Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

RECENSE

J. Favard: COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, tome III; Théorie des équations, fascicule I; Équations différentielles. Cahiers scientifiques, fascicule 26, vydal Gauthier-Villars, Paris 1962, str. 294, obr. 11, cena 45 NF.

Tato učebnice navazuje na svazky I. Introduction. Opérations (1960) a II. Représentations. Fonctions analytiques (1960) od téhož autora a jsou v ní v pěti kapitolách vyloženy základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

V první kapitole jsou zavedeny základní pojmy a předveden elementární způsob řešení běžných typů diferenciálních rovnic s některými geometrickými aplikacemi. Tato část obsahuje též základní věty z teorie lineárních diferenciálních rovnic, které umožňují řešení diferenciální rovnice n-tého řádu a systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. V prvním případě užívá autor k integraci methody Heavisidovy, v druhém Peano-Bakerovy resolventy.

Druhá kapitola se zabývá otázkami existence a jednoznačnosti řešení systému diferenciálních rovnic, závislostí řešení na počátečních podmínkách a parametrech, stabilitou a nestabilitou nulového řešení ve smyslu Ljapunova. Dále následují odstavce o prvých integrálech, multiplikátorech, Adamsově metodě numerického řešení systému diferenciálních rovnic a o rovnicích a systémech v totálních diferenciálech a jejich úplné integrabilitě.

První dva odstavce třetí kapitoly jsou věnovány řešení okrajové úlohy pro nelineární rovnice 2. řádu, když jsou předepsány hodnoty řešení v koncových bodech intervalu, a Sturm-Liouvilleovu problému. Zbývající část kapitoly obsahuje základní poznatky o autonomních systémech, přičemž je věnována pozornost zejména rovinnému případu; v závěru kapitoly je vyšetřován periodický systém $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = f(t, p), f(t + \omega, p) = f(t, p)$, kde f je vektorová funkce v p vektor dimense n.

Poslední dvě kapitoly, čtvrtá a pátá, jsou věnovány teorii diferenciálních rovnic v komplexním oboru: je zkoumána existence a jednoznačnost řešení v třídě analytických funkcí, závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech, singularity rovnice 2. řádu s pevnými kritickými body, rovnice Painlevéova, singulární řešení. Konečně následuje Fuchsova teorie, aplikovaná zejména na diferenciální rovnice 2. řádu s dvěma nebo třemi regulárními singularitami. Tím je kniha uzavřena.

Ke každé kapitole jsou připojeny příklady a doplňky, které do značné míry prohlubují vyloženou látku. Příklady mají teoretický charakter a je k nim většinou připojen návod k řešení.

Kniha je psána výstižným slohem a poměrně dost zhuštěně; autor užívá vektorové symboliky. Předpokládá se znalost obou předcházejících svazků, jak svědčí poměrně časté odkazy v důkazech, takže samotná kniha jako učebnice diferenciálních rovnic není příliš vhodná. V uspořádání látky nepůsobí kniha jako jednolitý celek, neboť zařazení jednotlivých odstavců není příliš vhodné. Tak např. odstavec o přibližném řešení systému diferenciálních rovnic je vsunut mezi odstavce o rovnicích a systémech rovnic v totálních diferenciálech; okrajové problémy jsou v jedné kapitole se systémy autonomními a systémy periodickými. Nedostatkem knihy je také okolnost, že v ní není uvedena žádná literatura, třebaže v některých partiích byl autor velmi stručný (Sturm-Liouvilleův problém, stabilita řešení) a omezil se jen na nejzákladnější věci.

Graficky působí kniha příznivě, třebaže je v ní řada tiskových chyb (celkem nepodstatných), které si pozorný čtenář snadno opraví sám. *Miloš Ráb*, Brno

Joseph Miller Thomas: SYSTEMS AND ROOTS. The William Byrd Press, Inc., Richmond, Virginia 1962, 124 stran, cena váz. výt. $ 5.—.

Kniha profesora Thomase vznikla přepracováním dřívějšího spisu „Differential systems", vyšlého v knižnici Colloqium Series Am. Math. Soc. v r. 1937. Jde o teorii řešení systémů algebraických, resp. diferenciálních rovnic. Způsob výkladu je — ve shodě s autorovým věhlasem — originální, neobvykle zhuštěný a úsporný, takže kniha o poměrně malém počtu stran je obsahem velmi bohatá a zasahuje až do současného stavu ve vytčeném tématu. Pro úvodní studium se kniha nezdá být vhodná, poslouží spíše specialistům, zájemcům o hraniční otázky algebry, diferenciálních rovnic a diferenciální geometrie.

