Zbyněk Šidák

Représentations des probabilités de transition dans les chaînes à liaisons complètes

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 4, 389--398

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117446`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 87 * PRAHA 24. X 1962 * ČÍSLO 4

REPRÉSENTATIONS DES PROBABILITÉS DE TRANSITION DANS LES CHAÎNES À LIAISONS COMPLÈTES

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Reçu le 29 novembre 1960)

Dans cet article, les représentations intégrales des probabilités de transition analogues à celles de [11] sont présentées pour les chaînes à liaisons complètes. Ensuite, on démontre que chaque chaîne à liaisons complètes peut être représentée par une chaîne de Markov dans un espace compact de Hausdorff. Ces résultats forment une analogie et une généralisation de ceux des articles [11] et [12].

1. INTRODUCTION

Les représentations intégrales des probabilités de transition ont été étudiées pour la première fois, d'un point de vue assez général, par D. G. KENDALL dans les travaux [6] et [7], à savoir pour les chaînes de Markov avec un système d'états dénombrable. Ces représentations ont été généralisées pour les chaînes de Markov avec un système d'états arbitraire dans [11]. Le présent article a pour le premier but de généraliser encore davantage ces représentations intégrales au cas des chaînes à liaisons complètes.

Dans le travail [12], on montre que chaque chaîne de Markov peut être représentée par une chaîne de Markov dans un espace compact de Hausdorff de telle manière que les opérations de cette chaîne représentante transforment l'espace des fonctions continues en lui-même. Le second but du présent article est de montrer que les chaînes à liaisons complètes peuvent être représentées également par des chaînes de Markov jouissant des propriétés mentionnées.

L'article est étroitement lié aux travaux antérieurs [11] et [12], il en est une analogie et une généralisation simple. C'est pourquoi les démonstrations sont omises ici. Les théorèmes où il n'y a aucune mention concernant leur démonstration, peuvent être démontrés facilement de manière analogue aux théorèmes correspondants dans [11] après une simple modification des notations.

Nous utiliserons en substance le système de notations introduit dans [11]; on peut y trouver la signification des symboles qui sont utilisés ici sans être expliqués. Naturellement, il faut modifier quelques notations ce que nous allons faire maintenant.

Nous ne citerons pas la définition détaillée des chaînes à liaisons complètes et leurs propriétés, nous les considérons comme connues, par exemple des travaux [1], [2], [4], [5], [9] (naturellement, nous ne citons ici qu'une petite fraction de la vaste bibliographie concernant les chaînes à liaisons complètes). Parce que nous étudierons ici les chaînes dans un espace abstrait arbitraire, nous renvoyons particulièrement au travail récent de C. T. Ionescu Tulcea [5] ou au livre [1] (chapitre III, Les chaînes à liaisons complètes dans le sens large).

Nous employons donc le système de notions suivantes (entre parenthèses nous indiquons toujours le sens intuitif du symbole): un espace X avec une σ-algèbre $\mathscr{X}$ (les éléments de X sont les chemins de la chaîne); des sous-ensembles de X seront désignés par A, B; un espace Y avec une σ-algèbre $\mathscr{Y}$ (les éléments de Y sont les états de la chaîne); des sous-ensembles de Y seront désignés par E; une transformation $\varphi(.,y)$ qui pour chaque $y \in Y$ transforme X en X (intuitivement: au chemin (x) elle fait correspondre le chemin (x, y); des fonctions $p^{(n)}(.,.)$ des variables $x \in X$, $E \in \mathscr{Y}$, n naturel, ce qui sont des mesures de probabilité en tant que fonctions de E pour chaque $x \in X$ fixé, fonctions mesurables de x pour chaque $E \in \mathscr{Y}$ fixé (probabilités de transition du chemin x dans l'ensemble E après n pas).

Nous appellerons le système des fonctions (des probabilités de transition) $p^{(n)}(.,.)$, ou plus brièvement $p^{(n)}$, *système à liaisons complètes*. Bien entendu, nous pouvons introduire la définition du système à liaisons complètes $p^{(n)}(.,.)$ aussi du point de vue purement fonctionnel, analogue à [11]. Nous écrirons pour simplifier $p^{(1)}(x, E) = p(x, E)$.

