Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ SMĚRY A PROBLEMATIKA V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН a В. А. МАНЕВИЧ, Moskva

(Došlo dne 21. srpna 1962)

V článku jsou uvedeny některé směry v deskriptivní geometrii a problematika při studiu polohové a metrické úplnosti s aplikacemi v teorii mnohostěnů a při studiu axonometrie a zobecněného Cayleyova problému.

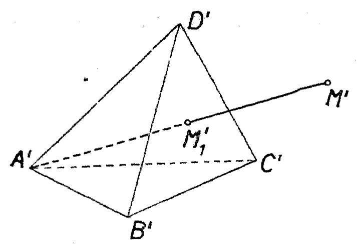
V souvislosti s množstvím námětů v každém směru se zmíníme podrobněji jen o některých.

V posledních letech používali autoři v řadě prací z deskriptivní geometrie pro sestrojování konstruktivních zobrazení projektivní aparát, který umožňuje řešit rozličné prostorové úlohy (З. А. Скопец, В. А. Маневич aj.). Tak se stále více rozvíjí směr, který dostal název „projektivně deskriptivní geometrie".

Stále častěji se ozývají hlasy o účelnosti spojení celého grafického cyklu disciplín (deskriptivní geometrie, nomografie, grafické metody) v jeden celek. Takové náměty byly učiněny v SSSR i v zahraničí (Н. А. Глаголев, E. Kruppa, E. Hohenberg aj.) s návrhem nazývat jednotnou disciplinu „konstruktivní geometrie".

Pokračuje se ve studiu polohové a metrické úplnosti zobrazení a jejího vícerozměrného zobecnění.

ÚPLNOST ZOBRAZENÍ MNOHOSTĚNŮ



Obr. 1.

Uvažujme několik problémů spojených s rovnoběžným promítáním.

Vybereme z rovnoběžného průmětu Φ' obrazce Φ čtyři libovolné body A', B', C', D', které zobrazují čtyrstěn $ABCD$ obrazce Φ, a budeme promítat ostatní body průmětu Φ' z bodu A'.

Jestliže pro bod M' je určen bod $M'_1 \equiv (B'C'D') \cap \cap (A'M')$[1], pak se nazývá bod M' určitým a bod M'_1 jeho stopou (obr. 1).

[1]) Zde značí $(B'C'D')$, příp. $(A'M')$, rovinu určenou body B', C', D', příp. přímku určenou body A', M' a obdobně dále.

Průmět Φ' se nazývá *úplným* (přesněji „polohově úplným"), jsou-li všechny jeho body určité. V opačném případě se nazývá *neúplným* (viz [1], str. 47 a další). Počet parametrů k, které musí být dodatečně zadány k průmětu Φ', aby se stal úplným, se nazývá *koeficientem neúplnosti*. Pro úplný průmět je $k = 0$ (viz [1], str. 48 a zvláště str. 53 a další).

Buď dán rovnoběžný průmět sítě mnohostěnu. Tento průmět může být úplný nebo neúplný. Jsou známy tyto dvě věty (viz [2], str. 175–178):

1. Průmět mnohostěnu, z jehož každého vrcholu vycházejí tři hrany (tak zvaného „obecného" mnohostěnu), je vždy úplný.

2. Je-li $n > 4$ počet vrcholů mnohostěnu, který má pouze trojúhelníkové stěny, pak jeho průmět je neúplný s koeficientem neúplnosti rovným $n - 4$.

Jejich důsledkem je:

a) Průměty mnohostěnů, které mají sítě topologicky ekvivalentní se čtyrstěnem, krychlí nebo dvanáctistěnem, jsou úplné (z věty 1).

b) Průměty mnohostěnů, které mají sítě topologicky ekvivalentní s osmistěnem nebo dvacetistěnem, jsou neúplné (z věty 2).

Problém určení koeficientu neúplnosti pro danou síť mnohostěnu není zcela rozřešen, protože k sestavení vzorců je třeba předem grafické analyzy sítě (viz [2], str. 178–179).

Zajímavý je také jiný **problém**: *zkoumání projektivní a afinní tuhosti mnohostěnů.*

Mnohostěn se nazývá *projektivně (afinně) tuhým*, jestliže jakýkoliv jiný k němu topologický ekvivalentní mnohostěn, jehož stěny jsou projektivní (afinní) s příslušnými stěnami prvního mnohostěnu, je jeho projektivním (afinním) obrazem.

