Václav Polák

O existenci jednoduchého zborceného mnohoúhelníka v E_3 s předepsanými směry stran

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 267--283

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117439`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

O EXISTENCI JEDNODUCHÉHO ZBORCENÉHO MNOHOÚHELNÍKA V E_3 S PŘEDEPSANÝMI SMĚRY STRAN

VÁCLAV POLÁK, Brno

(Došlo dne 18. června 1960)

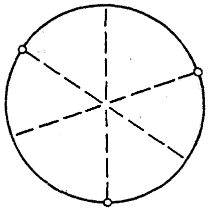
Práce navazuje na problematiku souvisící s publikacemi K. LÖWNERA [5], W. FENCHELA [2], A. RENYIHO [7], K. ČULÍKA [1] a V. HAVLA [3], [4], které pojednávají o existenci mnohoúhelníka (rovinného či zborceného) s předepsanými směry stran. V předložené práci je studován tento problém s doplňujícím požadavkem jednoduchosti a je podána nutná a postačující podmínka pro existenci takového mnohoúhelníka v E_3. Lemmata potřebná k důkazu vedou samy o sobě k novým výsledkům a problematice.

1. PRIMITIVNÍ SYSTÉMY BODŮ NA KOULI

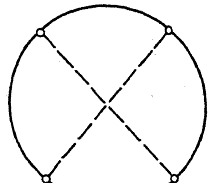
Definice 1. Nechť $\mathfrak{S}$ je konečná neprázdná množina bodů A_i v prostoru E_3, ležících na jednotkové kouli K (o středu v bodě O). Řekneme, že $\mathfrak{S}$ *je typu* $(*)$, jestliže bod O je vnitřním bodem konvexního obalu množiny $\mathfrak{S}$, tj. $\mathfrak{S}$ neleží na žádné uzavřené polokouli koule K. Řekneme, že bod $A \in \mathfrak{S}$ je *postradatelný*, jestliže obě množiny $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} - \{A\}$ jsou typu $(*)$. Ostatní body množiny $\mathfrak{S}$ se nazývají *nepostradatelné*. Množina $\mathfrak{S}$ se nazývá *primitivní*, jestliže je typu $(*)$ a každý její bod je nepostradatelný (viz [8]).

Poznámka 1. Je-li $\mathfrak{S}$ typu $(*)$, je kard $\mathfrak{S} \geqq 4$. Každá čtveřice bodů (na kouli K), jež je typu $(*)$, je primitivní.

Poznámka 2. Jestliže $A_i \in \mathfrak{S}$ je nepostradatelný, existuje aspoň jedna uzavřená polokoule κ_i koule K tak, že pokrývá množinu $\mathfrak{S} - \{A_i\}$.



Obr. 1.



Obr. 2.

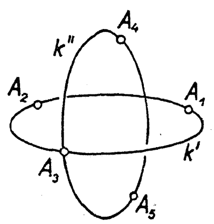
Poznámka 3. Nechť $\mathfrak{S}$ je primitivní. Vyberme ke každému bodu A_i příslušnou polokouli κ_i (ke každému bodu právě jednu). Hranici její označme k_i, množinu těchto polokoulí pak $\mathcal{K}(\mathfrak{S})$. Každým bodem koule K procházejí nejvýše tři kružnice k_i. Jestliže je $\kappa_1 \cup \kappa_2 = K$, leží body $\mathfrak{S} - \{A_1, A_2\}$ na hlavní kružnici $k_1 = k_2 = \kappa_1 \cap \kappa_2$. Tento případ nastane např. jsou-li body $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$ dva protilehlé póly koule K.

Poznámka 4. Podobně jako na kouli lze zavést na kružnici systém bodů typu (*) resp. primitivní systém bodů. Existují pouze dva typy primitivních systémů bodů na kružnici – primitivní trojice (obr. 1) a primitivní čtveřice (obr. 2).

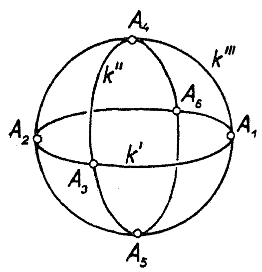
Poznámka 5. Nechť $\mathfrak{S}$ je primitivní systém bodů na kouli K. Pak pro každou hlavní kružnici k koule K platí kard $(\mathfrak{S} \cap k) \leqq 4$. Jestliže na k leží 4 body množiny $\mathfrak{S}$, pak tyto body na k tvoří primitivní čtveřici.

Poznámka 6. Každá primitivní čtveřice $\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ bodů na kouli K má systém $\mathscr{K}(\mathfrak{S}) = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4\}$ uzavřených polokoulí o vlastnostech: $\kappa_1 \cup \kappa_2 = K = \kappa_3 \cup \kappa_4$, $A_1, A_2 \in k_3 = \kappa_3 \cap \kappa_4$, $A_3, A_4 \in k_1 = \kappa_1 \cap \kappa_2$.

Poznámka 7. Existuje primitivní pětice $\mathfrak{S}$ bodů A_i na kouli K, jejíž systém $\mathscr{K}(\mathfrak{S})$ polokoulí κ_i má následující vlastnosti: $\kappa_1 \cup \kappa_2 = K = \kappa_4 \cup \kappa_5$. $A_1, A_2, A_3 \in k' = \kappa_4 \cap \kappa_5$, $A_3, A_4, A_5 \in k'' = \kappa_1 \cap \kappa_2$, body A_1, A_2, A_3 tvoří primitivní trojici bodů na kružnici k' (obr. 3). Jestliže body A_3, A_4, A_5 netvoří primitivní trojici na kružnici k'', jsou A_4, A_5 póly.



Obr. 3.



Obr. 4.

Poznámka 8. Existuje primitivní šestice $\mathfrak{S}$ bodů A_i na kouli K, jejíž systém $\mathscr{K}(\mathfrak{S})$ polokoulí κ_i má následující vlastnosti: $\kappa_1 \cup \kappa_2 = \kappa_3 \cup \kappa_6 = \kappa_4 \cup \kappa_5 = K$, body A_1, A_2, A_3, A_6 tvoří primitivní čtveřici na kružnici $k' = \kappa_4 \cap \kappa_5$, body A_3, A_4, A_5, A_6 na kružnici $k'' = \kappa_1 \cap \kappa_2$ a body A_1, A_2, A_4, A_5 na kružnici $k''' = \kappa_3 \cap \kappa_6$ (obr. 4).

Věta 1. *Kromě uvedených tří typů* (pozn. 6, 7 a 8) *neexistují další primitivní systémy bodů na kouli.*

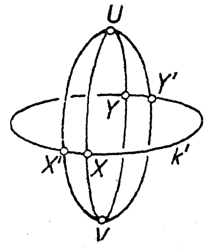
Důkaz. Primitivní čtveřice existuje podle pozn. 6 právě jediná. Nechť tedy $\mathfrak{S}$ je primitivní systém bodů na kouli K a kard $\mathfrak{S} \geqq 5$.

1. Nechť $\mathscr{K}(\mathfrak{S})$ je takový, že $\kappa_4 \cup \kappa_5 = K$ (tzn. nechť existují indexy i, j, $i \neq j$ a $\kappa_i \cup \kappa_j = K$. Prečíslováním bodů docílíme našeho případu.). Z pozn. 3 a 5 plyne kard $\mathfrak{S} \leqq 6$ a body $\mathfrak{S} - \{A_4, A_5\}$ leží na kružnici $k' = \kappa_4 \cap \kappa_5$.

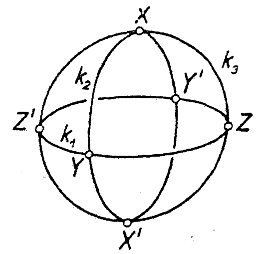
1.1. Nechť kard kard $\mathfrak{S} = 6$. Pak body A_1, A_2, A_3, A_6 tvoří na kružnici k' primitivní čtveřici (z pozn. 5). Označení nechť je takové, aby body A_1, A_2 tvořily protilehlé póly (tedy též A_3, A_6 tvoří protilehlé póly). Podle poznámky 3 je $\kappa_1 \cup \kappa_2 = K$ a body A_3, A_4, A_5, A_6 leží na kružnici $k'' = \kappa_1 \cap \kappa_2$. Podle poznámky 5 tvoří tyto body na k'' primitivní čtveřici a poněvadž A_3, A_6 jsou protilehlé póly, jsou též body A_4, A_5 protilehlými póly a tedy $\mathfrak{S}$ je primitivní šestice popsaná v pozn. 8.