Nous définissont, pour $f \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$,[1])

$$(1) \qquad (Tf)(x) = \int_Y f(\varphi(x, y))\, p(x, \mathrm{d}y) \quad \text{pour} \quad x \in X\,.$$

Sous les suppositions naturelles et très générales, par exemple si $\{(x, y);\ \varphi(x, y) \in A\} \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ pour chaque $A \in \mathscr{X}$, l'intégrale dans (1) est bien définie et T est une opération linéaire continue dans $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$, dont la norme est $\|T\| = 1$. (Voir C. T. Ionescu Tulcea [5] ou le livre [1], chapitre 5, § 6.) Dans tout cet article, nous supposerons que cela est satisfait et la lettre T désignera toujours l'opération définie de cette manière.

Nous utiliserons aussi une notation modifiée: pour $x \in X$ fixé, nous écrivons $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$, donc φ_x est une transformation de Y dans X.

Dans ce qui suit, on rencontre souvent les quantités

$$(2) \qquad p(x, \{y;\ \varphi(x, y) \in A\}) = p(x, \varphi_x^{-1}(A))\,, \quad x \in X,\ A \in \mathscr{X}\,.$$

[1]) $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ est l'espace des fonctions bornées $\mathscr{X}$-mesurables, voir [11], [3].

Sous les hypothèses usuelles pour les chaînes à liaisons complètes, on a $\{y; \varphi(x, y) \in A\} \in \mathscr{Y}$, donc les probabilités dans (2) sont bien définies. (2) en tant qu'une fonction de x est aussi mesurable, car

$$p(x, \{y; \varphi(x, y) \in A\}) = \int_Y \chi_A(\varphi(x, y))\, p(x, \mathrm{d}y) = (T\chi_A)(x)$$

et nous avons $T\chi_A \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$. Ensuite, (2) en tant qu'une fonction de $A \in \mathscr{X}$ pour $x \in X$ fixé, est une mesure de probabilité, donc (2) en tant que probabilités de transition définiront un certain système (une chaîne) de Markov. Il est aisé de voir qu'il s'agit précisément de la représentation bien connue d'une chaîne de Markov d'ordre plus grand par une chaîne d'ordre 1, que l'on obtient par l'extension de l'ensemble d'états. Les chaînes à liaisons complètes étudiées ici ne sont que les chaînes de Markov d'ordre infini (selon une autre terminologie) et pour les états de la nouvelle chaîne de Markov d'ordre 1 nous prenons les chemins de la chaîne à liaisons complètes. Les théorèmes de l'article présent peuvent aussi être démontrés alternativement à l'aide de cette représentation et des résultats de [11] et [12].

On sait bien des travaux cités ci-dessus que pour $A \in \mathscr{X}$ on a

$$(T^n\chi_A)(x) = p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A)) \quad \text{pour} \quad x \in X. \tag{3}$$

Nous allons terminer par remarquer qu'il est possible de définir une opération T^* dans $\boldsymbol{ba}(X, \mathscr{X})$[2]) par la formule

$$(T^*\lambda)(A) = \int_X p(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \lambda(\mathrm{d}x) \quad \text{pour} \quad \lambda \in \boldsymbol{ba}(X, \mathscr{X}),\ A \in \mathscr{X}. \tag{4}$$

Par une méthode analogue à celle de [11], on peut vérifier que T^* est l'opération adjointe à T. Il est clair aussi que T^* transforme les mesures σ-additives λ en mesures σ-additives.

2. MESURES SOUS-INVARIANTES ET INVARIANTES

Définition 1. Une mesure λ sur $\mathscr{X}$ s'appelle *mesure sous-invariante* pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$ si pour chaque $A \in \mathscr{X}$ on a

$$\int_X p(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \lambda(\mathrm{d}x) \leqq \lambda(A),$$

ou pour $\lambda \in \boldsymbol{ba}(X, \mathscr{X})$, dans une autre notation,

$$(T^*\lambda)(A) \leqq \lambda(A).$$

λ est dite *invariante* si dans ces relations on a le signe d'égalité.