Pokud je známo, zabývá se touto otázkou pouze jedna práce [3], ve které je formulována nutná a postačující podmínka afinní tuhosti mnohostěnů, spočívající v úplnosti rovnoběžného průmětu mnohostěnu.

AXONOMETRIE A CAYLEYŮV PROBLÉM

Axonometrie je část deskriptivní geometrie, která zobrazuje na nákresnu geometrické útvary společně se systémem souřadnic, ke kterému jsou vztaženy.

1. Vezmeme-li za zobrazení středové promítání, dostaneme středovou axonometrii, která má velký význam pro řešení praktických úloh. Základní úlohy středové axonometrie jsou vyloženy v práci [4]. V této oblasti dosud nebyla zkoumána existence reálnosti řešení při konstrukci na obraze středově axonometrického systému souřadnic, který má největší volnost ve výběru svých prvků.

S prvním zobecněním úlohy středové axonometrie je možno se seznámit v práci [5].

Uvažujme *zvláštní případy této úlohy*:

a) Nechť jsou dány dva čtyrstěny $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$ a přímky l a l_1. Najdeme takové body M a M_1 v prostoru, aby trsy $M(ABCDl)$ a $M_1(A_1B_1C_1D_1l_1)$ byly kolineární.

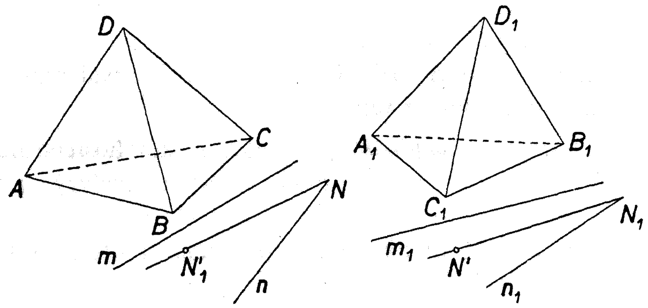
Vezmeme-li libovolný bod M prostoru, pak

$$(Ml) \cap (ABC) \equiv m\,; \quad (MB) \cap (ADC) \equiv P\,; \quad l_1 \cap (A_1B_1C_1) \equiv K\,.$$

Mezi rovinami ADC a $A_1D_1C_1$ určíme svazek kolineací $\Gamma_i : (ADCm) \rightarrow$ $\rightarrow (A_1D_1C_1m_1^i)$, kde m_1^i jsou přímky svazku $|K|$. Ve svazku kolineací Γ_i odpovídá bodu P kuželosečka, která prochází body A_1, C_1, D_1, přičemž body P_1^i této kuželosečky (P_1^i odpovídá bodu P v kolineaci Γ_i) tvoří řadu, která je projektivní se svazkem $|K| : P_1^i \rightarrow m_1^i$. Tedy přímce $B_1P_1^i$ odpovídá rovina $(l_1m_1^i)$. Protože tento vztah je projektivní, jsou body $M_1^i \equiv (B_1P_1^i) \cap (l_1m_1^i)$ na prostorové křivce m^3 třetího stupně.

Tedy každému bodu M odpovídá prostorová křivka m^3 třetího stupně.

b) Nechť jsou dány dva čtyrstěny $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$ a dvě dvojice přímek m, n a m_1, n_1, přičemž $m \subset (ABC)$, $m_1 \subset (A_1B_1C_1)$ (viz obr. 2):



Obr. 2.

Najdeme geometrické místo bodů P a P_1 takových, aby trsy $P(ABCDmn)$ a $P_1(A_1B_1C_1D_1m_1n_1)$ byly kolineární. K tomu určíme kolineaci $\Gamma : (ABCm) \rightarrow$ $\rightarrow (A_1B_1C_1m_1)$.

Položme $n \cap (ABC) \equiv N$; $n_1 \cap (A_1B_1C_1) \equiv N_1$. V kolineaci Γ odpovídá bodu N bod N'. Tudíž přímce NN_1' koresponduje v kolineaci Γ přímka N_1N'.

