Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ ZOBECNĚNÍ KAKEYOVY VĚTY NA MOCNINNOU ŘADU

JAN KADLEC, Praha

(Došlo dne 28. dubna 1959 — po úpravě 5. listopadu 1962)

Je podán elementární důkaz postačující podmínky k tomu, aby mocninná řada neměla kořeny, které jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovny jedné.

1. Úvodní poznámka. Známá Kakeyova věta (viz [1]) říká:

Nechť $\beta_0, \ldots, \beta_n$ *jsou reálná čísla, splňující vztah* $\beta_0 > \beta_1 > \ldots > 0$. *Definujme pro všechna komplexní z funkci* $F(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_n z^n$. *Nechť platí* $F(z_0) = 0$. *Potom* $|z_0| > 1$.

V pracích [2], [3], [4], [5] jsou pro polynom dokazovány věty obdobné větě Kakeyově, při čemž jsou kladeny jisté podmínky na jeho koeficienty. Věta, dokázaná v této poznámce, se týká mocninné řady. Aplikujeme-li ji na koeficienty tvaru $\beta_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_n > \beta_{n+1}$, $\beta_{n+j} = 0$ $(j > 0)$, dává Kakeyovu větu jako speciální případ.

2. Označení. Je-li s komplexní, r reálné číslo, $\mathbf{K}$ kružnice o středu s a poloměru r, tj. množina všech ξ, pro něž je $|\xi - s| = r$, označme $i\mathbf{K}$, $\bar{i}\mathbf{K}$, $e\mathbf{K}$, $\bar{e}\mathbf{K}$ množiny všech ξ, pro něž je po řadě $|\xi - s| < r$, $|\xi - s| \leqq r$, $|\xi - s| > r$, $|\xi - s| \geqq r$.

3. Lemma. *Buď* $\mathbf{K}$ *kružnice,* t *komplexní číslo,* $t \in \mathbf{K}$, τ *buď reálné,* $\tau > 1$. *Označme* f *transformaci* $f(z) = t + \tau(z - t)$ *(stejnolehlost). Potom* $\mathbf{Q} = f(\mathbf{K})$ *je kružnice a platí* $\bar{i}\mathbf{K} \subset i\,\mathbf{Q} \cup \{t\}$, $\mathbf{K} \cap \mathbf{Q} = \{t\}$. *Transformace* f *je pro* $\tau = 1$ *identita.*

Důkaz je možno přenechat čtenáři.

4. Označení. V dalším buď φ reálné číslo splňující vztah $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq 0$.

Označme $a_{-1} = 0$; $a_0 = \beta_0$; $\ldots$, $a_j = \sum_{k=0}^{j} \beta_k e^{i\varphi k}$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Dále nechť

$$a'_{e+1} = a_e - \beta_{e+1} e^{ie\varphi}, \quad a''_{e+1} = a_{e+1} + \beta_{e+1} e^{i(e+2)\varphi}.$$

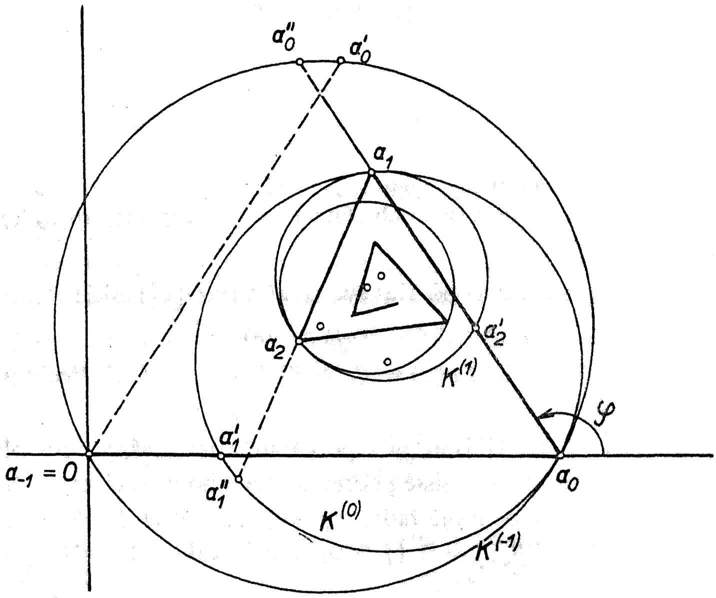
Kružnici, procházející body a, b, c, které neleží na přímce, označíme $\mathbf{K}(a, b, c)$. Označme ještě $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}(a_{e+1}, a_e, a'_{e+1})$. Viz obr. 1.