[2]) $\boldsymbol{ba}(X, \mathscr{X})$ est l'espace des fonctions d'ensemble additives à variation bornée, voir [11], [3].

Théorème 1. *Pour chaque système à liaisons complètes $p^{(n)}$ il y a une mesure invariante $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ qui ne s'annule pas identiquement.*

Théorème 2. *Soit $p^{(n)}$ un système à liaisons complètes, X un espace compact de Hausdorff, $\mathscr{X}$ la σ-algèbre d'ensembles de Borel dans X. Si T transforme $\mathbf{C}(X)$ en lui-même, alors il y a une $\lambda \in \mathbf{rca}(X)$ qui vérifie $(T^*\lambda)(A) = \lambda(A)$ pour chaque ensemble de Baire et qui ne s'annule pas identiquement. Si encore T^* définie dans (4) transforme $\mathbf{rca}(X)$ en lui-même (ce qui est vrai par exemple pour X avec une base topologique dénombrable), alors cette mesure λ est invariante, c'est-à-dire $(T^*\lambda)(A) = \lambda(A)$ pour chaque $A \in \mathscr{X}$.*

Notons ici que le théorème 2 peut être employé quelquefois pour les systèmes à liaisons complètes. A savoir, on adopte souvent les hypothèses suivantes (cf. par exemple W. Doeblin, R. Fortet [2], C. T. Ionescu Tulcea, G. Marinescu [4], G. Ciucu, R. Theodorescu [1], chap. IV): X est un espace compact distancié avec la distance r. Désignons par $\mathbf{CL}^d(X)$ (pour $0 < d \leqq 1$) l'espace de toutes les fonctions f sur X telles que

$$\sup_{x_1, x_2 \in X} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{[r(x_1, x_2)]^d} < \infty .$$

Puis on suppose que T transforme $\mathbf{CL}^d(X)$ en lui-même et également, comme dans le cas général précédent, transforme $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ en lui-même.

Lemme 1. *Soit X un espace compact distancié. Si T est une opération linéaire continue dans $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ transformant $\mathbf{CL}^d(X)$ en lui-même, alors T transforme $\mathbf{C}(X)$ en lui-même.*

Démonstration. Avant tout, $\mathbf{CL}^d(X)$ est dense dans $\mathbf{C}(X)$, car évidemment $\mathbf{CL}^d(X)$ est une algèbre et d'après la généralisation de Stone du théorème de Weierstrass (voir N. Dunford, J. T. Schwartz [3], théorème IV. 6. 16), on obtient que la fermeture de $\mathbf{CL}^d(X)$ dans $\mathbf{C}(X)$ est égale à $\mathbf{C}(X)$. Alors si $f \in \mathbf{C}(X)$, il y a des fonctions $f_n \in \mathbf{CL}^d(X)$ telles que $\lim_n f_n = f$ en norme de $\mathbf{C}(X)$. Il en résulte que $\lim_n Tf_n = Tf$ en norme également et comme $Tf_n \in \mathbf{CL}^d(X) \subset \mathbf{C}(X)$, nous avons $Tf \in \mathbf{C}(X)$.

Comme, dans un espace distancié X, les ensembles de Baire sont identiques à ceux de Borel, nous voyons du théorème 2, que sous les hypothèses souvent utilisées pour les chaînes à liaisons complètes, il y a une mesure σ-additive invariante qui n'est pas zéro identiquement.

Théorème 3. *Si une mesure λ additive sous-invariante pour le système à liaisons complètes est finie, elle est invariante.*

Théorème 4. *Si une mesure $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$ est décomposée en sa part σ-additive σ et sa part purement additive κ, alors σ et κ sont des mesures invariantes. Si la mesure invariante $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ n'est pas purement additive, alors pour $p^{(n)}$ il y a une mesure invariante σ-additive $\sigma \in \mathbf{ca}(X, \mathscr{X})$ qui ne s'annule pas identiquement.*

3. REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DES SYSTÈMES GÉNÉRAUX À LIAISONS COMPLÈTES

Théorème 5. *Si μ est une mesure σ-additive sous-invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$ et si la transformation T est définie par la formule* (1) *pour $f \in \mathbf{L}_p(\mu)$, alors T est une opération linéaire continue dans $\mathbf{L}_p(\mu)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, avec la norme $\|T\|_p \leqq 1$.*

La démonstration peut être empruntée au travail de NELSON [8], après une petite modification.