Označme α rovinu $NN_1'n$ a α_1 rovinu $N_1N'n_1$. Tehdy zřejmě hledané body P a P_1 musí ležet v rovinách α a α_1.

Budiž P libovolný bod roviny α a dále $(PD) \cap (ABC) \equiv M$, $\Gamma : M \rightarrow M_1$; $(M_1D_1) \cap$ $\cap\, \alpha_1 \equiv P_1$. Tak je mezi rovinami α a α_1 stanovena kolineace, ve které jsou P a P_1 odpovídající si body.

c) Nechť jsou dány dva čtyrstěny $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$ a dvě dvojice různoběžek $m \cap n \equiv O$, $m_1 \cap n_1 \equiv O_1$. Najdeme geometrické místo bodů P a P_1 takových, aby trsy $P(ABCDmn)$ a $P_1(A_1B_1C_1D_1m_1n_1)$ byly kolineární. $(OD) \cap (ABC) \equiv K$; $(O_1D_1) \cap (A_1B_1C_1) \equiv K_1$; $m \cap (ABC) \equiv M$; $n \cap (ABC) \equiv N$; $m_1 \cap (A_1B_1C_1) \equiv$ $\equiv M_1$; $n_1 \cap (A_1B_1C_1) \equiv N_1$.

R. Sturm dokázal (viz [6]), že geometrická místa bodů P^0 (v rovině ABC) a bodů P_1^0 (v rovině $A_1B_1C_1$) takových, že svazky

$$P^0(A, B, C, M, N, K) \barwedge P_1^0(A_1, B_1, C_1, M_1, N_1, K_1)\,,$$

jsou křivky třetího stupně. Označíme tyto křivky γ^3 a γ_1^3. Každá dvojice odpovídajících si bodů P^0 a P_1^0 indukuje kolineaci Γ :

$$(A, B, C, P^0M, P^0N, P^0K) \to (A_1, B_1, C_1, P_1^0M_1, P_1^0N_1, P_1^0K_1) .$$

Vezmeme libovolný bod P na paprsku OP^0.

$$(PD) \cap (ABC) \equiv E \subset (P^0K) ; \quad \Gamma : E \to E_1 \subset (P_1^0K_1) ; \quad (D_1E) \cap (O_1P_1^0) \equiv P_1 .$$

Hledané body jsou P a P_1. Každému bodu P kužele $(O\gamma^3)$ zřejmě odpovídá jediný bod P_1 kužele $(O_1\gamma_1^3)$.

Proto jsou hledaná geometrická místa kužele třetího stupně.

V tomto směru není řešena tato **úloha:**

Čtyrstěn s bodem na hraně promítnout středově do obrazce shodného s jiným daným čtyrstěnem s bodem na jeho hraně.

2. Z jiných dobře známých axonometrických způsobů je třeba se zmínit o axonometrii lineární (E. Kruppa) a afinní (H. M. Бескин), které je věnováno mnoho prací v Československu (V. Havel, L. Drs aj.). Tyto práce představují zájem o studium jiných druhů axonometrie.

3. Je známo, že otázka promítání dvou pravoúhlých systémů souřadnic $O_1x_1y_1z_1$ a $O_2x_2y_2z_2$ byla řešena v práci [7] (kde je ukázána nutná a postačující podmínka).

Vzniká tento **problém:** *Najít nutné a postačující podmínky pro promítání na rovinu dvou kartézských systémů souřadnic v prostoru.*

Zůstaneme při úloze o určení geometrických míst bodů, z kterých by se promítaly dva dané trojhrany a dvě kuželosečky kolineárními trsy.

V případě, že by kuželosečky splývaly s absolutní kružnicí, dostaneme shodné trsy.

Nechť jsou dány dva trojhrany $O(a, b, c)$ a $O_1(a_1, b_1, c_1)$ a dvě kuželosečky α^2 a α_1^2. Najdeme geometrické místo bodů M a M_1 takových, aby trsy $M(a, b, c, \alpha^2)$ a $M_1(a_1, b_1, c_1, \alpha_1^2)$ byly kolineární.

Poznamenejme, že kdybychom našli takové body M a M_1, pak libovolné body přímek MO a M_1O_1 by vyhovovaly požadavkům úlohy.