Názvy jednotlivých kapitol: 1. Preliminárie. 2. Některé lineární systémy. 4. Riquierův existenční teorém. 5. Algebraické diferenciální systémy. 6. Redukce na pasivní tvar. 7. Grassmanova algebra. 8. Diferenciální okruhy. 9. Pfaffovy systémy.

V první kapitole je vyložen způsob autorovy úsporné symboliky, jsou zde zavedeny pojmy potřebné pro další výklad. — Druhá kapitola jedná o lineárních diofantických systémech, o nerovnostech mezi monomy (tvaru $x_1^{i} \dots x_n^{i_n} u_j$), o konsistenci systémů takových nerovností, jejich ekvivalenci se systémy lineárních nerovností atd. — Třetí kapitola je věnována systémům algebraických rovnic či nerovností. Jsou odvozeny formule pro redukci daného systému na systémy jednodušší povahy, je zařazen odstavec o Sylvestrově eliminaci pro pár rovnic $a_0u^3 + a_1u^2 + a_2u + a_3 = f$, $b_0u^2 + b_1u + b_2 = g$ a dále je vyložena teorie resultant systému určeného dvěma polynomy o jedné neznámé; jsou studovány problémy existence reálných resp. komplexních kořenů. Kapitola končí výkladem o aproximaci kořenů daného systému. — Čtvrtá kapitola je věnována systémům diferenciálních rovnic. Nejprve je definován pojem kanonického systému diferenciálních rovnic a vytýčen existenční problém pro analytická řešení systému (stanovení formálních Maclaurinových řad pro neznámé funkce, ověření konvergence těchto řad, nalezení podmínek pro to, aby šlo vskutku o řešení resp. popis řešení), načež je tento problém řešen. Je definován pojem pasivního a ortonomického systému a dokázána existenční věta (Riquierova) o tom, že u pasivního, popř. ortonomického systému je počátečními podmínkami určeno jediné řešení. Jsou uvedeny konkrétní příklady. Závěrem jsou studovány tzv. regulární systémy (jejich speciálními případy jsou systémy Cauchy-Kowalevské, totální systémy a Koenigovy systémy). — V páté kapitole jsou uvedeny v souvislost výsledky obou předchozích kapitol, šestá kapitola je věnována otázkám převodu daného diferenciálního systému na systém pasivní. — V sedmé kapitole je definován Grassmanův okruh dimense r, studováno vnější násobení, derivování a faktorizace forem (též na kanonický tvar). — V předposlední, osmé kapitole je definován vnější diferenciál elementu z Grassmanova okruhu, uvedena souvislost s totálním diferenciálem a transformací souřadnic a studovány základní vlastnosti Pfaffových forem. — V závěrečné, deváté kapitole je pak studován systém Pfaffových forem (existenční teorém, uvedení klasických výsledků, Cartanovy teorie a novějších výsledků, kanonický tvar Pfaffovy formy, lineární Pfaffovy systémy). — Kniha končí pečlivým výběrem literatury (152 prací) a rejstříkem.

Václav Havel, Brno

Kiyoshi Noshiro: CLUSTER SETS. Springer-Verlag; Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 28. Str. 136, cena DM 36,—.

Recensovaná kniha se zabývá hraničním chováním analytických funkcí. Jde tu o užití metod moderních partií matematiky, zejména topologie, teorie míry a teorie bodových množin, ke studiu klasických úloh teorie analytických funkcí a o dalekosáhlé zobecnění těchto úloh.

Teorie vychází na jedné straně z klasické FATOUOVY disertace a z prací N. N. LUZINA, I. I. PRIVALOVA, F. a M. RIESZE a na druhé straně z prací P. PAINLEVÉ, F. IVERSENA, W. GROSSE a E. LINDELÖFA.

První kapitola knihy je věnována definicím a předběžným poznámkám. Základními pojmy jsou tu (D je libovolná oblast s hranicí Γ, z_0 bod na Γ, $f(z)$ nekonstantní meromorfní funkce v D).

1. Množina hraničních hodnot (cluster set) $C_D(f, z_0)$. $\alpha \in C_D(f, z_0)$, existuje-li posloupnost bodů $z_n \in D$, $z_n \to z_0, f(z_n) \to \alpha$.

2. Množina opakujících se hodnot (range of values) $R_D(f, z_0)$. $\alpha \in R_D(f, z_0)$, existuje-li posloupnost bodů $z_n \in D$, $z_n \to z_0, f(z_n) = \alpha$.

3. Množina asymptotických hodnot (asymptotic set) $A_D(f, z_0)$. Budiž z_0 přístupný bod Γ. Komplexní číslo α se nazývá asymptotickou hodnotou funkce $w = f(z)$ v bodě z_0, platí-li $f(z) \to \alpha$, blíží-li se z k z_0 po Jordanově oblouku, jehož konec je bod z_0 a jehož ostatní body leží v D.

