Čestmír Vitner

Poznámka k rotačnímu oskulačnímu kuželi křivek v centroeuklidovském prostoru E_3^c

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 320--325

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117445

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

POZNÁMKA K ROTAČNÍMU OSKULAČNÍMU KUŽELI KŘIVEK V CENTROEUKLIDOVSKÉM PROSTORU E_3^c

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Došlo dne 5. května 1961)

V práci je dána nová geometrická charakterisace rotačního oskulačního kužele křivky v centroeuklidovském prostoru E_3^c (věta 2). Důkaz věty 2 se opírá o větu 1, která udává vztah mezi euklidovskými a centroeuklidovskými invarianty křivek na kouli se středem v počátku prostoru a má tak samostatný význam.

Mějme křivku $r = r(s)$ v E_3^c, kde s je euklidovský oblouk, při čemž determinant $[dr/ds, d^2r/ds^2, d^3r/ds^3]$ je různý od nuly. Budiž e_0, e_1, e_2 průvodní euklidovský trojhran, sestrojený ortonormalisačním procesem E. Schmidta z vektorů $dr/ds, dr^2/ds^2, d^3r/ds^3$. Platí, jak známo, Frenetovy vzorce

$$\frac{de_0}{ds} = \kappa_1 e_1\,, \quad \frac{de_1}{ds} = -\kappa_1 e_0 + \kappa_2 e_2\,, \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa_2 e_1\,,$$

kde κ_1 a κ_2 jsou euklidovské křivosti křivky. Pro κ_1, κ_2 platí známé vzorce

$$\text{(1)} \qquad \text{a)}\ \kappa_1 = \sqrt{\left(\frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^2r}{ds^2}\right)}, \qquad \text{b)}\ \kappa_2 = \frac{|[dr/ds, d^2r/ds^2, d^3r/ds^3]|}{\kappa_1^2}.$$

Pro euklidovský průvodní trojhran se pomocí Frenetových vzorců snadno odvodí vzorce

$$\text{(2)} \qquad e_0 = \frac{dr}{ds}, \quad e_1 = \frac{1}{\kappa_1}\frac{d^2r}{ds^2}, \quad e_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\frac{dr}{ds} - \frac{d\kappa_1/ds}{\kappa_1^2\kappa_2}\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\frac{d^3r}{ds^3}.$$

Předpokládejme, že pro naši křivku platí $[r, r^{\cdot}, r^{\cdot\cdot}] \neq 0$. Označme nyní φ centroeuklidovský oblouk na r, tj. euklidovský oblouk na křivce a_0, určené vztahem $r = \varrho a_0$, kde ϱ je vzdálenost bodu křivky od počátku. Ortonormalisačním procesem E. Schmidta sestrojme z vektorů $r, dr/d\varphi, d^2r/d\varphi^2$ průvodní centroeuklidovský trojhran a_0, a_1, a_2. Platí pak Frenetovy vzorce

$$\text{(3)} \qquad a_0' = a_1\,, \quad a_1' = -a_0 + \omega a_2\,, \quad a_2' = -\omega a_2\,,$$

kde ω je centroeuklidovská křivost. (Pro podrobnosti viz práci [1].) Umluvme se v dalším používat čárky pro označení derivací podle centroeuklidovského oblouku.

Uvažujme nyní speciálně křivky na kouli se středem v počátku prostoru. Platí tedy ϱ = konst a můžeme zřejmě položit $s = \varrho\varphi$. Nyní platí následující věta:

Věta 1. *Pro křivky na kouli poloměru ϱ se středem v počátku prostoru platí vzorce*

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\varrho}, \quad \kappa_2 = \frac{|\omega'|}{\varrho(1+\omega^2)}, \tag{4}$$

$$e_0 = a_1, \quad e_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\, a_0 + \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\, a_2,$$

$$e_2 = \varepsilon\left(\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\, a_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\, a_2\right), \text{ kde } \varepsilon = \operatorname{sgn} \omega'.$$