1.2. Nechť kard $\mathfrak{S} = 5$.

1.2.1. Nechť $\kappa_1 \cup \kappa_2 = K$. Pak body A_3, A_4, A_5 leží na kružnici $k'' = \kappa_1 \cap \kappa_2$ (pozn. 3). Nechť tato trojice na kružnici k'' není primitivní, tj. všechny 3 body leží na jedné uzavřené polokružnici kružnice k''. Bod A_3 leží mezi A_4, A_5. Poněvadž bod A_3 je na kouli K nepostradatelný, jsou A_4, A_5 protilehlé póly. Trojice A_1, A_2, A_3 je na kružnici k' primitivní. (Nechť tato trojice primitivní není. Pak všechny tři body leží na uzavřené polokružnici kružnice k', A_3 mezi A_1, A_2. Poněvadž A_3 je na K nepostradatelný, jsou A_1, A_2 protilehlé póly. Tedy A_1, A_2, A_4, A_5 leží na jisté hlavní kružnici k, která určuje polokouli κ, na níž leží $\mathfrak{S}$ – spor.) Tedy $\mathfrak{S}$ je pětice popsaná v pozn. 7. Rovněž $\mathfrak{S}$ je tohoto typu, jestliže obě trojice A_1, A_2, A_3 a A_3, A_4, A_5 jsou na svých kružnicích (k', k'') primitivní.



Obr. 5.



Obr. 6.

1.2.2. Nechť $\kappa_1 \cup \kappa_2 \neq K$. Označme X, Y resp. X', Y' průsečíky kružnice k_1 resp. k_2 s kružnicí k'. (Označení volme tak, aby Y' ležel s bodem A_1 na téže polokružnici určené body X, Y a bod Y ležel s A_2 na téže polokružnici určené body X', Y' – obr. 5.) Bod A_3 leží na uzavřeném oblouku $\widehat{XX'}$, $A_1 \in (\text{uzav. } \widehat{XY'}) - \{X\}$, $A_2 \in (\text{uzav. } \widehat{X'Y}) - \{X'\}$, $A_4 \in (\text{uzav. } \triangle\, UXX') - (\text{uzav. } \widehat{XX'})$, $A_5 \in (\text{uzav. } \triangle\, VXX') - (\text{uzav. } \widehat{XX'})$. Poněvadž A_3 je na kouli K nepostradatelný a body U, V jsou protilehlé póly, je $A_4 = U$, $A_5 = V$ a trojice A_1, A_2, A_3 je na kružnici k' primitivní. Tedy $\mathfrak{S}$ je primitivní pětice popsaná v pozn. 7.

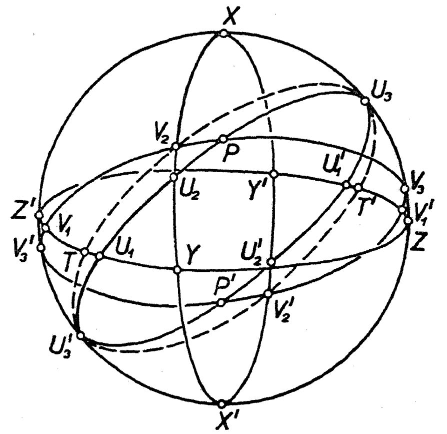
2. Nechť v systému polokoulí $\mathscr{K}(\mathfrak{S})$ pro každé i, j platí $\kappa_i \cup \kappa_j \neq K$. Pak $\operatorname{kard} \mathscr{K}(\mathfrak{S}) = \operatorname{kard} \mathfrak{S}$. Poněvadž $\operatorname{kard} \mathfrak{S} > 3$ a každým bodem koule K procházejí nejvýše 3 kružnice k_i (pozn. 3), lze bez újmy obecnosti předpokládat, že kružnice k_1, k_2, k_3 neprocházejí jedním bodem. (Jejich průsečíky označme X, X', Y, Y', Z, Z' – obr. 6.) Bod $A_1 \in T_1 = (\text{uzav. } \triangle\, X'ZY) - (\text{uzav. } \widehat{YZ})$, $A_2 \in T_2 = (\text{uzav. } \triangle\, XYZ') - (\text{uzav. } \widehat{XY})$, $A_3 \in T_3 = (\text{uzav. } \triangle\, XY'Z) - (\text{uzav. } \widehat{XZ})$, $\emptyset \neq \mathfrak{S} - \{A_1, A_2, A_3\} \subset (\text{uzav. } \triangle\, XYZ)$.

Dokažme nejdříve, že žádný z bodů X, Y, Z neleží na některé kružnici k_i, $i \geqq 4$. Nechť třeba $X \in k_4$. Pak $X' \in k_4$ a poněvadž žádná z množin $\kappa_4 \cap T_1$, $\kappa_4 \cap T_2$, $\kappa_4 \cap T_3$ není prázdná, protne kružnice k_4 vnitřek oblouku YZ'. Pak ale $A_1 \equiv X'$ a poněvadž $\operatorname{kard} \mathfrak{S} \geqq 5$ a $A_5 \in \text{uzav. } \triangle\, XYZ$, je $A_5 \equiv X$. Tedy body A_1, A_5 jsou protilehlé póly. Podle pozn. 3 je $\kappa_1 \cup \kappa_5 = K$, což je spor s předpokladem.

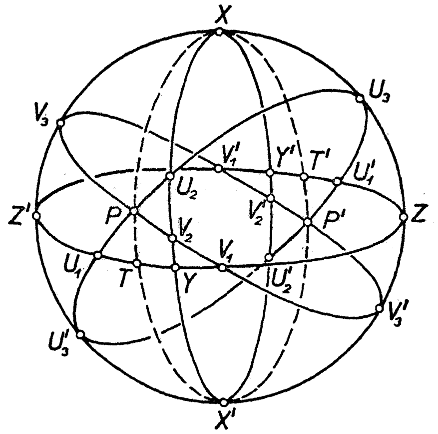
Poněvadž $\operatorname{kard} \mathfrak{S} \geqq 5$, je $\kappa_4 \cap (\text{uzav. } \triangle\, XYZ) \neq \emptyset$ a tedy k_4 protne strany trojúhelníku XYZ ve vnitřních bodech. Průsečíky kružnice k_4 s kružnicemi k_1, k_2, k_3 označíme U_1, U_1', U_2, U_2', U_3, U_3'. Nechť třeba U_1 je mezi Y, Z', U_2 mezi X, Y, U_3 mezi X, Z – obr. 7. Pak U_1' je mezi Z, Y', U_2' mezi X', Y', U_3' mezi X', Z' (poněvadž jde o hlavní kružnice). Poněvadž $\kappa_4 \cap T_1 \neq \emptyset$, je $A_4 \in T_4 = (\text{uzav. } \triangle\, XU_2U_3) - (\text{uzav. } \widehat{U_2U_3})$, $A_2 \in T_2' = (\text{uzav. } \triangle\, YU_1U_2) - (\text{uzav. } \widehat{YU_2})$ a $A_3 \in T_3' = (\text{uzav. } \triangle\, ZU_1'U_3) - (\text{uzav. } \widehat{ZU_3})$.

Stejnou úvahou jako nahoře dospějeme k závěru, že kružnice k_5 protne vnitřky dvou stran trojúhelníka XYZ. Průsečíky kružnice k_5 s kružnicemi k_1, k_2, k_3 označme V_1, V_1', V_2, V_2', V_3, V_3'.

Nechť kružnice k_5 protne vnitřek stran $\overset{\frown}{XY}$, $\overset{\frown}{XZ}$. Nechť V_2 leží mezi Y, U_2 (eventuálně $V_2 \equiv U_2$) a V_3 je mezi Z, U_3. Pak body A_1, A_4 leží na opačných polokoulích určených kružnicí k_5 – spor. Z téhož důvodu nemůže být V_2 mezi X, U_2, V_3 mezi X, U_3. Nechť tedy V_2 je mezi X, U_2, V_3 mezi Z, U_3 (obr. 7). Pak V_1 je mezi U_1, Z', V_1' mezi



Obr. 7.



Obr. 8.

U_1', Z, V_2' mezi X', U_2' a V_3' mezi Z', U_3', $A_4 \in$ (uzav. $\triangle\, PU_2V_2$) – (uzav. $\overset{\frown}{PU_2}$), $A_5 \in$ $\in$ (uzav. $\triangle\, PU_3V_3$) – (uzav. $\overset{\frown}{PV_3}$), $A_1 \in T_1$, $A_2 \in T_2'$, $A_3 \in T_3'' =$ (uzav. $\triangle\, ZV_1'V_3$) – – (uzav. $\overset{\frown}{ZV_3}$) a ostatní body množiny $\mathfrak{S}$ (existují-li) jsou pak v uzavřeném sférickém pětiúhelníku PU_2YZV_3. Hlavní kružnice k vedená body U_3, V_2 prochází body U_3', V_2' a protíná kružnici k_1 v bodech T, T', kde T leží mezi U_1V_1, T' mezi U_1', V_1'. Polokoule $\varkappa$ určená kružnicí k obsahuje všechny body množiny $\mathfrak{S}$ – spor. Tedy k_5 neprotne současně strany $\overset{\frown}{XY}$, $\overset{\frown}{XZ}$ trojúhelníka XYZ.

