Alois Apfelbeck

# Elementární důkaz existence charakteristických hodnot pro symetrické Fredholmovy integrální rovnice 2. druhu

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 87 (1962), No. 3, 367--374

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117433`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

# ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ EXISTENCE CHARAKTERISTICKÝCH HODNOT PRO SYMETRICKÉ FREDHOLMOVY INTEGRÁLNÍ ROVNICE 2. DRUHU

ALOIS APFELBECK, Praha

(Došlo dne 30. června 1961)

Metody důkazu existence charakteristických hodnot pro okrajové úlohy v teorii diferenciálních rovnic, užité v [1] a [2], lze užít i na symetrické Fredholmovy integrální rovnice 2. druhu.

Všechny funkce v tomto pojednání jsou omezené komplexní funkce reálných proměnných; $\langle a, b\rangle$ je omezený uzavřený interval a Riemannovy integrály $\int_a^b K(x, y)\, dy$, $\int_a^b K(x, y)\, dx$, $\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, dx\, dy$, $\int_a^b \varphi(x)\, dx$, $\int_a^b \psi(x)\, dx$ existují (tedy existují mj. i integrály $\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx$, $\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dx\, dy$ apod.). Integrální rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

se nazývá Fredholmova rovnice 2. druhu. Zde jsou $f(x)$ a jádro $K(x, y)$ dané funkce. Rovnici nazýváme symetrickou, je-li

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}\,. \tag{2}$$

Charakteristickou hodnotou jádra $K(x, y)$ rozumíme takové číslo $\lambda_0$ (obecně komplexní), pro něž má homogenní rovnice

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, y)\, \varphi_0(y)\, dy = 0 \tag{3}$$

netriviální řešení $\varphi_0(x)$. Toto řešení pak nazýváme charakteristickou funkcí jádra $K(x, y)$. Ze vztahu (3) je zřejmé, že $\lambda = 0$ nemůže být charakteristickou hodnotou.

Z obecné teorie Fredholmových rovnic ([3], kap. I) je známá věta:

*Není-li $\lambda$ charakteristická hodnota jádra $K(x, y)$, má rovnice (1) právě jedno řešení*

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda)\, f(y)\, dy\,,$$

*kde $\Gamma(x, y, \lambda)$ je tzv. Fredholmova resolventa. Tato resolventa je v celé komplexní $\lambda$-rovině meromorfní funkce a jejími póly jsou charakteristické hodnoty jádra $K(x, y)$.*

Dále je známo ([3], kap. II, § 12), že *všechny charakteristické hodnoty symetrického jádra jsou reálné.*

Konečně užijeme věty ([3], kap. II, § 13), že *množina charakteristických hodnot druhého iterovaného jádra* $K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(t, y)\,dt$ *je totožná s množinou čtverců charakteristických hodnot jádra* $K(x, y)$.

V této práci je podán elementární důkaz věty 3, kap. II, § 12 učebnice [3]:

*Nechť* $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\,dx\,dy = C^2 > 0$. *Potom v absolutní hodnotě nejmenší charakteristická hodnota* $\lambda_0$ *jádra* $K(x, y)$ *je dána vztahem*

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = \max_{\varphi} |K[\varphi]|\,, \tag{4}$$

*kde*

$$K[\varphi] = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi}(y)\,dx\,dy\,, \tag{5}$$

*přičemž* $\varphi$ *probíhá množinou všech funkcí integrabilních v intervalu* $\langle a, b\rangle$, *které vyhovují podmínce*

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx = 1\,. \tag{6}$$

*Výraz* $|K[\varphi]|$ *nabývá uvedeného maxima, je-li* $\varphi(x) = \overline{\varphi}_0(x)$, *kde* $\varphi_0(x)$ *je charakteristická funkce odpovídající charakteristické hodnotě* $\lambda_0$ *a normovaná vztahem* (6).

Než přikročíme k důkazu této věty, dokážeme dvě pomocné věty.

**Pomocná věta 1.** *Budiž* $f(x, y)$ *reálná funkce omezená a integrabilní v oboru* $a \leqq x, y \leqq b$ *a nechť*

$$\int_a^b \int_a^b (f(x, y))^2\,dx\,dy = C^2 > 0\,.$$

*Potom existuje obdélník* $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$, $\alpha_2 \leqq y \leqq \beta_2$, *který je částí čtverce* $a \leqq x, y \leqq b$, *takový, že*

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y)\,dx\,dy \neq 0\,,$$

*přičemž je buďto* $\beta_1 < \alpha_2$ *nebo* $\beta_2 < \alpha_1$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje obdélník $\alpha'_1 \leqq x \leqq \beta'_1$, $\alpha'_2 \leqq y \leqq \beta'_2$, který je částí čtverce $a \leqq x, y \leqq b$, tak, že pro všechny body $(x, y)$ tohoto obdélníka platí

$$|f(x, y)| > \frac{C}{2(b - a)} > 0\,.$$

Kdyby totiž v každém, libovolně zvoleném obdélníku ležel bod $(x, y)$, v němž je

$$|f(x, y)| \leqq \frac{C}{2(b - a)}\,,$$

bylo by

$$(f(x, y))^2 \leqq \frac{C^2}{4(b - a)^2}$$

a každý dolní součet by byl nejvýše roven $\frac{1}{4}C^2$, takže dolní integrál funkce $(f(x, y))^2$ ve čtverci $a \leqq x, y \leqq b$ by nepřevyšoval $\frac{1}{4}C^2$. Na druhé straně je společná hodnota dolního a horního integrálu rovna

$$\int_a^b \int_a^b (f(x, y))^2 \, dx \, dy = C^2 ,$$

čímž docházíme ke sporu.