Je-li $w = f(z)$ meromorfní v mezikruží $D = \{z; 0 < |z - z_0| < r\}$ a má-li v bodě z_0 podstatnou singularitu, můžeme známé klasické věty formulovat v termínech teorie hraničních hodnot takto:

(1) $C_D(f, z_0)$ je celá w-rovina (Weierstrass),

(2) $R'_D(f, z_0)$ obsahuje nejvýše dva body (Picard),[1])

(3) $R'_D(f, z_0) \subset A_D(f, z_0)$ (Iversen), tj. každá hodnota, ,,výjimečná" v Picardově smyslu, je asymptotickou hodnotou $f(z)$.

Tyto klasické výsledky (a řada dalších výsledků Iversena a Grosse) jsou v druhé kapitole zobecněny na funkce f meromorfní v oblasti $D \setminus E$, kde D je libovolná oblast w-roviny, $E \subset D$ kompaktní množina, v jejímž každém bodě má f podstatnou singularitu, za toho předpokladu, že E je kapacity (resp. analytické kapacity) nula. Kapitola je uzavřena souborem vět, pocházejících od M. HERVÉ.

Nejrozsáhlejší třetí kapitola je věnována zkoumání funkcí meromorfních v jednotkovém kruhu. Skládá se ze čtyř částí, z nichž každá tvoří uzavřený celek. V první části kapitoly jsou studovány funkce třídy (U) v Seidelově smyslu, tj. třídy omezených holomorfních funkcí v jednotkovém kruhu, jež mají skoro všude na jednotkové kružnici radiální hraniční hodnotu rovnou jedné. Známé starší výsledky jsou dokázány a zobecněny pomocí elegantní metody, pocházející od autora knihy.

Obsahem druhé části je důkaz fundamentálních vět ,,ve velkém" a ,,v malém", jež dokázali E. F. COLLINGWOOD a M. L. CARTWRIGHT. Jde tu o hluboké zobecnění Iversenovy věty (3), tj. o rozbor vztahu mezi $C(f)$, $R(f)$, $A(f)$. V případě věty ,,ve velkém" jde o chování $f(z)$ v blízkosti jednotkové kružnice a nikoliv o chování v blízkosti jednotlivého bodu hranice. Proto definice $C(f)$, $R(f)$, $A(f)$ je odlišná od definic 1, 2, 3 : $\alpha \in C(f)$ $(R(f))$, jestliže existuje bod z_0, $|z_0| = 1$, tak, že $\alpha \in C(f, z_0)$ $(R(f, z_0))$. $\alpha \in A(f)$, jestliže existuje spojitá křivka $z = z(t)$, $0 < t < 1$, $|z(t)| < 1$, $\lim\limits_{t \to 1} |z(t)| = 1$ a $\lim\limits_{t \to 1} f(z(t)) = \alpha$. Věta ,,ve velkém" se pak formuluje takto: $H(R(f)) \cup H(C(f)) = \overline{R'(f)} \cap C(f) \subset \overline{A(f)}$.[2]) Je-li navíc $A(f)$ lineární míry nula, platí $R'(f) \subset A(f)$.

Poznamenejme, že $C(f)$, vždy kontinuum, jež se může redukovat na jediný bod. Avšak kontinuum, skládající se z kružnice, jednoho jejího poloměru a spirály, navíjející se zevně na kružnici, nemůže být $C(f)$ pro žádnou funkci meromorfní v jednotkovém kruhu, jak ukázal první Д. Б. Потягайло v r. 1952 a nezávisle v r. 1955 W. RUDIN (Potjagajlova práce není v knize citována).

Ve větě ,,v malém" se studuje chování $f(z)$ v okolí pevně zvoleného bodu $e^{i\theta}$, jde tedy o vztah mezi $C(f, z_0)$, $R(f, z_0)$, $A(f, z_0)$, zobecňující Iversenovu větu.

Třetí část je věnována aplikaci pojmu Baireovy kategorie na hraniční chování funkcí meromorfních v jednotkovém kruhu. Této metody bylo užito nedávno v pracích F. BAGEMIHLA, W. SEIDELA a E. F. COLLINGWOODA. Jsou uvedeny známé věty Plessnerova, Luzin-Privalovova věta o jednoznačnosti pro radiální hraniční hodnoty a Meierova věta ,,o dvou tětivách". Aby si čtenář učinil představu o zajímavosti docílených výsledků a o tom, jak ,,divoké" může být chování zcela ,,rozumných", tj. holomorfních, funkcí, uveďme dvě věty, dokázané Bagemihlem a Seidelem:

---

[1]) M' znamená doplněk množiny M ve w-rovině.

[2]) $H(M)$ znamená hranici množiny M, $\overline{M}$ uzávěr množiny M.