5. Lemma. *Platí tato tvrzení:*

a) *pro všechna* $e \geqq 0$ *celá je* $\beta_e = |a_e - a_{e-1}|$. *Jestliže pro některé* e *je* $\beta_e = 0$, *potom* $a_{e-1} = a_e = \ldots = a$ *a* $\beta_{e+i} = 0$ $(i \geqq 1)$.

b) *Jestliže* $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, $\beta_{e+1} \neq 0$, *neleží žádná z trojic* a_{e-1}, a_e, a_{e+1}; a_{e+1}, a_e, a'_{e+1}; a_e, a_{e+1}, a''_{e+1} *na přímce.*

c) $K^{(e)} = K(a_{e+1}, a_e, a''_{e+1})$.



Obr. 1.

Důkaz. Tvrzení a), b) jsou zřejmá. Dokážeme c). Položme $s = a_e + S$, kde $(1 - e^{i\varphi}) S = \beta_{e+1} e^{i(e+1)\varphi}$. Vyšetřujme transformaci $f(z) = z e^{i\varphi} + a_e(1 - e^{i\varphi}) + \beta_{e+1} e^{i(e+1)\varphi}$. Máme $f(z) = s + (z - s) e^{i\varphi}$ (otočení kolem s); $f(a_{e+1}) = a''_{e+1}$, $f(a'_{e+1}) = a_e$, $f(a_e) = a_{e+1}$. (Například $f(a_{e+1}) = a_e e^{i\varphi} + \beta_{e+1} e^{i(e+2)\varphi} + a_e(1 - e^{i\varphi}) + \beta_{e+1} e^{i(e+1)\varphi}$.) Tedy s je střed kružnice $K^{(e)}$ a platí $K^{(e)} = f(K^{(e)}) = K(a_{e+1}, a_e, a''_{e+1})$.

6. Lemma. *Nechť* $0 < \beta_{e+1} < \beta_e$. *Potom*

(1) $$\bar{i}K^{(e)} \subset iK^{(e-1)} \cup \{a_e\},$$

(2) $$\bar{i}K'^{(e)} \cap K^{(e-1)} = \{a_e\},$$

(3) $$K^{(e)} \cap K^{(e-1)} = \{a_e\}.$$

Důkaz. Označme $f(z) = a_e + (\beta_e/\beta_{e+1})(z - a_e)$. Potom $f(K^{(e)}) = K(a_{e-1}, a_e, a''_e) = K^{(e-1)}$; stačí nyní užít lemmatu 3.

Čtenář si snadno dokáže následující lemma:

7. Lemma. *Jestliže* $\beta_{e+2} \neq 0$, *je* $iK^{(e+1)} \subset iK^{(e)}$, *a tedy* $\bar{i}K^{(e+1)} \subset \bar{i}K^{(e)}$.

8. Věta. *Buďte* $\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq 0$ *reálná čísla. Nechť existuje index j takový, že* $\beta_{j-1} > \beta_j > \beta_{j+1}$. *Označme* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ *pro ta komplexní z, pro která má řada smysl. Nechť* $F(z_0) = 0$. *Potom* $|z_0| > 1$.

Důkaz. Označme $F(z_0) = a$. Rozeznávejme tyto tři případy: 1) $|z_0| = 1$, 2) $0 < |z_0| < 1$, 3) $z_0 = 0$. Dojdeme vždy ke sporu.

Ad 1): $|z_0| = 1$, tj. $z_0 = e^{i\varphi}$. Je-li $\varphi = 0$, je $a = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k > 0$. Je-li $\varphi = \pi$, je $a = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_{2k} - \beta_{2k+1})$. Pro každé $k \geqq 0$ je $\beta_{2k} - \beta_{2k+1} \geqq 0$ a alespoň pro jeden index $n \geqq 0$ je $\beta_{2n} - \beta_{2n+1} > 0$; tedy $a > 0$.