Nechť α, příp. α_1, je rovina křivky α^2, příp. α_1^2 a nechť $(MO) \cap \alpha \equiv P$; $(M_1O_1) \cap \alpha_1 \equiv P_1$; přímky a, b, c protínají α v bodech A, B, C, přímky a_1, b_1, c_1 protínají α_1 v bodech A_1, B_1, C_1. Najdeme geometrické místo bodů P a P_1 takových, že

$$(PA, PB, PC, \alpha^2) \barwedge (P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1, \alpha_1^2) .$$

Nechť P je libovolný bod roviny α. Vyšetříme, kolik existuje odpovídajících bodů P_1 v rovině α_1. Z bodu P sestrojme tečny l, m k α^2. V rovině α_1 budeme hledat takové body P_1, aby

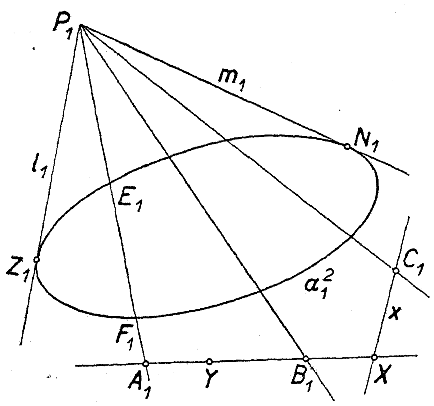
$$P_1(P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1, l_1, m_1) \barwedge P(PA, PB, PC, l, m) ,$$

kde l_1, m_1 jsou tečny k α_1^2 (obr. 3).

Libovolný paprsek $x \supset C_1$ protíná A_1B_1 v bodě X, kterému odpovídá jediný bod Y takový, že $(A_1B_1XY) = (PA, PB, PC, l)$, tedy $A_1\,B_1(X) \barwedge A_1\,B_1(Y)$.

Z bodu Y lze však vést dvě tečny k α_1^2; označíme je y_1 a y_2.

Mezi svazkem tečen k α_1^2 a svazkem $|C_1|$ je příbuznost [2, 1], tj. každému paprsku svazku druhého stupně odpovídá jeden paprsek svazku $|C_1|$, ale každému paprsku svazku $|C_1|$ dva paprsky svazku tečen. Průsečíky odpovídajících si paprsků určují křivku třetího stupně γ^3, která prochází body A_1, B_1, C_1. Bodu X lze přiřadit na A_1B_1 takový bod Z, že $(A_1B_1XZ) = (PA, PB, PC, n)$.



Obr. 3.

Obdobně dostaneme křivku třetího stupně δ^3, která prochází body A_1, B_1, C_1. Průsečíky křivek γ^3 a δ^3, různé od A_1, B_1, C_1, jsou hledanými body. V bodech A_1 a B_1 mají obě křivky γ^3 a δ^3 společné tečny C_1A_1 a C_1B_1, tedy mají kromě A_1, B_1, C_1 ještě $9 - 2 - - 2 - 1 = 4$ společné body. Proto bodu P roviny α odpovídají čtyři body P_1 roviny α_1.

Nechť $PA \cap \alpha^2 \equiv F, E$; $P_1A_1 \cap \alpha_1^2 \equiv F_1, E_1$; l a m se dotýkají α^2 v bodech Z a N; l_1 a m_1 se dotýkají α_1^2 v bodech Z_1 a N_1.

Mezi rovinami α a α_1 určíme kolineaci

$$\begin{vmatrix} P\,Z\,N\,E \\ P_1Z_1N_1E_1 \end{vmatrix}.$$

V této kolineaci si křivky α^2 a α_1^2 odpovídají. Kolineace

$$\begin{vmatrix} P\,Z\,N\,F \\ P_1Z_1N_1F_1 \end{vmatrix}$$

má stejnou vlastnost.

Tak každému paprsku trsu $|O|$ odpovídají čtyři paprsky trsu $|O_1|$ a naopak. Odpovídající si paprsky x a x_1 těchto trsů mají tu vlastnost, že pro libovolné body $M \subset x$, $M_1 \subset x_1$ jsou trsy $M(a, b, c, \alpha^2)$ a $M_1(a_1, b_1, c_1, \alpha_1^2)$ kolineární.

