

7. V n-rozměrném eukleidovském prostoru nechť jsou dány posloupnosti bodů $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{m+2}$, $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{n+2}$, kde body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ vytvořují m-rozměrný podprostor a body $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ vytvořují celý prostor. Jest nalézti podmínku pro to, aby posloupnost $\mathfrak{A}$ byla středovým nebo paralelním průmětem posloupnosti $\mathfrak{B}' = \{B_i'\}_{i=1}^{n+2}$ shodné s $\mathfrak{B}$ (podrobněji: aby bod A_1 byl průmětem bodu B_1', bod A_2 průmětem bodu B_2' atd.). Jest řešit obdobný problém, při němž poslední body A_{n+2}, B_{n+2}, B_{n+2}' jsou nahrazeny přímkami.

V. Havel

Z roč. 84 (1959), str. 198 a 374:

2. V dané rovině ϱ mějme vlastní bod F a nevlastní bod G. Jednoduché kuželosečky, jdoucí body F a G, nazveme „připustnými". Jestliže orientovaný oblouk na připustné kuželosečce neobsahuje nevlastní bod různý od G, pak jej prohlásíme též za „připustný". Mějme nyní tři připustné oblouky $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$, které leží na vzájemně různých připustných kuželosečkách a které vycházejí z téhož bodu. Existují potom vzájemně kolmé vektory $\mathfrak{q}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ téže délky a hyperbolická kongruence $\mathfrak{K}$ o ohniskovém bodu F a nevlastní ohniskové přímce jdoucí bodem G tak, že $\mathfrak{K}$-obrazem vektorů $\mathfrak{q}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ jsou oblouky $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$? Lze otázku upravit i tehdy, když hyperbolická kongruence $\mathfrak{K}$ je nahrazena parabolickou? (Podrobnější autorovo vysvětlení viz na str. 198.)

V. Havel

3. Nechť je dán systém ekvivalentních množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n}$ pro $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$ ($B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$), kde $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ jsou libovolné mohutnosti. Transmutace (tj. prostá zobrazení) množiny B_i na B_j označujme φ_{ij}. Udejte nutné a postačující podmínky na typ nedisjunktnosti množin B_i, aby existoval transmutační Brandtův grupoid daného systému množin, který má hodnost $\mathfrak{m}$ a který je vytvořen transmutacemi splňujícími podmínku $\varphi_{ij}(x) = x$ pro $x \in B_i \cap B_j$. (Podrobnější text viz str. 199.)

K. Čulík

5. Buďte P, Q spojité funkce ve čtverci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Nechť pro všechna $[x, y] \in (0, 1) \times \times (0, 1)$ existují konečné derivace $\partial Q(x, y)/\partial x$, $\partial P(x, y)/\partial y$ a jsou si rovny. Rozhodněte, zda potom platí

$$(*) \qquad \int_0^1 (P(x, 1) - P(x, 0))\, dx = \int_0^1 (Q(1, y) - Q(0, y))\, dy\,.$$

Poznámka. V práci Г. П. Толстов: О криволинейном и повторном интеграле, Труды мат. инст. В. А. Стеклова, *XXXV*, М.-Л. 1950, je dokázáno, že (*) platí, jestliže existují též konečné derivace $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$.

J. Mařík

Z roč. 85 (1960), str. 92 a 465:

1. Je dán konečný, neorientovaný graf (V, E) bez smyček, jehož každé dva různé uzly jsou spojeny právě jednou hranou (tj. je to úplný graf) a kladná, reálná funkce φ definovaná na množině E tzv. ohodnocení grafu (V, E) (V příp. E značí množinu všech uzlů příp. hran grafu (V, E)). Najděte souvislý subgraf daného grafu, tvaru (V, A), jehož každá hrana leží alespoň na jedné kružnici a při tom výraz $\sum_{h \in A} \varphi(h)$ je minimální. Uvažujte zejména případ, když φ je tzv. ostrým ohodnocením, tj. splňuje podmínku $h', h'' \in E$, $\varphi(h') = \varphi(h'') \Rightarrow h' = h''$. (Viz též aplikaci této úlohy na str. 92.)