Nechť kružnice k_5 protne vnitřek stran $\overset{\frown}{XY}$, $\overset{\frown}{YZ}$. Nechť V_1 je mezi Y, Z, V_2 mezi X, Y, V_3 mezi X, Z'. V_1', V_2', V_3' jsou protilehlé póly bodům V_1, V_2, V_3. Analogicky předchozím úvahám je $A_5 \in$ (uzav. $\triangle\, YV_1V_2$) – (uzav. $\overset{\frown}{V_1V_2}$). Poněvadž $A_2 \in \varkappa_5 \cap$ $\cap\, T_2'$, leží V_2 mezi Y, U_2 (obr. 8). Pak V_2' je mezi Y', U_2', P mezi U_1, U_2, P' mezi U_1', U_2', $A_1 \in T_1' =$ (uzav. $\triangle\, ZV_1V_3'$) – (uzav. $\overset{\frown}{ZV_1}$), $A_2 \in T_2'' =$ (uzav. $\triangle\, PU_2V_2$) – (uzav. $\overset{\frown}{U_2V_2}$), $A_3 \in T_3'$, $A_4 \in T_4$ a ostatní body množiny $\mathfrak{S}$ (existují-li) leží v pětiúhelníku $ZV_1V_2U_2U_3$. Hlavní kružnice k vedená body X, P protne kružnici k_1 v bodech T, T', T leží mezi Y, U_1, T' mezi Y', U_1'. Polokoule $\varkappa$ určená kružnicí k obsahuje všechny body množiny $\mathfrak{S}$-spor. Neprotne tedy kružnice k_5 současně strany $\overset{\frown}{XY}$, $\overset{\frown}{YZ}$ trojúhelníka XYZ. Z téhož důvodu neprotne kružnice k_5 dvojici stran $\widehat{XZ}$, $\widehat{YZ}$. A tedy případ 2 není možný. Důkaz věty je ukončen.

Problém 1. Podobně jako na kouli K v E_3 lze zavést na $(n-1)$-rozměrné kouli v E_n primitivní systém bodů. Zkonstruovat pro dané n všechny primitivní systémy. Takových bodů je vejvýše $2n$ (extrémní případ viz [8], str. 15).

2. JEDNODUCHÉ LOMENÉ ČÁRY

Definice 2. Nechť je dána uspořádaná množina $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$, $n+2$ $(n \geqq 1)$ bodů v rovině. Nechť pro každé i, $i = 0, 1, \ldots, n$, je $A_i \neq A_{i+1}$. Uzavřené úsečky $\overline{A_iA_{i+1}}$ vytvoří čáru R, která se nazývá *n-lomenou čarou* v rovině a píšeme $\mathrm{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$. Body $A_1, \ldots, A_n$, jsou její *vrcholy*, úsečky $\overline{A_iA_{i+1}}$ její *strany*. Vrchol A se nazývá *vlastní*, leží-li dvě sousední strany vrcholu A v různých přímkách. Čára R se nazývá *jednoduchá*, jestliže se sama sebe neprotne. Posloupnost $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^n$ jednotkových vektorů $\mathbf{e}_i = OS_i$, kde O je libovolný pevný bod v rovině a $\mathbf{e}_i$ je souhlasně rovnoběžný s vektorem A_iA_{i+1}, se nazývá *systémem směrů čáry* R. Dvě čáry v rovině, které mají stejný systém směrů, se nazývají *paralelní.*

Definice 3. Nechť R je n-lomená čára s vlastními vrcholy, $\{\mathbf{e}_i\}$ systém jejích směrů. Nechť α_j $j = 1, \ldots, n$ je úhel mezi vektory $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$ (v tomto pořádku, přitom kladný smysl měření úhlů bereme proti směru hodinových ručiček a ze dvou možných úhlů mezi dvěma vektory bereme ten, který je dutý). Řekneme, že čára R je *typu Ω*, jestliže $\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right| < 180°$. Řekneme, že čára R je *typu Ω_∞*, jestliže je typu Ω, je jednoduchá a obě její krajní úsečky lze bez omezení současně prodlužovat, aniž je porušena jednoduchost. Konečnou posloupnost jednotkových vektorů, u níž žádné dva sousední vektory nejsou kolineární, budeme nazývat *posloupností typu Ω*, jestliže daná posloupnost je systémem směrů některé rovinné lomené čáry R typu Ω.

Věta 2. *Nechť $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^n$ je posloupnost typu Ω. Pak existuje lomená čára* R *typu Ω_∞ tak, že daná posloupnost je systémem jejích směrů.*

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Tvrzení pro $n = 2$ a 3 platí. Nechť n je libovolné přirozené číslo, $n > 3$ a tvrzení platí pro všechna k, $3 \leqq k < n$, a nechť je dána posloupnost vektorů uvedená v tvrzení. Jsou-li vektory $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_n$ souhlasně rovnoběžné, jsou posloupnosti $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ typu Ω. Podle indukčních předpokladů sestrojíme čáry R_1, R_2 typu Ω_∞ a z nich pak čáru R snadno sestrojíme (čáru R_2 „vložíme“ do daného vrcholu čáry R_1). Jestliže $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_n$ nejsou souhlasně rovnoběžné, existuje zřejmě i, $1 < i < n$ tak, že posloupnosti $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_i)$, $(\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jsou typu Ω. Pomocí indukčních předpokladů (podobně jako nahoře) sestrojíme hledanou čáru R; c.b.d.

Nechť je dána v rovině lomená čára R a dva různé body A, B. Jest otázka, kdy existuje jednoduchá lomená čára S paralelní s R tak, že spojuje uvedené dva body (čára S začíná v bodě A a končí v bodě B).

Definice 4. Posloupnost $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ jednotkových vektorů v rovině nazveme *základní dvojicí* vzhledem k nenulovému vektoru AB, jestliže existuje jednolomená čára S s vlastním vrcholem spojující body A, B tak, že daná posloupnost je systémem jejích směrů. Posloupnost $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jednotkových vektorů v rovině nazveme *základní trojicí* vzhledem k nenulovému vektoru AB, jestliže vektory $\mathbf{e}_2$, AB jsou souhlasně rovnoběžné a jestliže existuje 2-lomená jednoduchá čára S s vlastními vrcholy tak, že spojuje body A, B a daná posloupnost je systémem jejích směrů. Základní dvojice a trojice nazývejme souhrnně *posloupnostmi pro daný směr základními.*

Věta 3. *Nechť* R *je lomená čára v rovině,* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^n$ *systém jejích směrů,* A, B *dva různé body. Pak existuje jednoduchá lomená čára* S *s vlastními vrcholy, paralelní s* R *a spojující body* A, B *právě tehdy, když existuje index* i *tak, že buď* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})$ *nebo* $(\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})$ *je pro směr* AB *posloupností primitivní.*

Důkaz. Postačitelnost podmínky je zřejmá. Nutnost podmínky dokážeme úplnou indukcí. Pro $n = 2$ a 3 tvrzení platí. Nechť $n > 3$ a tvrzení platí pro všechna k, $2 \leqq k < n$. Nechť R je $(n - 1)$-lomená jednoduchá čára spojující body A, B a jejíž systém směrů je naše daná posloupnost. Jestliže přímka AB má kromě bodů A, B ještě aspoň jeden další bod společný s čarou R, lze čáru R rozdělit na dvě lomené čáry a pro jednu z nich užít indukčních předpokladů. Jestliže žádný takový další bod na AB neexistuje, existují zřejmě indexy $r < s$ tak, že $r \geqq 0$, $s \leqq n$, alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá a existují body X, Y, kde X je uvnitř r-té a Y uvnitř s-té strany čáry R tak, že vektor XY je souhlasně rovnoběžný s vektorem AB. Pro část čáry R z X do Y užijeme indukčního předpokladu a jsme hotovi. Důkaz je ukončen.

Problém 2. Nechť R je lomená čára v E_n a $A, B \in \mathsf{E}_n$, $A \neq B$ dva libovolné body. Nalézt nutnou a postačující podmínku pro to, aby existovala jednoduchá lomená čára S paralelní s R tak, že spojuje oba body A, B.