Théorème 6. *Si $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ est une mesure sous-invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$ et si T est définie par* (1) *pour $f \in \mathbf{B}_p(\lambda)$, alors T est une opération linéaire continue dans $\mathbf{B}_p(\lambda)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, dont la norme est $\|T\|_p = 1$.*

Théorème 7. *Soit μ une mesure σ-additive sous-invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$. Alors pour chaque ensemble $A \in \mathscr{X}$, pour lequel $\mu(A) < \infty$, il y a une transformation $\mathbf{v}(A;.)$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans l'espace complexe $\mathbf{L}_2(\mu)$ telle que*

$$(5) \qquad p^{(n)}(., \varphi_{.}^{-1}(A)) = \int_0^{2\pi} e^{int}\, \mathbf{v}(A; \mathrm{d}t) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où les égalités sont entendues μ-presque partout. Ensuite, si $B \in \mathscr{X}$ a la mesure $\mu(B) < \infty$, alors il y a une fonction complexe $v(A, B; .)$ à variation bornée dans $[0, 2\pi]$ telle que

$$(6) \qquad \int_B p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} e^{int}\, v(A, B; \mathrm{d}t) \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(7) \qquad \int_A p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(B))\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, v(A, B: \mathrm{d}t) \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Théorème 8. *Soit $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ une mesure sous-invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$. Alors, pour chaque paire d'ensembles $A, B \in \mathscr{X}$ il y a une fonction complexe $v(A, B; .)$ à variation bornée dans $[0, 2\pi]$ telle que*

$$(8) \qquad \int_B p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} e^{int}\, v(A, B; \mathrm{d}t) \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(9) \qquad \int_A p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(B))\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, v(A, B; \mathrm{d}t) \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

4. REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DES SYSTÈMES AUTOADJOINTS À LIAISONS COMPLÈTES

Définition 2. Soit μ une mesure σ-additive sous-invariante pour le système a liaisons complètes $p^{(n)}$. Nous dirons que le système $p^{(n)}$ est *μ-autoadjoint* si pour chaque

$A, B \in \mathscr{X}$ nous avons

$$\int_B p(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_A p(x, \varphi_x^{-1}(B))\, \mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Théorème 9. *Le système à liaisons complètes $p^{(n)}$ est μ-autoadjoint si, et seulement si, la transformation T, définie par (1) pour $f \in \mathbf{L}_2(\mu)$, est une opération autoadjointe dans $\mathbf{L}_2(\mu)$. Si c'est le cas, alors μ est une mesure invariante pour $p^{(n)}$.*

Maintenant, attirons notre attention au cas suivant: Supposons que $\mathscr{X}$ est engendrée par un système dénombrable d'ensembles et que pour μ-presque tous $x \in X$ il existe des dérivées de Radon-Nikodym $\mathrm{d}p(x, \varphi_x^{-1}(.))/\mathrm{d}\mu(.) = h(x, .)$, où la fonction h de deux variables est choisie $(\mathscr{X} \times \mathscr{X})$ — mesurable. Dans ce cas, le système $p^{(n)}$ est μ-autoadjoint si et seulement si

$$h(x_0, x_1) = h(x_1, x_0) \quad \text{pour} \quad (\mu \times \mu) - \text{presque tous } (x_0, x_1)\,.$$

Remarquons encore que pour les systèmes à liaisons complètes ordinairement étudiés la condition que $\mathscr{X}$ est engendrée par un système dénombrable est satisfaite. On suppose souvent que X est un espace compact distancié. Donc X est séparable; désignons par $x_1, x_2, \ldots$ une suite dense dans X. Il est naturel de supposer que $\mathscr{X}$ est la σ-algèbre d'ensembles de Borel, c'est-à-dire engendrée par les ensembles ouverts dans X. Mais, évidemment, cette σ-algèbre est engendrée par le système dénombrable des hypersphères ouvertes avec les centres x_j, $j = 1, 2, \ldots$, et rayons rationnels.