I. *Budiž v* $|z| < 1$ *dána libovolná spojitá funkce* $g(z)$ *a neprázdná množina* E *typu* F_σ *a první kategorie na* $|z| = 1$. *Potom existuje funkce* $f(z)$, *holomorfní v* $|z| < 1$, *tak, že pro každé* $e^{i\Theta} \in E$ *jsou množiny radiálních hraničních hodnot funkcí* $f(z)$ *resp.* $\operatorname{Re} f(z)$ *resp.* $\operatorname{Im} f(z)$ *totožné s množinami radiálních hraničních hodnot funkcí* $g(z)$ *resp.* $\operatorname{Re} g(z)$ *resp.* $\operatorname{Im} g(z)$.[3])

II. *Existuje funkce* $f(z)$, *holomorfní v* $|z| < 1$, *tak, že množina jejích radiálních hraničních hodnot v bodě* $e^{i\Theta}$ *je celá kružnice* $|w| = 1$ *pro skoro všechna* Θ, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$. *Tudíž* $f(z)$ *je omezená na skoro všech poloměrech, avšak na žádném z těchto poloměrů nemá limitu pro* $|z| \to 1$.

Poslední čtvrtá část kapitoly se zabývá studiem hraničního chování dvou důležitých speciálních tříd meromorfních funkcí: funkcí ohraničeného typu (tj. funkcí, jež lze vyjádřit ve tvaru podílu dvou funkcí omezených v $|z| < 1$) a normálních meromorfních funkcí (tj. funkcí, pro něž třída $f(S(z))$, kde $S(z)$ probíhá všechna konformní zobrazení jednotkového kruhu na sebe, je normální).

Čtvrtá kapitola je věnována rozšíření teorie hraničního chování meromorfních funkcí na jednoznačné funkce na Riemannových plochách. Studuje se zejména Iversenova vlastnost, zobecněná na Riemannovy plochy S. Stoïlovem, a různé věty o hraničním chování na nekompaktních Riemannových plochách.

Ve stručném dodatku jsou studovány analogické otázky pro K-kvasikonformní zobrazení a pseudoanalytické funkce.

Na závěr knihy je uveden vynikající seznam literatury, obsahující na 350 názvů, a přehledný věcný rejstřík.

Četba knihy není snadná, neboť problematika je rozsáhlá a velmi náročná po technické stránce. Výklad je stručný, ale přesný a srozumitelný. Čtenář je doveden až na sám okraj moderního bádání. Získá přehled o teorii hraničního chování analytických funkcí a, což je obzvlášť důležité, seznámí se se základními metodami řešení úloh této teorie a najde v knize řadu dosud neřešených a patrně nesnadných problémů. Je velmi významné, že se autorovi podařilo, lze-li se tak vyjádřit, přesvědčit čtenáře o nutnosti abstraktního přístupu ke zcela konkrétním klasickým úlohám. Knihu lze vřele doporučit každému, kdo se chce hlouběji poučit o moderní teorii analytických funkcí.

Jaroslav Fuka, t. č. Moskva

Hans P. Künzi: QUASIKONFORME ABBILDUNGEN. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 26.) Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960, str. 182, obr. 35, cena DM 36,—.

Recensovaná kniha podává přehled o výsledcích teorie kvasikonformních zobrazení v rovině. Tato teorie vznikla z úloh teorie konformního zobrazení a analytických funkcí a je jejich dalekosáhlým zobecněním. Její základy položili v letech 1928—1935 H. Grötzsch, L. V. Ahlfors a M. A. Lavrentěv.

Budiž $w = H(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ spojitě diferencovatelné homeomorfní zobrazení rovinné oblasti G do roviny w, zachovávající orientaci, tj. s positivním jakobiánem. Za těchto předpokladů je $H(z)$ lokálně afinní a zobrazuje nekonečně malý kruh na nekonečně malou elipsu. Poměr velké poloosy této elipsy k malé poloose se nazývá dilatační kvocient $D_{z/w}$ a je zřejmě

$$D_{z/w} = \frac{\max\limits_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|}{\min\limits_{0 \leqq \varphi \leqq \pi} \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|}, \quad \text{kde} \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi$$

[3]) Množinou radiálních hraničních hodnot spojité funkce $\varphi(z)$ b bodě $e^{i\Theta}$ rozumíme přirozeně množinu všech α, k nimž existuje posloupnost $z_n = r_n e^{i\Theta}$, $r_n \to 1$, tak, že $\varphi(z_n) \to \alpha$.

znamená derivaci ve směru φ. Geometricky je zřejmé a snadno lze vypočíst, že platí nerovnost

$$\frac{1}{D_{z/w}^{w}} J \leqq \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2 \leqq D_{z/w} J, \tag{1}$$

kde J je jakobián zobrazení $w = H(z)$. $H(z)$ se nazývá K-kvasikonformním zobrazením (stručně $K-QC$ zobrazením) v Grötzschově smyslu, jestliže všude v G platí $D_{z/w} \leqq K < \infty$. Zřejmě $H(z)$ je konformní právě když platí $K = 1$ a zobrazení $W = \omega(H(z))$ resp. $w = H(\omega(\zeta))$, kde $W = \omega(w)$ resp. $z = \omega(\zeta)$ jsou konformní zobrazení, jsou opět $K-QC$.

