Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

VYŠETROVANIE GRAFOV POMOCOU MATÍC

JURAJ BOSÁK, Bratislava

(Došlo dne 30. listopadu 1960)

V práci sú definované štyri číselné funkcie štvorcových matíc. Uvádza sa rekurentný spôsob výpočtu hodnôt týchto funkcií a použitie týchto funkcií na určenie počtu niektorých podgrafov a iných príbuzných objektov (faktorov, kružníc, hamiltonovských cyklov, ciest, atď.) daného grafu.

1. Existencia vzájomných vzťahov medzi maticami a grafmi je dobre známa. Z podobného hľadiska ako je naše, sú tieto vzťahy vyšetrované v [4, 5, 6, 7, 8] a najmä v [3]. Význam základných operácií se štvorcovými maticami (včítane booleovských operácií) pre orientované grafy je vyložený v [4], kap. XIV a čiastočne v [5]. (Poznamenajme, že tieto výsledky možno ľahko zovšeobecniť pre prípad čiastočne orientovaných grafov.)

My si budeme všímať niektoré číselné funkcie štvorcových matíc, ktoré možno použiť na skúmanie grafov.

2. Najprv zavedieme niekoľko označení. V celom článku n označuje dané prirodzené číslo, i, j, k, l prirodzené čísla neprevyšujúce n. Množinu všetkých permutácií (resp. všetkých permutácií, ktoré sú súčinom disjunktných transpozícií, resp. všetkých cyklických permutácií) z prvkov $1, 2, \ldots, n$ označme $\alpha(n)$ (resp. $\beta(n)$, resp. $\gamma(n)$). Ďalej definujme množinu $\delta(n)$ takto: $\delta(1) = \emptyset$, $\delta(n)$ pre $n > 1$ nech je množina všetkých variácií $[s_1, s_2, \ldots, s_r]$, $1 \leqq r \leqq n - 1$ bez opakovania z prvkov $2, 3, \ldots, n$.

Nech je teraz $U = \|u_{ij}\|$ štvorcová matica stupňa n, ktorej prvky u_{ij} sú reálne čísla. Definujme nasledujúce štyri funkcie matice U:

$$A(U) = \sum_{\sigma \in \alpha(n)} u_{1\sigma(1)} u_{2\sigma(2)} \ldots u_{n\sigma(n)}, \tag{1}$$
$$B(U) = \sum_{\sigma \in \beta(n)} u_{1\sigma(1)} u_{2\sigma(2)} \ldots u_{n\sigma(n)},$$
$$C(U) = \sum_{\sigma \in \gamma(n)} u_{1\sigma(1)} u_{2\sigma(2)} \ldots u_{n\sigma(n)},$$
$$D(U) = \sum_{[s_1, s_2, \ldots, s_r] \in \delta(n)} u_{1s_1} u_{s_1 s_2} \ldots u_{s_{r-1} s_r} u_{s_r 1} .^{1})$$

[1]) Prázdny súčet definujeme ako 0. Ak sú všetky prvky matice nezáporné, zrejme je $C(U) \leqq A(U)$, $B(U) \leqq A(U)$, $C(U) \leqq D(U)$. Funkcia $A(U)$, ktorej členy sú až na znamienko zhodné s členmi determinantu matice U, sa objavovala v literatúre najmä v súvislosti s doteraz nerozriešeným tzv. permanent-problémom [1], [2] (str. 238), [9].