Théorème 10. *Si $p^{(n)}$ est un système μ-autoadjoint à liaisons complètes, alors pour tout ensemble $A \in \mathscr{X}$, pour lequel $\mu(A) < \infty$, il y a une transformation $\mathfrak{v}(A; .)$ de l'intervalle $[-1, 1]$ dans l'espace réel $\mathbf{L}_2(\mu)$ telle que*

$$(10) \qquad p^{(n)}(., \varphi_.^{-1}(A)) = \int_{-1}^{1} t^n\, \mathfrak{v}(A; \mathrm{d}t) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où il s'agit des égalités μ-presque partout. Ensuite, si $B \in \mathscr{X}$ a la mesure $\mu(B) < \infty$, alors il y a une fonction réelle $v(A, B; .)$ à variation bornée dans $[-1, 1]$ telle que

$$(11) \quad \int_B p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_A p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(B))\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{-1}^{1} t^n\, v(A, B; \mathrm{d}t)$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Théorème 11. *Soit $\lambda \in \mathbf{ba}(X, \mathscr{X})$ une mesure invariante pour le système à liaisons complètes $p^{(n)}$. La transformation T définie par (1) est une opération symétrique dans $\mathbf{B}_2(\lambda)$ si et seulement si pour chaque couple d'ensembles $A, B \in \mathscr{X}$ on a*

$$\int_B p(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_A p\,(x, \varphi_x^{-1}(B))\, \lambda(\mathrm{d}x)\,.$$

Si c'est le cas, alors pour chaque couple d'ensembles $A, B \in \mathscr{X}$ il y a une fonction réelle $v(A, B; .)$ à variation bornée dans $[-1, 1]$ telle que

$$(12) \quad \int_B p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A))\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_A p^{(n)}\,(x, \varphi_x^{-1}((B))\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_{-1}^{1} t^n v(A, B; \mathrm{d}t)$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à la question de savoir pour quels ensembles $E \in \mathscr{Y}$ il est possible de représenter $p^{(n)}(x, E)$ à l'aide des théorèmes des paragraphes 3 et 4.

Dans ces paragraphes-là, nous avons déduit certaines représentations intégrales pour $p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A))$, où $A \in \mathscr{X}$. Déjà dans l'introduction, après la formule (2), nous avons remarqué que sous les suppositions d'habitude faites, on a $\varphi_x^{-1}(A) \in \mathscr{Y}$. Mais nous rencontrons ici les deux inconvénients suivants: Premièrement, l'ensemble $\varphi_x^{-1}(A)$ dépend, en général, de x, ce qui est gênant. Deuxièmement, les ensembles $E \in \mathscr{Y}$ ne sont pas nécessairement de la forme $\varphi_x^{-1}(A)$, $A \in \mathscr{X}$ (je ne sache pas qu'on pose quelque condition de cette sorte dans la littérature sur les chaînes à liaisons complètes), donc on ne peut pas obtenir les représentations des probabilités $p^{(n)}(x, E)$ en général à l'aide de nos théorèmes, comme nous l'aurions désiré.

Ces inconvénients peuvent être surmontés par exemple des deux façons suivantes.

Premièrement, on peut poser la condition suivante: Si $E \in \mathscr{Y}$ est un ensemble arbitraire, nous demandons que l'ensemble A_E de tous $x \in X$ de la forme $x = \varphi(x_1, y)$, où x_1 parcourt X et y parcourt Y, appartienne à $\mathscr{X}$. Evidemment, on a $\varphi_x^{-1}(A_E) = E$ pour $x \in X$ arbitraire, donc $p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A_E)) = p^{(n)}(x, E)$, et la situation est claire.