Závěrem je nutno poznamenat, že bylo publikováno mnoho prací, které zobecňují a rozšiřují dříve získané výsledky trojrozměrné deskriptivní geometrie na n-rozměrné prostory. Značný počet prací je věnován aplikacím deskriptivní geometrie na inženýrské úlohy. Ve studiu v tomto směru může být úspěšně pokračováno.

Literatura

[1] *Н. Ф. Четверухин* и *Е. А. Глазунов:* Аксонометрия, Москва 1953, стр. 47—71.

[2] *Н. Ф. Четверухин:* Сб. статей „Вопросы современной начертательной геометрии. Москва 1947.

[3] *Н. Ф. Четверухин:* Об аффинной жесткости многогранников. Д. А. Н. СССР, т. *42*, 1944, № 1.

[4] *В. А. Маневич:* Три задачи центральной аксонометрии. Успехи М. Н., т. *17*, 1962, № 1.
[5] *В. А. Маневич:* Обобщенная проблема Кели. Доклады А. Н., т. *143*, 1962, № 6.
[6] *R. Sturm*: Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Clebsch und Neumann, t. *50*, 1870, 533—574.
[7] *N. Tschetweruchin*: Geradentripel als Projektion von rechtwinkligen Achsenkreuzen in Raume. Математический сборник, т. 40, 1933, № 4.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ПРОБЛЕМАТИКА В ОБЛАСТИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН и В. А. МАНЕВИЧ, Москва

В статье сообщается об исследованиях вопросов *полноты* параллельно-проекционных *изображений* геометрических фигур и, в частности, многогранников. Отмечается, что проблема отыскания коэффициента неполноты изображения многогранника по заданной его сетке еще не вполне решена, т.к. составление формул требует предварительного анализа сетки (см. [2], стр. 178—179).

Представляет интерес другая проблема: исследование „проективной и аффинной *жесткости*“ многогранников [3].

В области *центральной аксонометрии* даны конструктивные решения ряда ее важных задач [4]. Однако до сего времени не исследовано существование действительных решений в этих случаях.

До настоящего времени не полностью решена следующая обобщенная проблема А. Кели:

Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и два конических сечения α^2 и α_1^2. Найти геометрическое место точек M и M_1 таких, чтобы связки $M(ABCD\alpha^2)$ и $M_1(A_1B_1C_1D_1\alpha^2)$ были коллинеарными.

В настоящей статье решены частные случаи этой проблемы, когда вместо двух данных конических сечений берутся: 1. две прямые, 2. две пары прямых. Рассмотрена задача о нахождении геометрических мест точек, из которых данный трехосник и коническое сечение, а также другой трехосник и коническое сечение проектировались бы коллинеарными связками.

Résumé

SUR LES TENDANCES ET LES PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

N. F. TCHÉTVÉROUKHINE, V. A. MANÉVITCH, MOSCOU

Dans ce travail, on examine les questions de savoir quand *les projections parallèles* de figures géométriques, en particulier de polyèdres, sont *complètes*. Remarquons que le problème de détermination du coefficient caractérisant l'état non-complet de la projection d'un polyèdre dont le réseau est donné n'est pas encore résolu complètement, car pour obtenir les formules il faut analyser d'abord le réseau (voir [2], p. 178–179).

Il y a encore un autre problème intéressant: celui d'examiner *la rigidité* projective ou affine de polyèdres [3].

Dans le domaine de *l'axonométrie centrale*, on a donné des solutions constructives de plusieurs problèmes importants [4]. Mais jusqu'à présent, on ne s'est pas intéressé à étudier les problèmes d'existence de solutions réelles dans ces cas.

On n'a pas encore résolu complètement le suivant problème de A. Cayley généralisé:

Etant donnés deux tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ ainsi que deux sections coniques α^2 et α_1^2, trouver lè lieu des points M et M_1 tels que les faisceaux $M(ABCD\alpha^2)$ et $M_1(A_1B_1C_1D_1\alpha_1^2)$ soient collinéaires.

Dans le présent travail on résout quelques cas particuliers de ce problème, à savoir ceux où l'on prend au lieu des deux sections coniques soit deux droites, soit deux paires de droites. On envisage aussi le problème de trouver le lieu des points tels que trièdre de référence et la conique donnée ainsi que l'autre trièdre avec l'autre conique soient projetés de ces points par des faisceaux collinéaires.