3. EXISTENCE ZBORCENÉHO MNOHOÚHELNÍKA S PŘEDEPSANÝMI SMĚRY STRAN

Definice 5. Jestliže v definici 2 je $A_0 \equiv A_{n+1}$, nazývá se čára R *mnohoúhelníkem* (speciálně $(n + 1)$-úhelníkem) v rovině a píšeme $\mathsf{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$. Jestliže body $A_i \in \mathsf{E}_3$ neleží vesměs v rovině, nazývá se mnohoúhelník R *zborceným.*

Poznámka 9. Jednoduchý rovinný mnohoúhelník rozdělí rovinu na dvě oblasti — ohraničenou (vnitřek) a neohraničenou. Jestliže mnohoúhelník není jednoduchý, má body, které leží současně alespoň ve dvou různých nesousedních stranách. Takové body nazýváme singulárními.

Poznámka 10. Nechť R je jednoduchý mnohoúhelník. Pro úhly α_i (viz def. 3) při jeho vrcholech platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pm 360°$. Platí též opak: Nechť je dána posloupnost $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ jednotkových vektorů v rovině, nechť vesměs vektory $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i+1}$ ($i \bmod n$) nejsou kolineární a platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pm 360°$. Pak existuje jednoduchý rovinný n-úhelník R, pro nějž daná posloupnost je systémem jeho směrů. Snadno totiž nahlédneme (viz V. POLÁK [6]), že za daných předpokladů existují indexy $i < j < k$ nebo $i < j < k < l$ tak, že posloupnost $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ je systémem směrů trojúhelníka nebo posloupnost $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$ je systémem směrů rovnoběžníka a posloupnosti $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $(\mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i)$ nebo $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_l)$, $(\mathbf{e}_l, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i)$ jsou posloupnosti typu Ω. Podle věty 2 sestrojíme k těmto posloupnostem čáry typu Ω_∞ a tyto (vhodně malé) vložíme do vrcholů trojúhelníka nebo čtyřúhelníka a obdržíme tak hledaný mnohoúhelník R. (Tento problém položil E. ČECH. Řešil jej A. RÉNYI v [7], ale s chybou, kterou opravil K. ČULÍK v [1]. Bez požadavku jednoduchosti problém řešil V. HAVEL v [3].)

Poznámka 11. Nechť R je rovinný mnohoúhelník, jehož všechny vrcholy neleží vesměs v přímce, $\{\mathbf{e}_i\}$ nechť je systém jeho směrů. Pak koncové body S_i těchto vektorů vytvoří na jednotkové kružnici K množinu $\mathfrak{S}$ typu $(*)$.

Poznámka 12. Nechť R je zborcený mnohoúhelník a $\{\mathbf{e}_i\}$ systém jeho směrů. Pak koncové body S_i těchto vektorů vytvoří na jednotkové kouli K množinu $\mathfrak{S}$ typu $(*)$ (viz K. LÖWNER [5]). Platí též opak. Nechť posloupnost $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ jednotkových vektorů $\mathbf{e}_i = OS_i$ v prostoru je taková, že body S_i tvoří na jednotkové kouli K množinu $\mathfrak{S}$ typu $(*)$. Pak existuje zborcený (ne nutně jednoduchý) mnohoúhelník R tak, že daná posloupnost je systémem jeho směrů. (Tuto větu v 3-rozměrném prostoru dokázal v podstatě W. FENCHEL v [2], pro obecnou dimensi větu dokazuje V. Havel v [4].)

Definice 6. Konečnou posloupnost $\{\mathbf{e}_i\}$ jednotkových vektorů $\mathbf{e}_i = OS_i$ v E_3, v níž žádné dva sousední vektory nejsou kolineární, nazveme *posloupností typu* Ω, jestliže je to buď rovinná posloupnost typu Ω (def. 3) nebo vektory $\mathbf{e}_i$ neleží vesměs v jedné rovině. Jednoduchá zborcená (tj. není rovinná) lomená čára s vlastními vrcholy se nazývá *čarou typu* Ω_∞, jestliže obě její krajní úsečky lze současně bez omezení prodlužovat, aniž je porušena jednoduchost.

Lemma 1. *Nechť* $\{\mathbf{e}_i\}$ *je posloupnost typu* Ω. *Pak existuje čára* R *typu* Ω_∞ *tak, že daná posloupnost je systémem jejích směrů.* (Je-li $\{\mathbf{e}_i\}$ posloupnost rovinná, jde o větu 2, prostorový případ se snadno dokáže úplnou indukcí.)

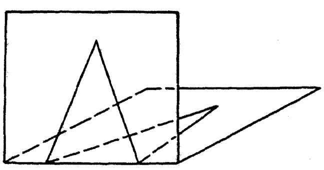
Definice 7. Nechť P je zborcený mnohoúhelník s vesměs vlastními vrcholy. Existují jednoznačně čísla $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leqq n$ tak, že čáry $\mathsf{R}_1 = (A_{j_1}, A_{j_1+1}, \ldots, A_{j_2}, A_{j_2+1})$, $\mathsf{R}_2 = (A_{j_2}, A_{j_2+1}, \ldots, A_{j_3}, A_{j_3+1})$, $\ldots$, $\mathsf{R}_l = (A_{j_l}, A_{j_l+1}, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_{j_1}, A_{j_1+1})$ jsou rovinné (čára R_t nechť leží v rovině ϱ_t) a pro každé t (t mod l) jsou roviny ϱ_t, ϱ_{t+1} různé (protínají se v přímce A_{i_t}, A_{i_t+1}). Čáry R_t se nazývají *rovinnými sledy* mnohoúhelníka P.

Lemma 2. *Nechť* $\mathsf{Q} = (A_1, \ldots, A_n)$ *je jednoduchý zborcený n-úhelník v* E_3 *s vlastními vrcholy. Nechť* $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leqq n$ *jsou indexy určující rozklad mnohoúhelníka* Q *na rovinné sledy. Nechť* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^k$ *je posloupnost jednotkových* *vektorů taková, že je typu Ω a vektory* $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_k$ *jsou po řadě souhlasně rovnoběžné s vektory* A_nA_1, A_1A_2. *Jestliže* $j_1 = 1$, *existují pro každé* $\varepsilon > 0$ *body* $B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}$ *tak, že* $B_0 \equiv A_n$, *bod* B_{k+1} *leží na přímce* A_2A_3, *body* $B_1, \ldots, B_k$ *leží uvnitř kulového* ε*-okolí bodu* A_1, *čára* $\mathsf{R} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1})$ *je typu* Ω_∞, *systém jejích směrů je naše daná posloupnost a mnohoúhelník* $\mathsf{P} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}, A_3, \ldots, A_{n-1})$ *je jednoduchým* $(n + k - 1)$*-úhelníkem. Jestliže* $j_1 > 1$, *existují pro každé* $\varepsilon > 0$ *body* $A'_{j_1}, A'_{j_1+1}, \ldots, A'_{n-1}, B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}$ *tak, že* B_{k+1} *leží na přímce* A_2A_3, *body* $B_1, \ldots, B_k$ *leží uvnitř kulového* ε*-okolí bodu* A_1, *čára* $\mathsf{R} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1})$ *je typu* Ω_∞, *systém jejích směrů je naše daná posloupnost, čáry* $(A_{j_1-1}, A_{j_1}, \ldots, A_n, A_1)$, $(A_{j_1-1}, A'_{j_1}, \ldots, A'_{n-1}, B_0, B_1)$ *jsou paralelní, sobě odpovídající vrcholy jsou od sebe vzdáleny o méně než* ε *a mnohoúhelník* $\mathsf{P} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}, A_3, \ldots, A_{j_1-1}, A'_{j_1}, \ldots, A'_{n-1})$ *je jednoduchým* $(n + k - 1)$*-úhelníkem.*

Důkaz. Na základě lemmatu 1 sestrojíme čáru R typu Ω_∞, jejíž systém směrů je naše posloupnost. Sestrojíme ji tak malou, aby její vrcholy $B_1, \ldots, B_k$ ležely uvnitř kulového ε-okolí bodu A_1 a aby $B_{k+1} \equiv A_2$. Pak snadno lze posunout prvou stranu (eventuelně i s částí rovinného sledu, v níž prvá strana leží) tak, aby procházela bodem B_1, cbd.

Definice 8. Jestliže mnohoúhelník P vznikne z mnohoúhelníka Q způsobem popsaným v lemmatu 2, řekneme, že jsme čáru R (typu Ω_∞) *vložili do vrcholu* A_1 mnohoúhelníka Q.