Důkaz. Vyjdeme ze vzorců (1) a (2). Vyjádřeme derivaci křivky podle s pomocí base a_0, a_1, a_2. Vzhledem k tomu, že platí $ds/d\varphi = \varrho$, dostaneme pomocí Frenetových vzorců (3) postupně:

$$\frac{dr}{ds} = (\varrho a_0)' \frac{d\varphi}{ds} = \varrho a_1 \frac{1}{\varrho} = a_1, \tag{5}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{\varrho}\, a_1' = \frac{1}{\varrho}(-a_0 + \omega a_2),$$

$$\frac{d^3r}{ds^3} = \frac{1}{\varrho^2}\left[-a_0' + (\omega a_2)'\right] = \frac{1}{\varrho^2}\left[-a_1(1+\omega^2) + \omega' a_2\right].$$

Z (1,a) dostaneme podle (5)

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{\varrho^2}}.$$

Z (1,b) pak podle (5)

$$\kappa_2 = \frac{\left|\left[a_1, \frac{1}{\varrho}(-a_0 + \omega a_2), \frac{1}{\varrho^2}(-a_1(1+\omega^2) + \omega' a_2)\right]\right|}{\kappa_1^2} =$$

$$= \frac{|\omega'|}{\varrho^3 \kappa_1^2}\, |[a_1, -a_0, a_2]| = \frac{|\omega'| \varrho^2}{\varrho^3(1+\omega^2)} = \frac{|\omega'|}{\varrho(1+\omega^2)}.$$

Abychom dostali zbývající tvrzení věty o průvodních trojhranech, dosaďme derivace (5) do vzorce (2). S použitím již dosažených výsledků pro křivosti dostaneme

$$e_0 = a_1, \quad e_1 = \frac{1}{\kappa_1} \cdot \frac{1}{\varrho}(-a_0 + \omega a_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}(-a_0 + \omega a_2),$$

$$e_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\, a_1 - \frac{d\kappa_1/ds}{\kappa_1^2 \kappa_2} \frac{1}{\varrho}(-a_0 + \omega a_2) + \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{1}{\varrho^2}\left[-a_1(1+\omega^2) + \omega' a_2\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\varrho} \frac{\varrho(1+\omega^2)}{|\omega'|} a_1 - \frac{\omega\omega'}{\varrho^2\sqrt{1+\omega^2}} \frac{\varrho^2}{(1+\omega^2)} \frac{\varrho(1+\omega^2)}{|\omega'|} \frac{1}{\varrho} \,.$$

$$. (-a_0 + \omega a_2) + \frac{\varrho}{\sqrt{1+\omega^2}} \frac{\varrho(1+\omega^2)}{|\omega'|} \frac{1}{\varrho^2} [-a_1(1+\omega^2) + \omega' a_2] =$$

$$= \frac{\omega'}{|\omega'|} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} [\omega a_0 - \omega^2 a_2 + (1+\omega^2) a_2] =$$

$$= \frac{\omega'}{|\omega'|} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} (\omega a_0 + a_2) \,.$$

Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Dalo by se ukázat, že věta 1 platí i pro případ, že ve zkoumaném bodě platí $\kappa_1 \neq 0$, $\kappa_2 = 0$, definujeme-li ovšem vhodně binormálu a číslo ε.

Věta 1 má svůj samostatný význam. My použijeme její části k důkazu následující věty 2, která je hlavním obsahem tohoto článku. V této větě se bude používat pojmu rotačního oskulačního kužele křivky v E_3^c, který byl autorem zaveden v práci [1].