Nazvěme čtyřrohem jednoduše souvislou Jordanovu oblast $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$ se čtyřmi různými význačnými hraničními body, vrcholy. Každý čtyřroh lze jediným způsobem konformně zobrazit na obdélník s vrcholy $w_1 = 0$, $w_2 = M$, $w_3 = M + i$, $w_4 = i$, při čemž bod w_i je obrazem bodu z_i. Číslo M se nazývá modul čtyřrohu $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$ a je zřejmě konformně invariantní. Důležitou vlastností $K-QC$ zobrazení je tzv. Grötzschova nerovnost

$$\frac{1}{K} M \leqq M' \leqq KM. \tag{2}$$

Zde M' je modul čtyřrohu, který je obrazem $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Důkaz (2) je typický pro celou teorii: Pomocí Schwarzovy nerovnosti se získávají odhady některých geometrických charakteristik dané oblasti. Nerovnost (2) stačí zřejmě dokázat pro obdélníky. Budiž tedy $R \subset G$ obdélník s vrcholy $O, M, M + i, i$, $R' = H(R)$, obdélník s vrcholy O, M', $M' + i, i$, při čemž $H(O) = O$, $H(M) = M'$, $H(M + i) = M' + i$, $H(i) = i$. Obraz úsečky $y =$ konst, $0 < x < M$, má délku aspoň M', takže platí

$$M' \leqq \int_0^M \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right| \mathrm{d}x .$$

Odtud podle Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$M'^2 \leqq \left(\int_0^M \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right| \mathrm{d}x\right)^2 \leqq \int_0^M \mathrm{d}x \, . \int_0^M \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|^2 .$$

Podle (1) odtud dále plyne

$$M'^2 \leqq M \int_0^M K\, J(z)\, \mathrm{d}x$$

a z Fubiniho věty

$$\int_0^1 M'^2 \,\mathrm{d}y \leqq KM \int_0^1 \int_0^M J(z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y .$$

Napravo je plocha obdélníka R', takže konečně $M'^2 \leqq KM \, . \, M'$, tj. $M' \leqq KM$.
Poněvadž inversní zobrazení je rovněž $K-QC$, je tím dokázána i druhá část nerovnosti (2).

V dalším vývoji teorie $K-QC$ zobrazení se ukázalo, že předpoklady o hladkosti jsou příliš omezující: v některých důležitých extremálních úlohách neexistuje řešení ve třídě Grötzschových $K-QC$ zobrazení. Východiskem k nezbytnému zobecnění, které podali L. V. Ahlfors a A. Mori, jsou nerovnosti (1), (2).

Definice (A). Budiž $K \geqq 1$. Homeomorfní zobrazení $w = H(z)$ oblasti G do w-roviny se nazývá K-kvasikonformní, jestliže platí:

1. Budiž $\bar{R} = \{x, y; a_1 \leqq x \leqq a_2, b_1 \leqq y \leqq b_2\}$, $\bar{R} \subset G$. Potom funkce $H(x, y_0)$ proměnné x je absolutně spojitá v intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$ pro skoro všechna $y_0 \in \langle b_1, b_2 \rangle$ a funkce $H(x_0, y)$ proměnné y je absolutně spojitá v intervalu $\langle b_1, b_2 \rangle$ pro skoro všechna $x_0 \in \langle a_1, a_2 \rangle$.

2. Skoro všude v G platí

$$\left|\frac{\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{d}z}\right| \leqq KJ\,, \tag{3}$$

kde $J = u_x v_y - u_y v_x$ (parciální derivace existují podle 1 skoro všude v G).

3. Parciální derivace H_x, H_y jsou integrovatelné s kvadrátem na každé kompaktní podmnožině oblasti G.

Definice (B). Budiž $K \geqq 1$. Homeomorfní zobrazení oblasti G do w-roviny, zachovávající orientaci, se nazývá K-kvasikonformní, jestliže pro modul M libovolného čtyřrohu $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$, ležícího v G, a modul M' jeho obrazu $H(\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4))$ platí nerovnost (2).

Zásadní význam pro celou teorii má věta o ekvivalenci:

Zobrazení $w = H(z)$ je $K-QC$ podle definice (A) právě když je $K-QC$ podle definice (B).