Definice 9. Řekneme, že jednoduchý zborcený mnohoúhelník P s vlastními vrcholy lze *redukovat*, jestliže existuje jednoduchý zborcený mnohoúhelník Q s vlastními vrcholy a čáry $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \ldots, \mathsf{R}_k$ typu Ω_∞ (ne vesměs všechny 1-lomené) tak, že je lze vložit do jistých vrcholů mnohoúhelníka Q a nově vzniklý mnohoúhelník je paralelní s P. Říkáme též, že Q *vznikl z* P *redukcí*. Jednoduché zborcené mnohoúhelníky, jež nelze redukovat, se nazývají *základními*. Nyní několik příkladů:



Obr. 9.

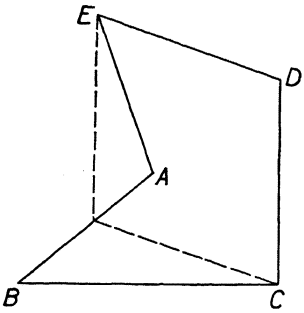
(I) Každý zborcený čtyřúhelník je jednoduchý a základní (neboť každý směr je nepostradatelný, viz obr. 9).

(II) Nechť $\mathsf{P} = (A, B, C, D, E)$ je jednoduchý zborcený 5-úhelník, jehož všechny rovinné sledy jsou 1-lomené. Nechť vektory AB, BC, DE jsou komplanární a lze z nich vytvořit trojúhelník. Nechť EA, AB, CD jsou komplanární a lze z nich vytvořit trojúhelník. Pak P je základní (každý směr je nepostradatelný, viz obr. 10).

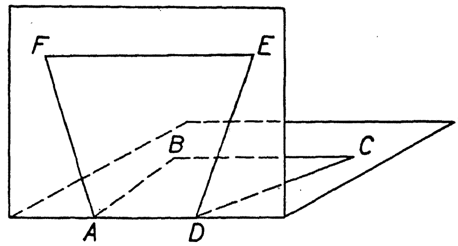
(III) Nechť $\mathsf{P} = (A, B, C, D, E)$ je jednoduchý zborcený 5-úhelník, (A, B, C), (C, D, E, A) nechť jsou jeho dva rovinné sledy. Nechť přímky AC, DE jsou rovnoběžné a polopřímky CD, AE se neprotnou. Pak P je základní. (Každý směr je nepostradatelný (obr. 11).)

(IV) Nechť P = (A, B, C, D, E, F) je jednoduchý zborcený 6-úhelník, jehož všechny rovinné sledy jsou 1-lomené. Nechť vektory AB, BC, CD jsou po řadě souhlasně rovnoběžné s vektory ED, FE, AF. Pak P je základní (každý směr je nepostradatelný) (obr. 12).

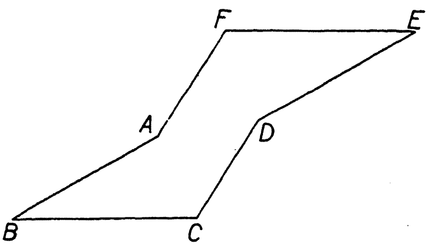
(V) Nechť P = (A, B, C, D, E, F) je jednoduchý zborcený 6-úhelník, (A, B, C, D), (D, E, F, A) dva jeho rovinné sledy. Nechť přímky AD, BC, EF jsou navzájem



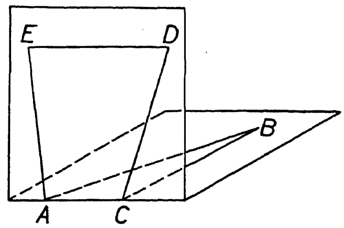
Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.



Obr. 13.

rovnoběžné, polopřímky AF, DE se neprotnou. Pak P je základní. Směry AB, CD, DE, FA jsou nepostradatelné. Odtud plyne, že čára R při redukci by byla buď paralelní s (A, B, C, D) nebo (D, E, F, A). Žádná však z těchto čar není typu Ω a tedy R nemůže být typu Ω_∞ – spor (obr. 13).

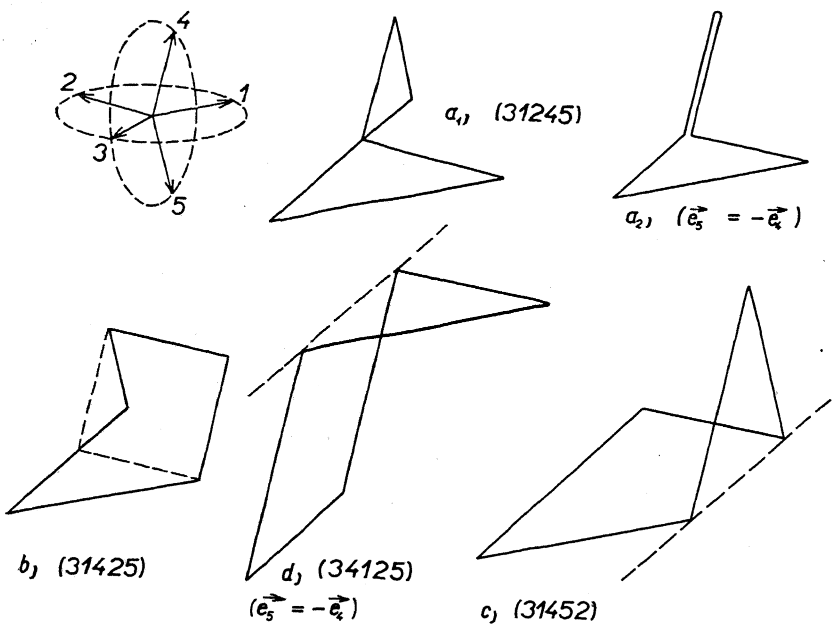
Věta 4. *Je-li jednoduchý zborcený mnohoúhelník* P *základní, pak je jedním z uvedených pěti typů.*

Důkaz provedeme v dalších dvou lemmatech.

Poznámka 13. Nechť $\{\mathbf{e}_i\}$ je posloupnost jednotkových vektorů $\mathbf{e}_i = OS$ v E_3 taková, že body S_i jsou vesměs různé a tvoří množinu primitivní na jednotkové kouli K. Pak existuje zborcený mnohoúhelník Q tak, že daná posloupnost je systémem jeho směrů. Důkaz se provede snadno přímou konstrukcí. Mnohoúhelník Q v případě primitivní čtveřice je zborcený čtyřúhelník (obr. 9), tvary mnohoúhelníka Q v případech primitivní pětice a šestice jsou uvedeny na obrazech 14 a 15.

Lemma 3. *Jestliže základní mnohoúhelník* P *má všechny rovinné sledy* 1-*lomené, pak je to mnohoúhelník I, II nebo IV.*

Důkaz. Nechť $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ je systém směrů mnohoúhelníka P. Jejich koncové body S_i vytvoří na jednotkové kouli K množinu $\mathfrak{S}$ typu $(*)$ (pozn. 12). Zřejmě existují indexy i_j, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n$ tak, že body S_{i_j} jsou vesměs různé a množina $\{S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}\}$ je na kouli K primitivní. Podle poznámky 13 existuje mnoho-



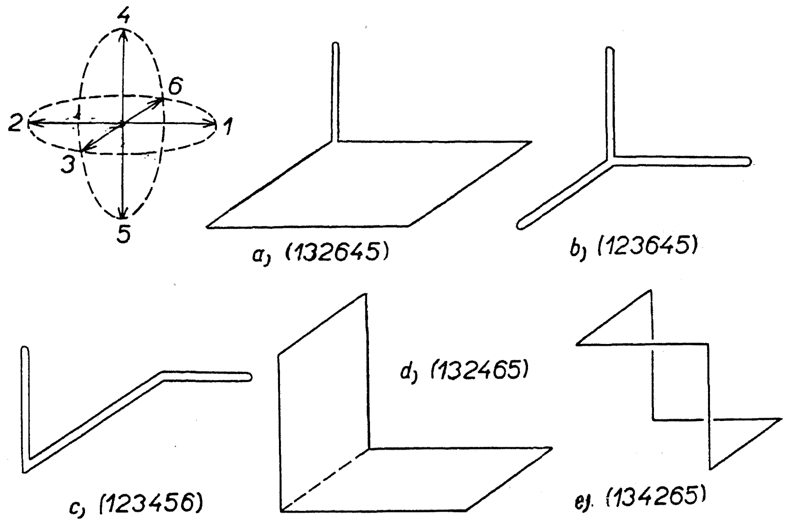
Obr. 14.