Sans cette condition, on peut procéder toutefois d'une autre manière qui a été choisie à l'origine dans le travail [10] et qui amène de petites modifications des représentations. Quoique A_E n'appartienne pas nécessairement à $\mathscr{X}$ et donc la fonction caractéristique de A_E n'appartienne pas nécessairement à $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$, toutefois, dans la théorie des chaînes à liaisons complètes, on demande d'habitude $p(. E) \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ pour chaque $E \in \mathscr{Y}$ (et même souvent $p(., E) \in \mathbf{C}(X)$). Ensuite, on sait bien, si on substitue dans (1) la fonction $p(., E)$ pour f, alors on obtiendra

$$(T p(., E))(x) = p^{(2)}(x, E) \quad \text{pour} \quad x \in X,$$

et, en général,

$$(T^n p(., E))(x) = p^{(n+1)}(x, E) \quad \text{pour} \quad x \in X, \; n = 1, 2, \ldots \tag{3'}$$

De ces relations, on peut obtenir par la méthode bien connue les représentations des probabilités de transition avec la modification suivante qu'on a $p^{(n+1)}$ dans les formules au lieu de $p^{(n)}$. Avec cela, bien entendu, on perd une certaine symétrie des représentations. Ainsi par exemple, au lieu de (5) et (6) on obtiendra maintenant pour $E \in \mathscr{Y}$, $B \in \mathscr{X}$, $\int\limits_X [p(x, E)]^2 \mu(\mathrm{d}x) < \infty$, $\mu(B) < \infty$ les formules

$$p^{(n+1)}(., E) = \int_0^{2\pi} e^{int} \boldsymbol{v}(E; \mathrm{d}t), \tag{5'}$$

$$\int_B p^{(n+1)}(x, E) \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} e^{int} v(E, B; \mathrm{d}t), \tag{6'}$$

mais l'analogie de (7) n'existe plus. Au lieu de (10) et (11) on obtiendra sous conditions analogues

$$(10') \qquad p^{(n+1)}(.\,, E) = \int_{-1}^{1} t^n \, v(E; \mathrm{d}t)\,,$$

$$(11') \qquad \int_B p^{(n+1)}(x, E)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{-1}^{1} t^n \, v(E, B; \mathrm{d}t)\,,$$

mais la première égalité de (11) ne peut plus être transférée.

Enfin, montrons ici encore explicitement que les résultats sur les représentations des systèmes à liaisons complètes embrassent, comme cas spéciaux, les représentations des systèmes de Markov. A savoir, dans le cas d'un système de Markov, nous posons $X = Y, \mathscr{X} = \mathscr{Y}, \varphi(x, y) = y$ pour chaque $x \in X$ et nous avons évidemment $\varphi_x^{-1}(A) = A$, $p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A)) = p^{(n)}(x, A)$.

6. REPRÉSENTATION PAR UN SYSTÈME DE MARKOV DANS UN ESPACE COMPACT DE HAUSDORFF

Dans ce dernier paragraphe, il s'agit de la représentation d'un genre tout à fait différent, à savoir de la représentation d'un système à liaisons complètes par un système de Markov dans un espace compact de Hausdorff. Naturellement, il n'est pas surprenant que pour le système représentant on peut choisir un système de Markov, parce qu'on sait bien que chaque chaîne de Markov d'ordre arbitraire (et aussi d'ordre infini, c'est-à-dire à liaisons complètes) peut être représentée par une chaîne de Markov d'ordre 1, si on élargit l'ensemble d'états.

Théorème 12. *Soit $p^{(n)}(.\,, .)$ un système à liaisons complètes (où les espaces abstraits X, Y sont arbitraires). Alors il y a un espace topologique S avec la σ-algèbre $\mathscr{S}_0$ de ses ensembles de Baire et en lui un système de Markov $\pi^{(n)}(.\,, .)$, jouissant des propriétés suivantes:*

(a) *S est un espace compact de Hausdorff totalement discontinu,*

(b) *$\pi^{(n)}(s, .) \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S}_0)$ pour chaque $s \in S$, n naturel,*