V knize je podrobně vyložen důkaz věty o ekvivalenci, pocházející od A. Mori a L. Berse a rovněž Pflugerův důkaz tvrzení (B) $\rightarrow$ (A). Oba důkazy užívají hlubokých vět teorie funkcí reálné proměnné. Jiný důkaz, užívající teorie Beltramiho rovnice a Beurling-Ahlforsovy věty o přiřazení hranic při $K-QC$ zobrazení Jordanových oblastí, najde čtenář v práci L. Bers: *The equivalence of two definitions of quasiconformal mappings*, Comm. Math. Helvetici, 1962, *37*, fasc. 2, 148–154. Poznamenejme, že F. W. Gehring ukázal, že podmínka (3) definice (A) je již důsledkem podmínek 1, 2. F. W. Gehring rovněž dokázal větu:

Budiž $w = H(z)$ homeomorfní zobrazení oblasti G do roviny w, zachovávající orientaci. Označme

$$L(z_0) = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\max\limits_{|z-z_0|=r} |H(z) - H(z_0)|}{\min\limits_{|z-z_0|=r} |H(z) - H(z_0)|}\,.$$

Potom $w = H(z)$ je $K-QC$, právě když platí 1. $L(z)$ je omezená v G; 2. $L(z) \leqq K$ skoro všude v G. Současně sestrojil pro každé $K > 1$ $K-QC$ zobrazení oblasti G, pro něž neplatí $L(z) \leqq K$ všude v G (dokonce $L(z) > K$ na množině Hausdorffovy dimense 2).

Tato obecná $K-QC$ zobrazení mají řadu důležitých vlastností. Uveďme některé z nich (očíslování vět je stejné jako v kap. 4 recensované knihy):

Věta 1. Lokálně $K-QC$ zobrazení (tj. homeomorfismus, zachovávající orientaci, pro nějž je podmínka (2) splněna pouze v okolí každého bodu oblasti G) je $K-QC$.

Věta 2. Budiž $w = H(z)$ homeomorfní zobrazení oblasti G do w-roviny, jež je $K-QC$ v oblasti $G \setminus \gamma$, kde γ je analytická křivka. Potom $H(z)$ je $K-QC$ v G.

Věta 4. $K-QC$ zobrazení $|z| < 1$ na $|w| < 1$ lze rozšířit na homeomorfní zobrazení $|z| \leqq 1$ na $|w| \leqq 1$.

Věta 4 ve spojení s větou 2 umožňuje pomocí symetrie rozšířit libovolné $K-QC$ zobrazení $|z| < 1$ na sebe na $K-QC$ zobrazení roviny na sebe.

Věta 6. $K-QC$ zobrazení $H(z)$ $|z| < 1$ na $|w| < 1$, $H(0) = 0$, jsou stejnoměrně hölderovská s exponentem $1/K$, tj. existuje konstanta c, nezávislá na H (a dokonce ani na K!) tak, že platí

$$|H(z_1) - H(z_2)| \leqq C|z_1 - z_2|^{1/K}\,.$$

Je zajímavé, že nejlepší možná konstanta, nezávislá na K, totiž $C = 16$, není dosažena pro žádné $K-QC$ zobrazení z uvedené třídy. Vlastnost věty 6 znamená kompaktnost uvedené třídy $K-QC$ zobrazení ve stejnoměrné metrice. Odtud snadno plyne, že třída všech $K-QC$ zobrazení $|z| < 1$ na $|w| < 1$ je uzávěrem všech $K-QC$ zobrazení v Grötzschově smyslu ve stejnoměrné metrice.

Věta 10 (Beurling-Ahlfors). Budiž $\mu(x)$ spojitá rostoucí funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$, $\mu(-\infty) = -\infty$, $\mu(\infty) = \infty$. $K-QC$ zobrazení $w = H(z)$ horní poloroviny na sebe s hraničními hodnotami $H(x) = \mu(x)$, $H(\infty) = \infty$ existuje právě tehdy, jestliže funkce $\mu(x)$ splňuje podmínku

$$\frac{1}{\varrho} \leqq \frac{\mu(x+t) - \mu(x)}{\mu(x) - \mu(x-t)} \leqq \varrho \tag{4}$$

pro nějakou konstantu $\varrho \geqq 1$ a pro všechna reálná x, t. Je pozoruhodné, že existuje funkce $\mu(x)$ splňující podmínku (4) pro $\varrho > 1$, která není absolutně spojitá na nějakém intervalu $\langle a, b\rangle$, $-\infty < a < b < \infty$; fakt, který při konformním zobrazení nemůže nastat.