úhelník Q tak, že posloupnost $\{\mathbf{e}_{i_j}\}$ je systémem jeho směrů. Q je jedním z mnohoúhelníků uvedených na obr. 9, 14 a 15. Poněvadž mnohoúhelník P má vlastní vrcholy a všechny jeho rovinné sledy jsou 1-lomené, jsou posloupnosti $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_2})$, $(\mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_2+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_3})$, $\ldots$ $(\mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{i_k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i_1})$ typu Ω (def. 6). Zkonstruujme (podle lemmatu 1) příslušné čáry $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \ldots, \mathsf{R}_{k-1}, \mathsf{R}_k$ typu Ω_∞ (vhodně malé).

Nechť Q je jednoduchý (případy uvedené na obr. 9,14b, c, d, 15d, e). Poněvadž P je základní, nelze jej redukovat, a tedy je P $\equiv$ Q. Tím jsou vyloučeny případy uvedené na obr. 14c, d, 15d (všechny rovinné sledy nejsou zde 1-lomené) a tedy nastane buď případ vyznačený na obr. 9 — příp. I, nebo na obr. 14b — příp. II, nebo na obr. 15e — příp. IV.

Jestliže Q není jednoduchý (případy zobrazené na obr. 14a, 15a, b, c) snadno zkonstruujeme jednoduchý mnohoúhelník Q′, který vznikne z P redukcí — spor, neboť P je základní. Mnohoúhelník Q′ zkonstruujeme pro případ obr. 14a_2: body $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}$ tvoří trojúhelník, S_{i_4}, S_{i_5} dva protilehlé póly. Zřejmě existuje index

j, $i_1 < j < i_2$ tak, že vektory $\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}$ nejsou komplanární. (Jestliže $i_2 = i_1 + 1$, existuje takové j mezi i_2, i_3. Přečíslováním vektorů obdržíme předchozí případ.) Snadno se zkonstruuje jednoduchý zborcený mnohoúhelník Q', jehož systém směrů je jedna z posloupností $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}, \mathbf{e}_{i_4})$, $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}, \mathbf{e}_{i_5})$. Zřejmě každá z posloupností $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_2})$, $(\mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_2+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_3})$, $(\mathbf{e}_{i_3}, \mathbf{e}_{i_3+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_4})$, $(\mathbf{e}_{i_3}, \mathbf{e}_{i_3+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_5})$, $(\mathbf{e}_{i_4}, \mathbf{e}_{i_4+1}, \ldots, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i_1-1}, \mathbf{e}_{i_1})$, $(\mathbf{e}_{i_5}, \mathbf{e}_{i_5+1}, \ldots, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i_1})$ je typu Ω. Tedy Q' vznikne z P redukcí. Podobně se zkonstruuje Q' pro ostatní případy uvedené na obr. 14a, 15a, b, c. Důkaz lemmatu je ukončen.



Obr. 15.

Poznámka 14. Metody užité v předchozím důkaze lze využít ke konstrukci zborceného (ne nutně jednoduchého) mnohoúhelníka s předepsanými směry stran (pozn. 12).

Poznámka 15. Nechť P je jednoduchý zborcený mnohoúhelník, X půlící bod i-té jeho strany. Snadno se nahlédne platnost následujícího tvrzení:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí: Pro každý bod Y kulového δ-okolí bodu X lze sestrojit vhodnými změnami délek stran (změny nepřevyšují číslo ε (nový mnohoúhelník P' tak, že P' je jednoduchý, je paralelní s mnohoúhelníkem P a jeho i-tá strana prochází bodem Y.

Lemma 4. *Jestliže základní mnohoúhelník* P *nemá rovinné sledy vesměs* 1*-lomené, je to mnohoúhelník III nebo V.*

Důkaz. Nechť $\mathsf{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ je libovolný zborcený jednoduchý n-úhelník, $\mathsf{R}_1 = (A_1, \ldots, A_i, A_{i+1})$, $i \geqq 3$ jeho rovinný sled. Princip důkazu bude spočívat v tom, že sled R_1 nahradíme jeho základním sledem a podle situací, které vzniknou, pak provedeme redukci mnohoúhelníka P (není-li ovšem P typu III či V).

1. Existuje index j, $2 \leqq j \leqq i$ tak, že vektory $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_{j+1}$ tvoří pro směr A_1A_{i+1} základní trojici. Zřejmě existují body B, C tak, že vektory A_1B, BC, CA_{i+1} jsou po řadě souhlasně rovnoběžné s vektory $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_{j+1}$ a mnohoúhelník $\mathsf{P}' = (A_1, B, C, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n)$ je jednoduchý. Jestliže $i > 3$, lze zřejmě P redukovat na P'. Jestliže $i = 3$, lze položit $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$. Nechť čára $\mathsf{S} = (A_{i+1}, \ldots, A_n, A_1)$ je rovinná. Pak snadno dospějeme k cíli. (Čáru S nahradíme základním sledem. Obdržíme tak jednoduchý zborcený k-úhelník Q, kde $k = 5$ či 6. Jestliže $k < n$, lze P redukovat na Q. Jestliže $k = n$, je $\mathsf{P} = \mathsf{Q}$ a buď P je mnohoúhelník III nebo V nebo $n = 6$, polopřímky A_4A_5, A_1A_6 se protnou a P lze zřejmým způsobem redukovat na 5-úhelník.) Jestliže čára S je prostorová, lze na základě pozn. 15 zkonstruovat mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (A_1, B, A'_{i+1}, A'_{i+2}, \ldots, A'_n)$ tak, že vektory A_1B, BA'_{i+1}, $A'_{i+1}A'_{i+2}$, $\ldots$, A'_nA_1 jsou po řadě souhlasně rovnoběžné s $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ a počet singulárních bodů mnohoúhelníka Q je konečný, žádný z nich není vrcholem a všechny leží uvnitř strany $\overline{BA'_{i+1}}$. Jestliže Q je jednoduchý, jsme hotovi (P lze redukovat na Q). Není-li Q jednoduchý, nechť U je singulární bod nejbližší bodu B (nechť U leží v s-té straně). Pak $(A_1, B, U, A'_{s+1}, \ldots, A'_n)$ je jednoduchý zborcený a vznikne redukcí z P.

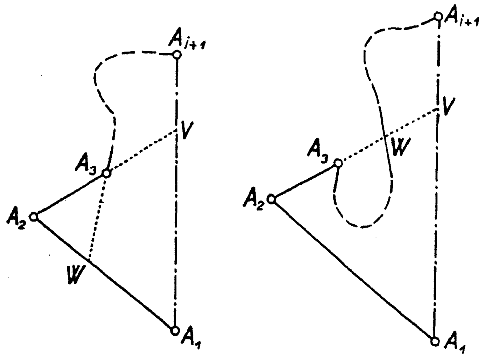
2. Nechť žádná základní trojice pro čáru R_1 neexistuje. Nechť $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$, $2 \leqq j \leqq i$, je základní dvojicí pro směr A_1A_{i+1}. Existuje bod B tak, že vektory A_1B, BA_{i+1} jsou po řadě souhlasně rovnoběžné s $\mathbf{e}_{j-1}$, $\mathbf{e}_j$. Nahraďme sled R_1 sledem (A_1, B, A_{i+1}) (mnohoúhelník označme P'). Jestliže P' je jednoduchý, jsme hotovi (P' vznikne z P redukcí). Nechť tedy P' není jednoduchý. Na základě pozn. 15 lze předpokládat, že singulárních bodů je pouze konečně mnoho, žádný není vrcholem a všechny leží uvnitř stran sledu (A_1, B, A_{i+1}).

2.1. Nechť $2 < j < i$. Poněvadž P' není jednoduchý, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že uvnitř strany $\overline{BA_{i+1}}$ existují singulární body. Nechť U je ten z nich, který je nejblíže bodu B (nechť U leží v r-té straně, $r > i + 1$). Vložme do vrcholu A_1 mnohoúhelníka P' čáru $\mathsf{S} = (B_0, B_1, \ldots, B_{j-1}, B_j)$ typu Ω_∞ tak, že je paralelní s čarou $(A_n, A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_j)$. Nově vzniklý mnohoúhelník označme Q'. Vložení lze zřejmě provést tak, aby Q' nebyl jednoduchý a všechny jeho singulární body byly také singulární body z P'. Pak zřejmě mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (B_1, B_2, \ldots, B_{j-1}, B_j, U, A_{r+1}, \ldots, A_n \equiv B_0)$ je jednoduchý a zborcený a P lze na Q redukovat.