3. Pre výpočet hodnôt týchto funkcií možno použiť rekurentný postup, ktorý v ďalšom popíšeme. Definujme matice $U_{kl}^{(1)}$, $U_{kl}^{(2)}$, $U_{kl}^{(3)}$ takto:

Nech $n \geqq 2$. Potom maticu, ktorú dostaneme z matice U vynechaním k-teho riadku a l-teho stĺpca pri nezmenenom poradí ostatných riadkov a stĺpcov označme $U_{kl}^{(1)}$. Maticu $U_{kl}^{(2)}$ definujme nasledovne: pre $k = l$ nech je $U_{kl}^{(2)}$ nulová matica rádu $n - 1$, pre $k \neq l$ $U_{kl}^{(2)}$ dostaneme z $U_{kl}^{(1)}$ tak, že posunieme prvky bývalého k-teho stĺpca a l-teho riadku (počítané podľa označenia v U) na prvé miesto bez zmeny poradia ostatných riadkov a stĺpcov. Nech $n \geqq 3$. Definujme maticu $U_{kl}^{(3)}$: pre $k = l$ je $U_{kl}^{(3)}$ nulová matica rádu $n - 2$, pre $k \neq l$ $U_{kl}^{(3)}$ dostaneme z U vynechaním k-teho riadku, l-teho riadku, k-teho stĺpca a l-teho stĺpca.

Ak teraz označíme

(2)
$$\begin{aligned} A_{kl} &= A(U_{kl}^{(1)}) \quad (n \geqq 2), \\ B_{kl} &= B(U_{kl}^{(3)}) \quad (n \geqq 3), \\ C_{kl} &= C(U_{kl}^{(2)}) \quad (n \geqq 2), \\ D_{kl} &= D(U_{kl}^{(2)}) \quad (n \geqq 2), \end{aligned}$$

platia vzorce

(3)
$$\begin{aligned} A(U) &= \sum_{j=1}^{n} u_{kj} A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} u_{il} A_{il} \quad (n \geqq 2), \\ B(U) &= \sum_{j=1}^{n} u_{kj} u_{jk} B_{kj} = \sum_{i=1}^{n} u_{il} u_{li} B_{il} \quad (n \geqq 3), \\ C(U) &= \sum_{j=1}^{n} u_{kj} C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} u_{il} C_{il} \quad (n \geqq 2), \\ D(U) &= u_{11} + \sum_{j=2}^{n} u_{1j} D_{1j} = u_{11} + \sum_{i=2}^{n} u_{i1} D_{i1} \quad (n \geqq 2), \end{aligned}$$

ktoré pripomínajú vzorce pre výpočet determinantu rozvojom podľa prvkov istého riadku (stĺpca). Správnosť týchto formúl vyplýva priamo z definícií jednotlivých výrazov a zo základných vlastností permutácií a variácií. Pomocou vzorcov (3) je možné redukovať výpočet hodnôt funkcií A, C, D na vyšetrenie hodnôt v maticiach stupňa 1 a v prípade funkcie B na vyšetrenie hodnôt v maticiach stupňa 1 alebo 2.

Pomocou vzorcov (3) ľahko možno zistiť aj počty a_n, b_n, c_n, d_n členov rozvoja funkcií A, B, C, D všeobecnej matice stupňa n. Je vidieť, že platia rekurentné vzťahy

(4)
$$\begin{aligned} &a_1 = 1, & & a_{n+1} = (n + 1)\, a_n, \\ &b_1 = 0, \quad b_2 = 1, & & b_{n+2} = (n + 1)\, b_n, \\ &c_1 = 1, & & c_{n+1} = n c_n, \\ &d_1 = 1, & & d_{n+1} = 1 + n d_n, \end{aligned}$$

z ktorých indukciou vyplýva

$$(5)\qquad a_n = n!\,;$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{ak } n \text{ je nepárne}, \\ 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (n-1), & \text{ak } n \text{ je párne}; \end{cases}$$

$$c_n = (n-1)!\,;$$

$$d_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2)\ldots(n-1) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\,.$$