(c) *les opérations correspondantes de Markov V^n, n naturel, définies par*

$$(V^n f)(s) = \int_S f(s_1)\, \pi^{(n)}(s, \mathrm{d}s_1)$$

transforment $f \in \mathbf{C}(S)$ en $V^n f \in \mathbf{C}(S)$,

(d) *pour chaque ensemble ouvert (resp. fermé) $M \in \mathscr{S}_0$ les fonctions $\pi^{(n)}(.\,, M)$ sont semi-continues inférieurement (resp. supérieurement), pour chaque ensemble ouvert-fermé $M \in \mathscr{S}_0$ les fonctions $\pi^{(n)}(.\,, M) \in \mathbf{C}(S)$,*

(e) *il existe une transformation ψ de l'espace X dans S et une transformation isomorphe Ψ de la σ-algèbre $\mathscr{X}$ en l'algèbre $\mathscr{S}_{of}$ de tous les ensembles ouverts-*

fermés dans S telles qu'on a

$$p^{(n)}(x, \varphi_x^{-1}(A)) = \pi^{(n)}(\psi(x), \Psi(A))$$

pour chaque $x \in X$, $A \in \mathscr{X}$, n naturel.

La démonstration de ce théorème peut être construite d'une manière tout à fait analogue à celle donnée dans [12]. Il est clair qu'on peut transférer aussi la remarque du paragraphe 5 concernant la condition, que A_E appartienne à $\mathscr{X}$; alors on obtiendra dans (e) la représentation de $p^{(n)}(x, E)$.

Littérature

[1] *G. Ciucu, R. Theodorescu*: Procese cu legături complete. Bucureşti 1960.

[2] *W. Doeblin, R. Fortet*: Sur des chaînes à liaisons complètes. Bull. Soc. Math. France *65* (1937), 132—148.

[3] *N. Dunford, J. T. Schwartz*: Linear operators I. Interscience Publishers, New York 1958.

[4] *C. T. Ionescu Tulcea, G. Marinescu*: Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. Ann. of Math. II. ser. *52* (1950), 140—147.

[5] *C. T. Ionescu Tulcea*: On a class of operators occurring in the theory of chains of infinite order. Canadian J. Math. *11* (1959), 112—121.

[6] *D. G. Kendall*: Integral representations for Markov transition probabilities. Bull. Amer. Math. Soc. *64* (1958), 358—362.

[7] *D. G. Kendall*: Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. Probability & Statistics, The Harald Cramér Volume, New York 1959, 139—161.

[8] *E. Nelson*: The adjoint Markoff process. Duke Math. J. *25* (1958), 671—690.

[9] *O. Onicescu, G. Mihoc*: Sur les chaînes de variables statistiques. Bull. Sci. Math. 2, *59* (1935), 174—192.

[10] *Z. Šidák*: Integrální representace pravděpodobností přechodu Markovových řetězců s obecným systémem stavů. (Représentations intégrales des probabilités de transition dans les chaînes de Markov avec un système général d'états.) Thèse, Praha 1960.

[11] *Z. Šidák*: Integral representations for transition probabilities of Markov chains with a general state space. Czech. Math. J. (sous presse).

[12] *Z. Šidák*: Операторы в пространстве непрерывных функций и представление процессов Маркова в компактном пространстве Хаусдорфа. Чех. мат. ж. (sous presse).

Výtah

REPRESENTACE PRAVDĚPODOBNOSTÍ PŘECHODU ŘETĚZCŮ S ÚPLNOU VAZBOU

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

Representace pravděpodobností přechodu integrálními momentovými vzorci a representace v kompaktním Hausdorffově prostoru, odvozené v pracích [11] a [12] pro

Markovovy řetězce (1. řádu), jsou zobecněny pro řetězce s úplnou vazbou (tj. Markovovy řetězce nekonečného řádu).

Резюме

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА ЦЕПЕЙ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ

ЗБЫНЕК ШИДАК, (Zbyněk Šidák), Прага

Представления вероятностей перехода интегральными моментными формулами и представление в компактном пространстве Хаусдорфа, выведенные в работах [11] и [12] для цепей Маркова (простых), обобщаются в настоящей работе на случай цепей с полными связями (т. е. цепей Маркова бесконечно усложняющихся, бесконечного порядка).