V dalším nechť $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$. a) Nechť $\beta_{j-1} > \beta_j > \beta_{j+1} = 0$. Zřejmě $0 \in \bar{e}K^{(-1)}$. Podle lemmatu 7 pro k celé, $-1 \leqq k \leqq j-2$, je $\bar{e}K^{(k+1)} \supset \bar{e}K^{(k)}$. Odtud plyne, že

$$0 \in \bar{e}K^{(j-2)}\,. \tag{4}$$

Užijme (1) pro $e = j - 1$. Vzhledem k tomu, že $a_j = a \neq a_{j-1}$, dostáváme

$$a \in iK^{(j-2)}\,. \tag{5}$$

Ze zřejmé rovnosti $\bar{e}K^{(j-2)} \cap iK^{(j-2)} = \emptyset$ a vztahů (4), (5) plyne, že $a \neq 0$.

b) Nechť $\beta_{j-1} > \beta_j > \beta_{j+1} > 0$; užijme (2) a (3) na $e = j$, $e = j - 1$. Podle lemmatu 7 je

$$K^{(j)} \subset iK^{(j-2)}\,. \tag{6}$$

Kdyby nyní bylo $a_{j-1} \in K^{(j)}$, bylo by $a_{j-1} \in K^{(j-1)} \cap \bar{i}K^{(j)} \subset \{a_j\}$; ale $a_{j-1} \neq a_j$, což je zřejmě spor.

Kdyby $a_{j-1} \in iK^{(j)}$, bylo by $a_{j-1} \in iK^{(j-1)}$, což je též spor. Máme tedy

$$a_{j-1} \in eK^{(j)}\,. \tag{7}$$

Z (7) a vztahu $K^{(j)} \cap K^{(j-2)} \subset \bar{i}K^{(j-1)} \cap K^{(j-2)} = \{a_{j-1}\}$ plyne

$$K^{(j)} \cap K^{(j-2)} = \emptyset\,. \tag{8}$$

Podle (6) a (8) máme

$$\bar{i}K^{(j)} \cap \bar{e}K^{(j-2)} = \emptyset\,. \tag{9}$$

Protože $0 = a_{-1} \in \bar{e}K^{(-1)} \subset \ldots \subset \bar{e}K^{(j-2)}$, platí znovu (4). Dále: pro $n \geqq j$ je $a_n \in \bar{i}K^{(n)} \subset \bar{i}K^{(j)}$ a

$$a \in \bar{i}K^{(j)}\,. \tag{10}$$

Ze vztahů (4), (10), (9) plyne, že $a \neq 0$.

Ad 2): Nechť $0 < |z_0| < 1$ (tj. $z_0 = re^{i\varphi}$, kde $0 < r < 1$). Označme $w = e^{i\varphi}$, $F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, kde $\alpha_k = r^k \beta_k$. Zřejmě $F_1(w) = F(z_0) = a$, $|w| = 1$ a platí $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq 0$, $\alpha_{j-1} > \alpha_j > \alpha_{j+1}$. Užijeme-li toho, co jsme již dokázali pro případ 1), vidíme, že $F_1(w) \neq 0$.

Ad 3): Jestliže $z_0 = 0$, je $F(z_0) = \beta_0 > 0$. Tím je důkaz věty dokončen.

9. Poznámka. Z důkazu je patrno, že se tvrzení věty dá rozšířit na některé další případy, na příklad $\beta_0 > \beta_1$, φ iracionální násobek π apod. Je zde v podstatě dokazována jistá věta o lomených čarách.

Literatura

[1] *S. Kakeya*: On the limits of the roots an algebraic equation with positive coefficients. The Tohoku Math. Journ. *2* (1912), 140–142.

[2] *L. Berwald*: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. Matematische Zeitschrift Bd. *37* (1933), 61–76.

[3] *L. Berwald*: Lösung der Aufgabe 112. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *42* (1933), str. 76.

[4] *E. Egerváry*: On a generalization of a theorem of Kakeya. Acta Litterarum ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, *5* (1931), 78–82.

[5] *St. Lipka*: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten. Acta Litterarum ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, *5* (1931), 69–77.

Резюме

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КАКЕЯ ДЛЯ СТЕПЕННОГО РЯДА

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

В настоящей работе элементарно доказывается следующее обобщение теоремы Какея:

Пусть $\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq 0$ *и пусть существует индекс* j *так, что* $\beta_{j-1} > \beta_j > \beta_{j+1}$. *Обозначим* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ *для всех комплексных* z, *для которых ряд сходится. Пусть* $F(z_0) = 0$; *тогда* $|z_0| > 1$.

Summary

AN ELEMENTARY PROOF OF A GENERALIZATION OF THE KAKEYA THEOREM ON POWER SERIES

JAN KADLEC, Praha

In this paper there is given an elementary proof of this generalization of the Kakeya theorem:

Let $\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq 0$ *and let there be an index* j *such that* $\beta_{j-1} > \beta_j > \beta_{j+1}$. *Define*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$$

for all complex z *for which this formula is meaningful. If* $F(z_0) = 0$ *then* $|z_0| > 1$.