4. Pojmy *graf, hrana, vrchol, slučka, čiastočne orientovaný graf, orientovaná hrana, neorientovaný graf, orientovaný graf, dráha z vrcholu u do vrcholu v, neorientovaná kružnica, orientovaná kružnica, zhodnosť orientácie kružnice a hrany, dĺžka kružnice* (= граф, ребро, вершина, петля, частично ориентированный граф, ориентированное ребро, неориентированный граф, ориентированный граф, путь из вершины u в вершину v, неориентированный контур, ориентированный контур, совпадание ориентации контура и ребра, длина контура) používame podľa [3]. Orientovanú kružnicu, ktorej orientácia sa zhoduje s orientáciou všetkých jej hrán, nazývame *cyklus.*[2]) V čiastočne orientovanom grafe s n vrcholmi kružnice (resp. cykly) dĺžky n nazývame *hamiltonovské.* Názov *faktor* orientovaného grafu (= facteur) používame podľa [4]. Pri ostatných názvoch z teórie grafov sa pridržiavame [2].

5. Nech je daný konečný čiastočne orientovaný graf G s vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Označme počet neorientovaných hrán incidentných s vrcholmi v_i, v_j znakom n_{ij}, počet hrán orientovaných z vrcholu v_i do vrcholu v_j znakon o_{ij}, počet všetkých hrán, incidentných s vrcholmi v_i, v_j znakom p_{ij}. (Ak $i \neq j$, je $p_{ij} = n_{ij} + o_{ij} + o_{ji}$, ak $i = j$, je $p_{ij} = n_{ij} + o_{ij}$.) Priraďme grafu G tri matice stupňa n: maticu $M = M(G) = \|m_{ij}\| = \|n_{ij} + o_{ij}\|$, maticu $N = N(G) = \|n_{ij}\|$ a maticu $P = P(G) = \|p_{ij}\|$.

6. Hlavné výsledky práce sú zhrnuté v nasledujúcej vete a v jej dôsledku:

Veta. *Ak G je orientovaný graf, je počet jeho*

I. *faktorov*: $A(M)$,

II. *faktorov pozostávajúcich zo samých cyklov dĺžky* 2: $B(M)$,[3])

III. *hamiltonovských cyklov*: $C(M)$,

IV. *cyklov prechádzajúcich vrcholom* v_1: $D(M)$.

---

[2]) Na rozdiel od dráh *cestami* budeme nazývať okrem dráh aj také množiny hrán, ktoré zmenou orientácie niektorých hrán sa môžu stať dráhami. Slučku považujeme za hranu, za neorientovanú kružnicu, za orientovanú kružnicu aj za cyklus; slučka teda vytvára len jednu orientovanú kružnicu (zatiaľ, čo každá iná neorientovaná kružnica vytvára dve rôzne orientované kružnice).

[3]) Podobným spôsobom možno spočítať i faktory pozostávajúce z cyklov inej dĺžky.

Dôkaz. Dokážme podrobne tvrdenie I: Každá permutácia σ čísel $1, 2, \ldots, n$ sa rozpadá na súčin disjunktných cyklov. Každý faktor grafu G sa rozpadá na cykly (presnejšie: podgrafy, ktoré vytvárajú cykly) bez spoločných vrcholov. Priraďme permutácii σ množinu všetkých faktorov, ktoré možno rozložit na cykly, vrcholy ktorých majú indexy, odpovedajúce prvkom cyklov, na ktoré sa rozpadá uvedená permutácia. Ľahko zistíme, že permutácii σ odpovedá $m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)} \ldots m_{n\sigma(n)}$ faktorov; rôznym permutáciam odpovedajú rôzne faktory. Preto počet všetkých uvažovaných faktorov je

$$\sum_{\sigma \in \alpha(n)} m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)} \ldots m_{n\sigma(n)} = A(M)\,.$$

Tým je tvrdenie I dokázané. Obdobne sa dokážu tvrdenia II, III, IV.