K. Čulík

2. Rozhodněte, zda každé liché přirozené číslo m je možno vyjádřit ve tvaru $x - \varphi(x)$, kde x je vhodné přirozené číslo a φ je známá Eulerova číselně-teoretická funkce. (Viz též autorovu poznámku na str. 92 a 465.)

J. Sedláček

3. Určete počet vnitřních bodů pravidelného n-úhelníka, z nichž každý leží alespoň na třech úhlopříčkách tohoto n-úhelníka.

J. Sedláček

5. Řekneme, že grupa má vlastnost (V), jestliže každý její systém generátorů obsahuje ireducibilní systém generátorů (celé grupy). Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Nechť Abelova grupa G je konečným direktním součtem p-primárních elementárních grup G_p (tj. řád každého nenulového prvku z G_p je roven p). Potom G má vlastnost (V). (Viz též autorovu poznámku na str. 465.)

V. Dlab

Z roč. 86 (1961), str. 111, 233 a 374:

2. Nechť $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou takové vektory v euklidovském prostoru E, že $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \geqq 0$ pro $i, j = 1, \ldots, n$. Existuje pak euklidovský prostor $E' \supset E$ tak, že $\mathbf{a}_i$ jsou vesměs v jednom (zobecněném) uzavřeném oktantu prostoru E'? V maticovém tvaru lze úlohu formulovat takto: Existuje ke každé nezáporně definitní a zároveň nezáporné matici P nezáporná matice (ne nutně čtvercová) A tak, že $P = AA'$, kde A' je matice transponovaná k A.

M. Fiedler

3. Nech je dané kladné číslo A a číslo α, $0 < \alpha < 1$. Rozhodníte, či platia pre každé $x \in (0, 1)$ nerovnosti

$$\frac{A}{2(1 + n)^{1+\alpha}} < x + K - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2(n + 1)}$$

pre nekonečne mnoho n, kde $K = [\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + 1/n]$ je celá časť z $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + 1/n)$.

I. Singer

4. Nech pre k prirodzené značí E_k k-rozmerný eukleidovský priestor, L_k k-rozmernú (vonkajšiu) Lebesgueovu mieru. Nech sú k, n prirodzené čísla, $k \leqq n$. Nech $\mathbf{A}$ je systém k-rozmerných lineárnych podpriestorov E_n. Pre $A \subset E_n$ položme

$$\delta_k(A) = \sup_{B \in \mathbf{A}} L_k(A \cap B) .$$

Nech je $\mathbf{B}$ systém všetkých gúľ, $\mathbf{C}$ systém všetkých kvádrov v E_n. Pre $A \subset E_n$, $\varepsilon > 0$ položme ďalej

$$F_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_1(A_i)^k , \quad G_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_1(B_i)^k ,$$

$$H_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_k(A_i) , \quad K_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_k(B_i) ,$$

kde infimum počítame cez všetky $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$, $A_i \in \mathbf{B}$, $\delta_1(A_i) < \varepsilon$, resp. všetky $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$, $B_i \in \mathbf{C}$, $\delta_1(B_i) < \varepsilon$. Napokon

$$F_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F_k(A, \varepsilon) , \quad G_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} G_k(A, \varepsilon) ,$$

$$H_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_k(A, \varepsilon) , \quad K_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} K_k(A, \varepsilon) .$$

Rozhodnite, či platí $F_k = G_k$, $H_k = K_k$. (Viz též autorovu poznámku na str. 234.)

B. Riečan

6. Nech k, n sú prirodzené čísla, $k \leqq n$, E_n n-rozmerný eukleidovský priestor. Označme $F_k(A)$ k-rozmernú Favardovu mieru analytickej množiny A (C. R. Acad. Sci. Paris *194* (1932), 344, tiež Trans. Amer. Math. Soc. *62* (1947), 536).

Rozhodnite, či F_k je k-rozmernou mierou v zmysle Kolmogorova (Math. Ann. *107* (1933), 351). V akom vzťahu je F_k k minimálnej resp. maximálnej miere Kolmogorova (tam 356, resp. 354). Poznámka. Ak pre minimálnu mieru $\mu_k(A)$ platí $\mu_k(A) = 0$, potom $F_k(A) = 0$.