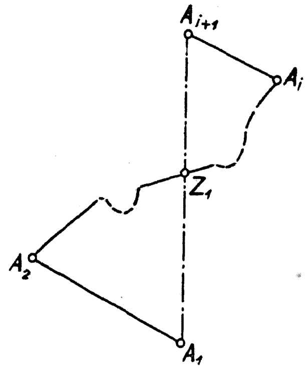
2.2. Nechť neplatí 2.1. Pak existují nejvýše 2 základní dvojice. Pro jednu je $j = 2$ pro druhou $j = i$. Nahraďme R_1 příslušnou dvojicí. Mnohoúhelníky označme P'_1, P'_2 (aspoň jeden z nich existuje). Podle předpokladu žádný z těchto mnohoúhelníků není jednoduchý. Jestliže v mnohoúhelníku P'_1 na straně $\overline{A_1B}$ neleží žádný singulární bod postupujeme stejně jako v 2.1 (U je nejbližší singulární bod bodu B, $\mathsf{Q} = (A_1, B, U$ $A_{r+1}, \ldots, A_n)$ vznikne redukcí z P). Stejně postupujeme, jestliže v P'_2 na straně $\overline{BA_{i+1}}$ neexistuje singulární bod. Nechť tedy žádný z těchto případů nenastane.

2.2a. Nechť P'_2 neexistuje. Podle předpokladů ve sledu R_1 existuje pouze jediná základní dvojice $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a bod A_2 leží mezi A_1, B. Poněvadž uvnitř strany $\overline{A_1B}$ mnohoúhelníka P'_1 leží singulární body, lze na základě poznámky 15 předpokládat, že všechny leží uvnitř stran sledu R_{j_l} (do kterého též patří strana $\overline{A_1A_2}$).

α) Nechť A_3 leží mezi A_1, A_{i+1}. Pak $\mathsf{R}_1 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$. Nechť U je za všech singulárních bodů bodu A_1 nejblíže. Bod U leží mezi A_2, B a polopřímka $(U, \mathbf{e}_2)$ protne vnitřek úsečky $\overline{A_1A_4}$ (tento bod označme V). Na základě poznámky 15 lze předpokládat, že mnohoúhelník $(A_1, U, V, A_4, \ldots, A_n)$, jenž je paralelní s P, má jediný singulární bod U (který je vrcholem a současně leží uvnitř r-té strany, $r > 4$). Zřejmě mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (U, V, A_4, A_5, \ldots, A_r)$ je jednoduchý, zborcený a vznikne z P redukcí.



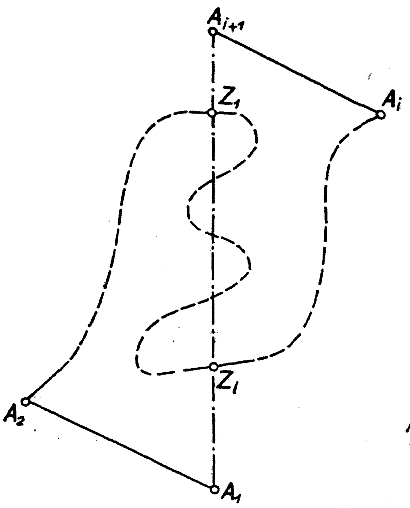
Obr. 16.



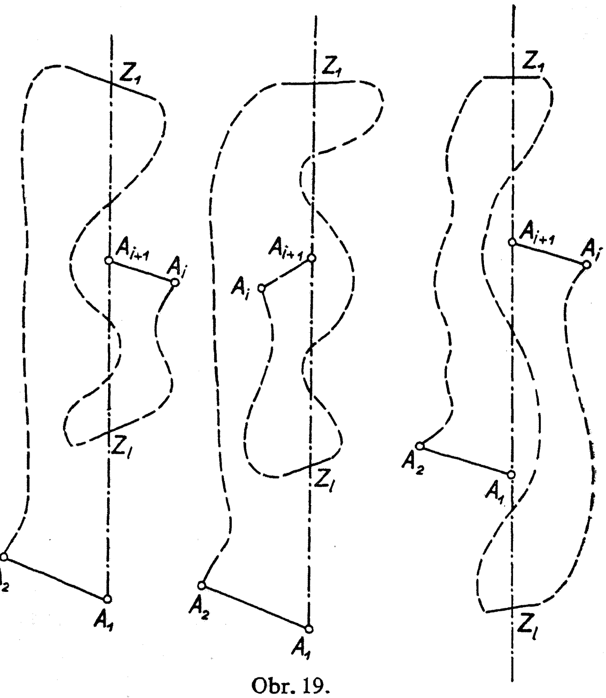
Obr. 17.

β) Nechť případ α) nenastane, tj. A_3 leží mezi A_2, V, kde bod V je průsečíkem polopřímky $(A_2, \mathbf{e}_2)$ s přímkou A_1A_{i+1} (V leží mezi body A_1, A_{i+1}) – viz obr. 16. Poněvadž čára R_1 má pouze jedinou základní dvojici $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, plyne z věty 3, že čára R_1 nemá s přímkou A_1A_{i+1}, kromě bodů A_1, A_{i+1} a kromě snad úsečky $\overline{A_iA_{i+1}}$, žádný další bod společný. Je tedy mnohoúhelník $\mathsf{T} = (A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1})$, resp. $(A_1, A_2, \ldots, A_i)$, $(A_i \in A_1A_{i+1})$, jednoduchý. Jestliže je vnitřní úhel mnohoúhelníka T při vrcholu A_3 vypuklý, protne polopřímka $(A_3, -\mathbf{e}_3)$ vnitřek úsečky $\overline{A_1A_2}$ (v bodě W – viz obr. 16). Na základě poznámky 15 lze předpokládat, že buď zborcený mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (A_1, W, A_4, \ldots, A_n)$ je jednoduchý a jsme hotovi (P lze na Q redukovat), nebo $i = 3$ a existují body U, V tak, že A_2 leží mezi U, A_1, V mezi A_3, A_4, UV je souhlasně rovnoběžný s $\mathbf{e}_2$ a mnohoúhelník $(A_1, U, V, A_4, A_5, \ldots, A_n)$, jenž je paralelní s P, má jediný singulární bod U, který je vrcholem a současně leží uvnitř r-té strany $(r > 4)$. Zřejmě pak mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (U, V, A_4, \ldots, A_r)$ je jednoduchý, zborcený a vznikne z P redukcí. Jestliže jest vnitřní úhel mnohoúhelníka T při vrcholu A_3 dutý, leží uvnitř úsečky $\overline{A_3V}$ aspoň jeden bod z mnohoúhelníka T. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat (pozn. 15), že těchto bodů je jen konečně mnoho a žádný není vrcholem. Nechť W je z nich nejbližší bodu A_3 (W nechť leží v r-té straně, $4 < r \leqq i$ – viz obr. 16). Na základě pozn. 15 lze předpokládat, že zborcený mnohoúhelník $\mathsf{Q} = (A_1, A_2, W, A_{r+1}, \ldots, A_n)$ je jednoduchý – jsme hotovi (P lze na Q redukovat, neboť čára $(A_2, A_3, \ldots, A_r, A_{r+1})$ je typu Ω).

2.2b. Nechť P_1' i P_2' existují. Pak $i \geqq 4$ a bod A_i neleží na přímce A_1A_{i+1}. Jestliže mnohoúhelník $\mathsf{T} = (A_1, \ldots, A_{i+1})$ je jednoduchý, postupujeme stejně jako v 2.2aβ. Jestliže T není jednoduchý, lze předchozími změnami délek stran docílit toho, že čára R_1 má kromě bodů A_1, A_{i+1} s přímkou A_1A_{i+1} jen konečně mnoho bodů společných a žádný z těchto bodů není vrcholem. Tyto body označme Z_j (leží uvnitř t_j-té strany). Platí $1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < i$. Poněvadž má čára R_1 pouze dvě základní dvojice $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i$, je každý z vektorů Z_jZ_{j+1} $(j = 1, 2, \ldots, l-1)$ souhlasně rovnoběžný s $A_{i+1}A_1$. Poněvadž $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$



Obr. 18.



Obr. 19.

a $\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i$ jsou jediné základní dvojice, neleží bod A_1 mezi Z_1, A_{i+1} ani bod A_{i+1} mezi A_1, Z_l. Jsou možny pouze tři případy: (1) $l = 1$ a Z_1 leží mezi A_1, A_{i+1} (obr. 17), (2) $l > 1$ a $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ leží mezi A_1, A_{i+1} (obr. 18), (3) $l > 1$ a A_{i+1} leží mezi A_1, Z_1 (obr. 19). (Jestliže A_1 leží mezi A_{i+1}, Z_l, jde o případ (3), přečíslujeme-li strany.)

Případ (1): Jestliže strana $a_2 = \overline{A_2A_3}$ sledu R_1 neprotne přímku A_1A_{i+1}, pak buď polopřímka $(A_3, \mathbf{e}_2)$ protne čáru R_1 nebo polopřímka $(A_3, -\mathbf{e}_3)$ protne vnitřek strany a_1. V obou těchto případech redukujeme P stejným způsobem jako v 2.2aβ. Leží-li bod Z_1 na a_2, neprotne a_{i-1} přímku A_1A_{i+1} (neboť $i > 3$) a situace je stejná jako předchozí.