Dôsledok.[4]) *Ak G je čiastočne orientovaný graf, je počet jeho:*

1. *lineárnych faktorov*[5]) $B(P_0)$, *kde P_0 vznikne z matice P nahradením všetkých prvkov, stojacich pod hlavnou uhlopriečkou, jednotkami;*

2a) *hamiltonovských cyklov:* $C(M)$ $(n \neq 2)$;

2b) *orientovaných hamiltonovských kružníc:* $C(P)$ $(n \neq 2)$;

2c) *neorientovaných hamiltonovských kružníc:* $\frac{1}{2}C(P)$ $(n \geqq 3)$;

2d) *podgrafov vytvárajúcich hamiltonovský cyklus:* $C(M) - \frac{1}{2}C(N)$ $(n \geqq 3)$;

3a) *cyklov prechádzajúcich vrcholom v_1:* $D(M) - \sum_{j=2}^{n} n_{1j}$ $(n \neq 1)$;

3b) *orientovaných kružníc prechádzajúcich vrcholom v_1:*

$$D(P) - \sum_{j=2}^{n} p_{1j} \quad (n \neq 1)\,;$$

3c) *neorientovaných kružníc prechádzajúcich vrcholom v_1:*

$$\tfrac{1}{2}[D(P) + p_{11} - \sum_{j=2}^{n} p_{1j}] \quad (n \neq 1)\,;$$

3d) *podgrafov vytvárajúcich cyklus prechádzajúci vrcholom v_1:*

$$D(M) - \frac{D(N) + \sum_{j=2}^{n} n_{1j} - n_{11}}{2} \quad (n \neq 1)\,;$$

4a) *dráh z vrcholu v_i do vrcholu v_j:* $D_{ji}(M)$ $(n \neq 1)$;

4b) *ciest z vrcholu v_i do vrcholu v_j:* $D_{ji}(P)$.

---

[4]) Výsledky 3a, 3b, 3c, 4a sú v trocha inom tvare uvedené v [3] (veta 2, 3, 4).

[5]) T. j. lineárnych faktorov neorientovaného grafu, ktorý dostaneme z grafu G zrušením orientácie všetkých jeho hrán.

Dôkaz. Tvrdenie 1 (resp. 2a, 3a) vyplýva z tvrdenia II (resp. III, IV) predošlej vety, ak od daného čiastočne orientovaného grafu G prejdeme k orientovanému grafu G_1, pre ktorý $M(G_1) = P_0(G)$ (resp. $M(G_1) = M(G)$). Tvrdenie 4a vyplýva priamo z definície D_{ji}. Tvrdenie 2b, 3b, 4b vyplýva z 2a, 3a, 4a, ak v G zrušíme orientáciu všetkých hrán a prejdeme k neorientovanému grafu G_2. Cykly (resp. dráhy) v G_2 odpovedajú jednoznačne orientovaným kružniciam (resp. cestám) v G. Tvrdenie 2c, 3c vyplýva z 2b, 3b a z poznámky [2]). Tvrdenie 2d, 3d vyplýva z 2a, 3a vynechaním polovice cyklov (rôznych od slučiek a zložených zo samých neorientovaných hrán), ktoré po dvoch vytvárajú ten istý podgraf.

Poznámky. 1. Ak chceme spočítať kružnice (cykly, cesty, dráhy) nepredchádzajúce istými danými vrcholmi, stačí z príslušných matíc vynechať riadky a stĺpce odpovedajúce daným vrcholom. Ľahko sa rieši aj úloha spočítať kružnice (cykly, ...) prechádzajúce ďalším daným vrcholom v: od počtu pôvodne uvažovaných kružníc (cyklov, ...) sa odčíta počet tých, ktoré nepredchádzajú vrcholom v. Analogicky sa rieši všeobecná úloha spočítať kružnice (cykly, ...) prechádzajúce istými danými vrcholmi a neprechádzajúce inými danými vrcholmi. Niektoré špeciálne prípady tejto úlohy sú riešené v [3].