Věta 2. *V každém obyčejném bodě křivky v E_3^c existuje právě jeden rotační kužel s vrcholem v počátku, který má s křivkou v tomto bodě styk druhého řádu. Tento kužel splývá s rotačním oskulačním kuželem křivky v tomto bodě.*

Důkaz. Zvolme pravoúhlou souřadnou soustavu $\{0, a_0, a_1, a_2\}$, kde 0 je počátkem prostoru a a_0, a_1, a_2 je původní centroeuklidovský trojhran křivky v uvažovaném bodě. Pro průvodič r bodu v prostoru E_3^c pak platí $r = xa_0 + ya_1 + za_2$. Mějme nyní rotační kužel s vrcholem v počátku, s osou rotace se směrovými kosiny α, β, γ a s polovičním vrcholovým úhlem ψ. Označme $p = \cos^2 \psi$. Rovnici zmíněného kužele pak můžeme psát, jak známo, ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{p} (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0 \,. \tag{6}$$

Přitom podle předpokladu platí

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \,. \tag{7}$$

Pomocí Frenetových vzorců (3) a Taylorovy věty lze pro souřadnice x, y, z bodu křivky $r(\varphi)$ v bodě $\varphi = 0$ odvodit snadno rozvoje

$$\begin{aligned} x &= \varrho + \varrho'\varphi + \frac{\varrho'' - \varrho}{2} \varphi^2 + \frac{\varrho''' - 3\varrho'}{6} \varphi^3 + \dots \,, \\ y &= \quad \varrho\varphi + \quad \varrho'\varphi^2 \quad + \frac{3\varrho'' - \varrho(1+\omega^2)}{6} \varphi^3 + \dots \,, \\ z &= \qquad \frac{\varrho\omega}{2} \varphi^2 - \frac{3\varrho'\omega + \varrho\omega'}{6} \varphi^3 + \dots \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Dosadíme-li tyto rozvoje do rovnice (6), dostaneme

$$(9)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{p}(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 =$$

$$= \varrho^2\left(1 - \frac{1}{p}\alpha^2\right) + \varphi\left[\left(1 - \frac{1}{p}\alpha^2\right)2\varrho\varrho' - \frac{2}{p}\alpha\beta\varrho^2\right] +$$

$$+ \varphi^2\left[\left(1 - \frac{1}{p}\alpha^2\right)(\varrho'^2 + \varrho\varrho'' - \varrho^2) + \left(1 - \frac{1}{p}\beta^2\right)\varrho^2 - \frac{4}{p}\alpha\beta\varrho\varrho' - \frac{1}{p}\alpha\gamma\varrho^2\omega\right] +$$

$$+ \varphi^3\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\alpha^2\right)\left[\frac{\varrho(\varrho''' - 3\varrho')}{3} + \varrho'(\varrho'' - \varrho)\right] + \left(1 - \frac{1}{p}\beta^2\right)2\varrho\varrho' -\right.$$

$$- \frac{2}{p}\alpha\beta\left[\frac{\varrho\varrho'' - \varrho^2}{2} + \varrho'^2 + \frac{3\varrho\varrho'' - \varrho^2(1 + \omega^2)}{6}\right] - \frac{2}{p}\alpha\gamma\left[\frac{\varrho'\varrho\omega}{2} + \varrho\,\frac{3\varrho'\omega + \varrho\omega'}{6}\right] -$$

$$\left. - \frac{1}{p}\beta\gamma\varrho^2\omega\right\} + \ldots = 0\,.$$

Aby kužel (6) měl s křivkou v bodě $\varphi = 0$ styk druhého řádu, musí se rovnat nule koeficienty u φ^0, φ, φ^2 v rozvoji (9).

Postupně tedy dostaneme

$$1 - \frac{1}{p}\alpha^2 = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \varrho^2 - \frac{1}{p}\alpha\gamma\varrho^2\omega = 0\,,$$

tj.

$$\alpha^2 = p\,, \quad \beta = 0\,, \quad \alpha\gamma\omega = p\,.$$

Podle (7) také platí $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$.