Vraťme se nyní k obsahu jednotlivých kapitol knihy. V kapitole 1 jsou uvedeny některé věty o modulech čtyřrohu, resp. dvojnásobně souvislých oblastí, různé kanonické oblasti a jich extremální vlastnosti, souvislosti mezi modulem čtyřrohu a extremální délkou resp. Dirichletovým integrálem. Závěrem jsou uvedeny Teichmüllerovy věty o modulech.

V kapitole 2 je definováno $K-QC$ zobrazení v Grötzschově smyslu a dokázána Grötzschova nerovnost. Dále je naznačen Wittichův důkaz důležité Teichmüllerovy věty o deformaci zobrazení roviny na sebe, jež se v okolí bodu ∞ v jistém smyslu málo liší od konformního zobrazení. Definitivním výsledkem v tomto směru je *Bělinského věta*:

Je-li otevřená rovina $z \neq \infty$ zobrazena na rovinu $w \neq \infty$ pomocí spojitě diferencovatelného zobrazení s positivním jakobiánem a platí-li pro jisté $r_0 < \infty$

$$\iint_{|z| \geqq r_0} \frac{D_{z/w} - 1}{|z|^2} \, dx \, dy < \infty ,$$

potom existuje $\lim_{z \to \infty} (w/z) \neq 0, \infty$.

Je záslužné, že autor uvádí důkaz této významné věty, neboť až dosud existoval v literatuře jen nástin důkazu v Dokl. Ak. nauk SSSR. Dále jsou uvedeny věty o invarianci množin logaritmické kapacity O při $K-QC$ zobrazeních, zobecnění známé Koebeho věty o prostých holomorfních funkcích v jednotkovém kruhu, Ahlforsova věta o deformaci. V závěru kapitoly je uveden Teichmüllerův extremální problém a Grötzschovy extremální úlohy.

V kapitole 3 jsou uvedeny aplikace $K-QC$ zobrazení v teorii analytických funkcí, speciálně v problému typu Riemannovy plochy a v různých problémech Nevanlinnovy teorie rozložení hodnot.

Obsah kapitoly 4 byl probrán výše.

V kapitole 5 jsou studovány pseudoanalytické funkce a jejich vlastnosti. Pseudoanalytická (přesněji K-pseudoanalytická) funkce v oblasti G jest definována jakožto spojitá funkce $f(z)$, která indukuje v nějakém okolí každého bodu oblasti G zobrazení $K-QC$. Ukazuje se, že tato definice je ekvivalentní s touto vlastností:

Lze psát $f = A \circ H$, kde H je $K-QC$ v oblasti G a A je funkce analytická v $H(G)$. Velký význam má ten fakt, že reálná a imaginární část pseudoanalytické funkce splňují jistý lineární systém parciálních rovnic s nekonstantními koeficienty, tzv. Beltramiho systém, který je zobecněním Cauchy-Riemannova systému. Tato souvislost má význam nejen pro studium pseudoanalytických funkcí samotných, ale ukazuje i na možnost použití výsledků, resp. metod teorie pseudoanalytických funkcí ke studiu jistých typů parciálních rovnic. V dalším se ukazuje, že řadu vět z teorie analytických funkcí lze příslušným způsobem zobecnit na pseudoanalytické funkce. Jde např. o zobecnění Schwarzova lemmatu, principu maxima a principu symetrie, analog Schottkyho a Picardovy věty, zobecnění Fatouovy věty, vět Rouchéovy, Hurwitzovy atd.

Kapitola 6 je věnována *Teichmüllerově teorii* extremálních $K-QC$ zobrazení. Ve 40. letech formuloval Teichmüller úlohu a heuristickými úvahami dospěl k předpokládanému elegantnímu řešení. Poznamenejme, že přesná formulace úlohy a Ahlforsův důkaz Teichmüllerových tvrzení zabírá v knize 20 stránek. V závěru kapitoly je naznačen nový důkaz Teichmüllerovy věty, pocházející od L. Berse.

Pokusme se na nejjednodušším případě naznačit o jaký problém jde. Buďtež dány čtyřrohy $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\Omega'(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$. Obecně neexistuje konformní zobrazení $w = f(z): \Omega \leftrightarrow \Omega'$ tak, aby $z'_i = f(z_i)$. Vždy však existuje $K-QC$ zobrazení $w = H(z)$ s požadovanou vlastností: Stačí zobrazit Ω na obdélník R pomocí konformního zobrazení $\zeta = \varphi(z)$, Ω' na obdélník R' pomocí konformního zobrazení ψ a obdélník R na obdélník R' pomocí $K-QC$ zobrazení $\zeta' = \chi(\zeta)$ (např. afinního) a vzít složené zobrazení $\psi^{-1} \circ \chi \circ \varphi$. Položme si nyní otázku, zda ve třídě všech $K-QC$ zobrazení $\Omega(z_1, z_2, z_3, z_4)$ na $\Omega'(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$, $z'_i = H(z_i)$ (K se mění!) existuje zobrazení s nejmenším K. Protože dilatační kvocient je invariantní vůči konformnímu zobrazení, redukuje se tato úloha na nalezení extremálního $K-QC$ zobrazení obdélníka R na obdélník R'. Budiž M poměr stran obdélníka R, M' poměr stran obdélníka R'. Elementární úvahou, zcela analogickou důkazu nerovnosti (2), lze dokázat, že pro každé $K-QC$ zobrazení $w = H(z)$ R na R' platí $K(H) \geqq M'/M$ a že rovnost je dosažena pouze pro afinní zobrazení. Všimněme si, že extremální zobrazení má konstantní dilatační kvocient M'/M.