2. Ak v uvažovaných maticiach nahradíme nenulové prvky jednotkami a použijeme všade booleovské sčítanie a násobenie [4, 5, 6], výsledok 1 (resp. 0) bude znamenať existenciu (resp. neexistenciu) uvažovaných faktorov, kružníc, ciest, atď.

Literatúra

[1] *B. L. van der Waerden*: Aufgabe 45. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung *35*, 2. abt.,(1926), 117—117.

[2] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akademische Verlaggesellschaft M. B. H., Leipzig (1936).

[3] *Г. Н. Поваров:* О матричном анализе связей в частично ориентированных графах. Успехи математических наук *11*, 5 (71), (1956), 195—202.

[4] *C. Berge*: Théorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris (1958).

[5] *J. Sedláček*: O incidenčních maticích orientovaných grafů. Časopis pro pěstování matematiky *84* (1959), 303—316.

[6] *F. Harary*: A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues. Journal of Mathematics and Physics *38* (1959), 104—111.

[7] *А. А. Зыков:* Функции от графов, определяемые линейными уравнениями. Известия Сибирского отделения Академии наук СССР, *5*, (1959), 3—19.

[8] *J. Dénes*: The representations of a permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs. A magyar tudományos akadémia matematikai kutató intézetének Közleményei *4* (1959), 63—71.

[9] *M. Marcus*: Some properties and applications of doubly stochastic matrices. The American Mathematical Monthly *67* (1960), 215—221.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФОВ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЦ

ЮРАЙ БОСАК (Juraj Bosák), Братислава

Пусть n-натуральное число. Обозначим через $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\gamma(n)$ соответственно множество всех подстановок, множество всех подстановок, являющихся произведением непересекающихся транспозиций, и множество всех циклических подстановок из элементов $1, 2, \ldots, n$. Далее, пусть $\delta(n)$ для $n = 1$ равно пустому множеству, и для $n > 1$ равно множеству всех размещений $[s_1, s_2, \ldots, s_r]$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ из элементов $2, 3, \ldots, n$. Пусть $U = \|u_{ij}\|$ — квадратная матрица n-го порядка с действительными элементами u_{ij}. При помощи формул (1) определяются функции $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$, $D(U)$. Показан рекуррентный способ вычисления значений этих функций.

Пусть задан ориентированный граф с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$; (пусть m_{ij} обозначает число ребер, направленных из v_i в v_j; пусть $M = \|m_{ij}\|$). Тогда число всех его 1. факторов: $A(M)$; 2. факторов, образованных только циклами длины 2: $B(M)$; 3. гамильтоновых циклов: $C(M)$; 4. циклов, проходящих через вершину v_1: $D(M)$.

Указанные результаты обобщаются для частично ориентированных графов (специальными случаями которых являются как ориентированные, так и неориентированные графы).

Summary

THE INVESTIGATION OF GRAPHS BY MEANS OF MATRICES

JURAJ BOSÁK, Bratislava

Let n be a positive integer. Denote by $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\gamma(n)$ respectively the set of all permutations, the set of all permutations which are products of disjoint transpositions and the set of all cyclic permutations of the elements $1, 2, \ldots, n$. Further, put $\delta(n)$ for $n = 1$ equal to the empty set and for $n > 1$ equal to the set of all variations $[s_1, s_2, \ldots, s_r]$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, of the elements $2, 3, \ldots, n$. Let $U = \|u_{ij}\|$ be an $n \times n$ matrix with real elements u_{ij}. Using formulae (1), the functions $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$, $D(U)$ are defined. A recurrent method for the calculation of the values of these functions is given.

Let an oriented graph with vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be given (m_{ij} denotes the number of the edges oriented from v_i to v_j; $M = \|m_{ij}\|$). The number of all its: factors is $A(M)$; factors generated only by cycles of length two is $B(M)$; hamiltonian cycles is $C(M)$; cycles passing through the vertex v_1 is $D(M)$.

These results are generalized to partially oriented graphs (special cases of which are the oriented and the unoriented graphs).