Odtud dostaneme $\alpha\gamma\omega = \alpha^2$, tj. $\alpha = \gamma\omega$ a dále

$$\gamma^2\omega^2 + \gamma^2 = 1\,, \quad \text{tj.} \quad \gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \omega^2}}\,.$$

Celkem tedy máme

$$(10)\qquad \alpha = \frac{\omega}{\pm\sqrt{1 + \omega^2}}\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \omega^2}}\,, \quad p = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}\,.$$

Existuje tedy jediný kužel požadované vlastnosti a má rovnici

$$(11)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1 + \omega^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}\,z\right)^2 = 0\,.$$

Osa rotace tohoto rotačního kužele má směrové kosiny $\omega/\sqrt{1 + \omega^2}$, 0, $1/\sqrt{1 + \omega^2}$, které určují zřejmě vektor

$$(12)\qquad \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}\,a_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}\,a_2\,.$$

Průvodní centroeuklidovský trojhran a_0, a_1, a_2 však splývá, jak známo (viz [1]), s průvodním trojhranem jeho indikatrix (tj. průmětu křivky s počátku na jednotkovou kouli se středem v počátku prostoru). Odtud, ze vzorce (12) a z věty 1 plyne, že vektor (12) je jednotkový vektor binormály indikatrix zkoumané křivky. Odtud konečně, podle definice rotačního oskulačního kužele (viz [1]), plyne, že nalezený kužel je vskutku oskulačním kuželem naší křivky. Tím je věta dokázána.

Poznámka 2. Ze vztahu $p = \omega^2/(1 + \omega^2)$ odvozeného v důkazu věty 2 snadno plyne vzorec $\omega^2 = \operatorname{cotg}^2 \psi$, kde ψ je poloviční vrcholový úhel rotačního oskulačního kužele křivky. To je známý geometrický význam centroeuklidovské křivosti ω (viz [1]).

Poznámka 3. Hledejme ještě podmínku pro to, aby oskulační rotační kužel měl v uvažovaném bodě s křivkou styk třetího řádu. Z rovnice (9) dostaneme podmínku

$$2\varrho\varrho' - \frac{\alpha\gamma}{p} \frac{6\varrho\varrho'\omega + \varrho^2\omega'}{3} = 0\,,$$

což se pomocí (10) redukuje na $-\varrho^2\omega'/3\omega = 0$ neboli $\omega' = 0$ v uvažovaném bodě. Tento výsledek je v souhlase s tím, že křivka na rotačním kuželi se středem v počátku je charakterisována podmínkou $\omega =$ konst. (Viz [1].)

Literatura

[1] Ч. Витнер: Диференциалная геометрия кривых в центроевклидовом пространстве E_n^c Чех. мат. журнал, *12* (*87*), 1962, 119–143.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К СОПРИКАСАЮЩЕМУСЯ КОНУСУ ВРАЩЕНИЯ КРИВЫХ В ЦЕНТРОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_3^c

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

Главным результатом работы является следующая теорема (теорема 2): В каждой обыкновенной точке кривой в E_3^c существует в точности один конус вращения с вершиной в начале координат, имеющий с кривой в этой точке касание второго порядка. Этот конус совпадает с соприкасающимся конусом кривой в этой точке. (Определение этого конуса было дано автором в работе [1].) Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1. Теорема 1 имеет, однако, свое самостоятельное значение; она дает соотношение между евклидовыми и центроевклидовыми кривизнами, а также между евклидовым и центроевклидовым сопровождающими трехгранниками кривых на шаре с центром в начале пространства.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DEN ROTATIONS-OSKULATIONSKEGEL DER KURVEN IM ZENTRALEUKLEIDISCHEN RAUME E_3^c

ČESTMÍR VITNER, Praha

Als Hauptresultat der Arbeit erscheint folgender Satz (Satz 2): In jedem gewöhnlichen Punkte der Kurve im E_3^c existiert gerade ein Rotationskegel mit dem Scheitel im Ursprung, welcher in diesem Punkte mit der Kurve eine Berührung zweiter Ordnung besitzt. Dieser Kegel ist mit dem Oskulationskegel der Kurve im betrachteten Punkte identisch.(Dieser Kegel wurde von dem Verfasser in der Arbeit [1] definiert.) Der Beweis von Satz 2 ist auf Satz 1 begründet. Der Satz 1 hat jedoch eine selbstständige Bedeutung; er gibt eine Beziehung zwischen den eukleidischen und zentraleukleidischen Krümmungen sowie zwischen dem eukleidischen und zentraleukleidischen begleitenden Dreikant der Kurven auf der Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Raumes an.