Hlubokým zobecněním této elementární úlohy je *Teichmüllerovo tvrzení*:

Nechť S a S' jsou kompaktní Riemannovy plochy rodu $g > 1$, f homeomorfní zobrazení S na S'. Ve třídě všech $K-QC$ zobrazení S na S', homotopních s f, existuje, a to jediné, K_0-QC zobrazení f_0, pro něž platí $K_0 \leqq K$. Toto zobrazení lze analyticky popsat pomocí dvou holomorfních kvadratických diferenciálů: $\varphi(z)\,dz^2$ definovaném na S a $\psi(z')\,dz'^2$ definovaném na S'. V lokálních parametrech $\zeta = \xi + i\eta$ a $\zeta' = \xi' + i\eta'$ takových, že $d\zeta^2 = \varphi\,dz^2$, $d\zeta'^2 = \psi\,dz'^2$, lze zobrazení f_0 napsat ve tvaru $\xi' = K_0\xi$, $\eta' = \eta$, jeho „lokální" dilatační kvocient je tedy konstantní. Nazveme-li $\log K_0$ vzdáleností Riemannových ploch S a S' (vzhledem ke třídě homotopie f), dostaneme po příslušném ztotožnění konformně ekvivalentních ploch metrický prostor, který je homeomorfní s eukleidovským prostorem dimense $6g - 6$. Čtenář, hledající hlubší poučení o těchto problémech, nechť se obrátí ke knize L. Ahlfors, L. Bers: *Prostranstva Riemannovych poverchnostej i kvazikonformnyje otobraženija*, Moskva 1961.

Poslední kapitola 7 je věnována různým zobecněním a souvislostem s teorií parciálních diferenciálních rovnic. Je tu vyložena teorie pseudoanalytických funkcí ve smyslu L. Berse a Lavrentěvova teorie nelineárních silně eliptických systémů. Je naznačen důkaz Lavrentěvovy věty o existenci homeomorfních zobrazení, daných řešením takových systémů, pro oblasti ohraničené po částech hladkými křivkami. Poznamenejme, že výsledky L. Berse dokázal současně I. N. Vekua. Vekuova teorie, která je založena na metodách moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic, je vyložena v jeho knize: *Obobščennyje analitičeskije funkciji*, Moskva 1959.

V dodatku je poukázáno na nejnovější výsledky amerických matematiků Ch. Loennera a F. W. Gehringa; zobecňující teorii $K-QC$ zobrazení na n dimensí ($n \geqq 3$). Poznamenejme, že některé výsledky v tomto směru docílil v SSSR B. V. Šabat a ve Finsku J. Väisälä. Toto zobecnění má velký význam proto, že v důsledku Liouvilleovy věty se konformní zobrazení pro $n > 2$ redukují v podstatě na inverse a podobnosti, zatímco teorie $K-QC$ zobrazení pro $n > 2$ je zcela analogická teorii v rovině.

Kniha vyšla ve známé Springerově sérii „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete". Je psána jasně a přehledně, vytištěna na krásném papíře a v dokonalé úpravě. Kromě několika drobných tiskových chyb (např. v definici funkce $h(r)$ na posledním řádku str. 32 chybí činitel $1/2\pi$) je nesprávně formulována věta 1, kap. 4 na str. 98. Čtenář však snadno pozná ze souvislosti, že místo „in jeder Umgebung von D" mělo být řečeno „in einer Umgebung eines jeden Punktes von D". Ke knize je připojen rozsáhlý seznam literatury dovedený do r. 1959 a obsahující na 150 názvů. Snadnou orientaci umožňuje podrobný obsah a jmenný a věcný rejstřík. Je velkou zásluhou autora monografie, že se do rukou širokého kruhu čtenářů dostává dílo, umožňující seznámení s krásnou a hlubokou partií moderní analysy, jejíž metody a výsledky byly až dosud rozesety v časopisech a známy většinou jen specialistům v teorii funkcí.

Jaroslav Fuka, tč. Moskva