Případ (2): Neprotne-li některá ze stran a_2, a_{i-1} přímku A_1A_{i+1}, postupujeme stejně jako v případu (1). Jestliže Z_1 leží v a_2, Z_l v a_{i-1}, protne polopřímka $(A_3, \mathbf{e}_2)$ čáru R_1 a redukujeme P stejně jako v 2.2aβ.

Případ (3): V rovině sledu R_1 sestrojíme homotetii φ o středu A_1 tak, aby $Z_1^\varphi \equiv A_{i+1}$. Je-li mnohoúhelník $(A_1, A_2^\varphi, \ldots, A_{t_1}^\varphi, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n)$ jednoduchý, vznikne zřejmě z P redukcí — jsme hotovi. Není-li jednoduchý, označme Z prvý singulární bod na čáře $(A_1, A_2^\varphi, \ldots, A_{i_1}^\varphi, A_{i+1})$ (předchozími změnami délek stran lze docílit toho, že všechny singulární body tvoří konečnou množinu a žádný není vrcholem) postupujeme-li z A_1 do A_{i+1}. Zřejmě Z non $\in a_1^\varphi$. Nechť Z leží v r-té straně, $r > i + 1$. Pak zřejmě jednoduchý zborcený mnohoúhelník $(A_1, A_2^\varphi, \ldots, Z, A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_n)$ vznikne z P redukcí. Lemma 4 je dokázáno.

Věta 4 je bezprostředním důsledkem lemmat 3 a 4.

Definice 10. Řekneme, že *posloupnost jednotkových vektorů* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ *v* E_3 *je základní*, jestliže posloupnost má vlastnosti uvedené v některém z případů I až V.

Poznámka 16. Jestliže $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ je základní posloupnost vektorů, pak existuje jednoduchý zborcený mnohoúhelník P tak, že daná posloupnost je systémem jeho směrů (tvrzení se snadno dokáže přímou konstrukcí).

Výsledkem všech předchozích úvah je následující tvrzení:

Věta 5. *Nechť* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, $n \geqq 4$ *je posloupnost jednotkových vektorů* $\mathbf{e}_i = OS_i$ *v* E_3 *taková, že body* S_i *tvoří na jednotkové kouli K množinu* $\mathfrak{S}$ *typu* $(*)$ *a vektory* $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i+1}$ (i mod n) *nejsou pro žádné i kolineární. Pak existuje jednoduchý zborcený n-úhelník* P, *jehož systém směrů je naše daná posloupnost právě když existují čísla* $1 \leqq i_1 < < i_2 < \ldots < i_k \leqq n$ *tak, že posloupnost* $\{\mathbf{e}_{i_j}\}_{j=1}^k$ *je základní a posloupnosti* $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_2}), \ldots, (\mathbf{e}_{i_k}, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i_1})$ *jsou typu* Ω.

Důkaz je snadný; nutnost podmínky plyne z věty 4, postačitelnost pak z pozn. 16 a lemmatu 1.

Poznámka 17. Existuje zborcený mnohoúhelník P v E_3 tak, že není jednoduchý a též každý s ním paralelní není jednoduchý. Toto tvrzení lze zobecnit pro každou dimensi $n \geqq 3$: V libovolné rovině $\varrho \subset \mathsf{E}_n$ sestrojme čáru (A_1, A_2, A_3, A_4) tak, aby strany $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_3A_4}$ se protínaly v bodě ležícím uvnitř obou. Přímkou A_1A_4 veďme nadrovinu σ tak, že $\varrho \cap \sigma = A_1A_4$. V σ sestrojme jednoduchou lomenou čáru $(A_4, A_5, \ldots, A_{n+2})$ tak, že body $A_4, A_5, \ldots, A_{n+2}, A_1$ jsou lineárně nezávislé a směr A_1A_4 je pro mnohoúhelník $(A_4A_5, \ldots, A_{n+2}, A_1)$ nepostradatelný (analogický pojem trojrozměrnému případu).

Problém 3. Nalézt nutnou a postačující podmínku pro existenci jednoduchého zborceného mnohoúhelníka s předepsanými směry stran v E_n. Speciálně dokázat, že v E_n existuje jen konečně mnoho základních jednoduchých zborcených mnohoúhelníků, a nalézt je.

Literatura

[1] *K. Čulík*: O existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými úhly. Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), 415—426.

[2] *W. Fenchel*: Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenem Tangentenbild. Jahresbericht der deutsch. math. Vereinigung, *39* (1930), 183—185.

[3] *V. Havel*: Poznámka o existenci mnohoúhelníka. Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 405–409.

[4] *V. Havel*: Sur la solution strictement positive d'un système d'équations linéaires homogènes. Časopis pro pěst. matematiky, *87* (1962), 22–30.

[5] Výsledek *K. Löwnera* je uveden v knize *Polya-Szegö*: Aufgaben und Lehrsätze II (1925), str. 165 a 391.

[6] *V. Polák*: O jisté transformaci jednoduchých lomených čar v rovině. Matematicko-fyzikálny časopis, SAV, *12* (1962), (v tisku).

[7] *A. Rényi:* Poznámka o úhlech mnohoúhelníka. Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 305–306.

[8] *E. Steinitz*: Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme II. Journal für die r. u. a. Math., *144* (1914), 1–40.

Резюме

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОСТОГО КОСОГО МНОГОУГОЛЬНИКА В E_3 С ПРЕДПИСАННЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ СТОРОН

ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák), Брно

Статья содержит доказательство следующего утверждения: *Для данной последовательности* $\{\mathbf{e}_i\}_{j=1}^n$ *единичных векторов существует простой косой многоугольник в* E_3, *системой направлений которого является указанная выше последовательност, если и только если существует подпоследовательность* $\{\mathbf{e}_{i_j}\}_{i=1}^k$, *являющаяся основной, и последовательности* $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_2}), \ldots, \ldots, (\mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{i_k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i_1})$ *принадлежат типу* Ω. (См. теорему 5.) Основная последовательность является системой направлений одного из пяти многоугольников (т. наз. основных) на рис. 9–13. Последовательность принадлежит типу Ω, если она является последовательностью направлений простой ломаной линии, оба крайних отрезка которой можно одновременно безгранично продолжать без нарушения простоты.

При исследовании основных многоугольников нужно ввести понятие примитивной системы $\mathfrak{S}$ точек на шаре. (Конечная система $\mathfrak{S}$ тоьек на шаре называется примитивной, если (*) открытая выпуклая оболочка из $\mathfrak{S}$ содержит центр шара, и (**) для любой точки $A \in \mathfrak{S}$ множество $\mathfrak{S} - \{A\}$ не имеет свойства (*).) Существуют только три типа примитивных систем точек на шаре (теорема 1). На окружности имеются лишь два типа примитивных систем.

Проблема: Отыскать все примитивные системы точек на $(n-1)$-мерном шаре в E_n (об экстремальном случае — $2n$ точек — см. [8]).

Summary

ON THE EXISTENCE OF A SIMPLE SKEW POLYGON IN E_3 WITH PRESCRIBED DIRECTIONS OF SIDES

VÁCLAV POLÁK, Brno

The paper contains the proof of the following theorem: *For a given finite sequence $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ of unit vectors, there exists a simple skew polygon in E_3 such that above mentioned sequence is the sequence of its directions, if and only if there exists a fundamental subsequence $\{\mathbf{e}_{i_j}\}_{j=1}^k$ such that all sequences $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \dots, \mathbf{e}_{i_2}), \dots, (\mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{i_k+1}, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i_1})$ are of type Ω.* (See theorem 5; a fundamental sequence is a sequence of directions of one of the five so-called fundamental simple skew polygons in fig. 9-13. A sequence of type Ω is the sequence of directions of a simple polygonal line with the following property: both its terminal sides can be simultaneously unlimitedly prolonged without losing the property of being a simple polygonal line.)

In studying fundamental polygons it is necessary to study the so-called irreducible system $\mathfrak{S}$ of points on the sphere; there are finite sets of points with the following properties: $(*)$ The center of the sphere is an inner point of the convex hull of the set $\mathfrak{S}$; $(**)$ If $A \in \mathfrak{S}$ is an arbitrary point, then $\mathfrak{S} - \{A\}$ does not satisfy $(*)$. There are only three types of irreducible systems on the sphere (theorem 1). On the circle there are only two.

The problem is to find all irreducible systems on the $(n-1)$-dimensional sphere in E_n (about the extremal case $2n$ points see [8]).