B. Riečan

7. Nech H_k je k-rozmerná Hausdorffova miera definovaná na systéme všetkých podmnožín E_n ($k \leqq n$). Platí tato veta: Ak dim $A = k$, potom A je homeomorfná množine $Y \subset E_{2k+1}$ takej, že $H_{k+1}(Y) = 0$.

Rozhodnite, či platí uvedená veta pre vonkajšiu mieru indukovanú maximálnou mierou Kolmogorova (Math. Ann. *107* (1933), 354).

B. Riečan

Z roč. 87 (1962), str. 99:

1. Nechť k je jednoduchá rovinná křivka daná parametrickým vyjádřením $x = f(t)$, $y = g(t)$, kde f a g jsou funkce třídy C^3 a t probíhá nějaký interval v množině reálných čísel. Nechť pro každou trojbodovou množinu $M \subset k$ existuje rozklad R na k takový, že $M \in R$ a každé $X \in R$ je shodné s M. Potom k je přímka. Je otázka, zda je nutno brát funkce třídy C^3 a zda je nutný předpoklad $M \in R$. (Bez tohoto předpokladu totiž plyne bezprostředně jen to, že k je přímka nebo polopřímka.) (K tomu viz autorovo vysvětlení na str. 99.)

M. Sekanina

*

Ostatní úlohy a problémy otištěné v Časopise pro pěstování matematiky (roč. 79—87) byly řešeny:

1 (roč. 79, str. 163), *J. Mařík*; řešení poslal *M. Hlaváček* (roč. 79, str. 369).

7 (roč. 81, str. 470), *I. Černý*; řešil *J. Mařík* (roč. 82, str. 454).

8 (roč. 81, str. 470), *M. Fiedler*; řešil *O. Hájek* (roč. 82, str. 229).

9 (roč. 81, str. 470), *J. Mařík*; řešil *B. Pondělíček*, nezávisle *M. Dostál* (roč. 83, 236—241) a *J. Bečvář* (roč. 83, str. 467).

2 (roč. 82, str. 100), *J. Mařík*; řešil *J. Král* (roč. 85, str. 205).

4 (roč. 82, str. 229), *M. Fiedler*; zčásti řešil *B. Míšek* (roč. 83, str. 101).

1 (roč. 83, str. 101), *J. Sedláček*; řešil *A. Pultr* (roč. 83, str. 355) a nezávisle *B. Míšek* a *M. Kadlec*.

2 (roč. 83, str. 101), *M. Fiedler*, řešil *L. Dantzer* a *B. Grünbaum* (v jiné souvislosti) v Math. Z. *79* (1962), 95—99.

3 (roč. 83, str. 355), *K. Karták*; na řešení upozornil *M. Novotný* (roč. 84, str. 105).

5 (roč. 83, str. 466), *J. Babuška*; úloha byla rozřešena v článku: *J. Babuška* a *M. Fiedler*. Über Systeme linearer Gleichungen vom Typ der Rahmentragwerke, Aplikace mat. *4* (1959), 441—455.

1 (roč. 84, str. 105), *J. Mařík*; řešil *J. Jakubík* (roč. 84, str. 374).

1 a 4 (roč. 84, str. 105 a 374), *J. Mařík*; řešil *J. Hejcman* (roč. 85, str. 206).

4. (roč. 85, str. 465), *J. Sedláček*; řešil *B. Zelinka* (roč. 86, str. 234). Jiné řešení podal *B. Míšek*.

1 (roč. 86, str. 111), *A. Kotzig*; úloha byla řešena v článku: *B. Míšek*, O jisté úloze z variačního počtu, roč. *87* (1962), 359—366.

5 (roč. 86, str. 233), *J. Holubář*; řešil *B. Zelinka*, nezávisle *B. Míšek* a *E. Kasková*.

Celkem bylo v roč. 79—97 našeho časopisu otištěno 57 úloh resp. problémů; z nichž bylo řešeno 15, takže zůstává dosud neřešených 42.

Redakce