Předpokládejme nyní, že v každém obdélníku $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$, $\alpha_2 \leqq y \leqq \beta_2$, který je částí obdélníku $\alpha_1' \leqq x \leqq \beta_1'$, $\alpha_2' \leqq y \leqq \beta_2'$, jsou jak body, ve kterých je

$$f(x, y) > \frac{C}{2(b - a)},$$

tak i body, v nichž je

$$f(x, y) < -\frac{C}{2(b - a)}.$$

To však znamená, že v tomto obdélníku je horní integrál alespoň

$$\frac{C}{2(b - a)} (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$$

a dolní integrál nejvýše

$$-\frac{C}{2(b - a)} (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2),$$

tj. funkce $f(x, y)$ nemůže být zde (a tudíž ani ve čtverci $a \leqq x, y \leqq b$) integrabilní, což je proti předpokladu věty.

Existuje tedy obdélník, ve kterém funkce $f(x, y)$ nemění znamení a vyhovuje nerovnosti

$$|f(x, y)| > \frac{C}{2(b - a)}.$$

To však zřejmě platí i pro každý obdélník, který je částí tohoto obdélníka, čímž lze splnit i jednu z nerovností $\beta_1 < \alpha_2$ nebo $\beta_2 < \alpha_1$. Bude pak pro $f(x, y) > 0$ (resp. $<0$)

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y) \, dx \, dy > 0 \quad (\text{resp. } <0) , \quad \text{c. b. d.}$$

**Pomocná věta 2.** *Budiž $K(x, y)$ omezená komplexní funkce reálných proměnných $x, y$ integrabilní ve čtverci $a \leqq x, y \leqq b$ a nechť $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Nechť konečně*

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \, dx \, dy = C^2 > 0 .$$

*Potom existuje funkce $\psi(x)$ omezená a integrabilní v $\langle a, b\rangle$ tak, že*

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \psi(x)\, \overline{\psi}(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \neq 0\,.^{*)}$$

Důkaz. Položme $K(x, y) = A(x, y) + i\, B(x, y)$. Zřejmě je $A(x, y) = A(y, x)$ a $B(x, y) = -B(y, x)$ a alespoň jeden z integrálů

$$\int_a^b \int_a^b A^2(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = C_1^2\,, \quad \int_a^b \int_a^b B^2(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = C_2^2$$

je kladný.

Nechť tvrzení věty není správné. Potom pro každou funkci $\psi(x)$, omezenou a integrabilní v $\langle a, b\rangle$ bude

$$K[\psi] = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \psi(x)\, \overline{\psi}(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0\,. \tag{7}$$

Zvolme dva libovolné disjunktní intervaly $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle$ a $\langle \alpha_2, \beta_2\rangle$, které jsou oba částí intervalu $\langle a, b\rangle$, a položme

$$\psi(x) = \begin{cases} m_1 & \text{pro } x \in \langle \alpha_1, \beta_1\rangle\,, \\ m_2 & \text{pro } x \in \langle \alpha_2, \beta_2\rangle\,, \\ 0 & \text{pro všechna ostatní } x \in \langle a, b\rangle\,, \end{cases}$$

kde $m_1$ a $m_2$ jsou libovolné komplexní konstanty. Po dosazení do (7) dostaneme

$$|m_1|^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + m_1 \overline{m}_2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left( \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \overline{m}_1 m_2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left( \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + |m_2|^2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0\,,$$

což je vzhledem k libovolnosti $m_1$ a $m_2$ možné pouze tehdy, je-li

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0\,,$$

$$m_1 \overline{m}_2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left( \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \overline{m}_1 m_2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left( \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 0\,.$$

Vzhledem k symetričnosti jádra lze poslední vztah přepsat ve tvaru

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left( \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [m_1 \overline{m}_2\, K(x, y) + \overline{m}_1 m_2\, \overline{K(x, y)}]\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 0\,,$$

tj.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\{ \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [(m_1 \overline{m}_2 + \overline{m}_2 m_1)\, A(x, y) + i(m_1 \overline{m}_2 - \overline{m}_1 m_2)\, B(x, y)]\, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = 0\,.$$

*) Pro Lebesgueův integrál je tato věta dokázána v závěrečné části učebnice [4].

Je-li nyní $C_1 > 0$, zvolíme $m_1 = m_2 = 1$ a máme $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2} A(x, y)\, dy\right) dx = 0$; je-li $C_1 = 0$, je $C_2 > 0$ a volbou $m_1 = 1$, $m_2 = i$ dostaneme $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2} B(x, y)\, dy\right) dx = 0$. V obou případech docházíme ke sporu s pomocnou větou 1, takže vztah (7) nemůže být splněn pro libovolnou funkci $\psi(x)$, což jsme chtěli dokázat.

Přistupme nyní k důkazu hlavní věty tohoto pojednání. Množina $K[\psi]$ s vedlejší podmínkou (6) je omezená. Dvojím užitím Schwarzovy nerovnosti totiž dostaneme

$$0 \leqq |K[\varphi]|^2 = \left|\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, \bar{\varphi}(y)\, dx\, dy\right|^2 \leqq$$

$$\leqq \int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx \,.\, \int_a^b \left|\int_a^b K(x, y)\, \bar{\varphi}(y)\, dy\right|^2 dx = \int_a^b \left|\int_a^b K(x, y)\, \bar{\varphi}(y)\, dy\right|^2 dx \leqq$$

$$\leqq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, y)|^2\, dy \,.\, \int_a^b |\varphi(y)|^2\, dy\right) dx = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dx\, dy = C^2\,.$$

Známe-li kteroukoli charakteristickou hodnotu $\lambda_0$, můžeme k ní sestrojit odpovídající charakteristickou funkci $\varphi_0(x)$ normovanou vztahem (6). Vynásobíme-li pak rovnost (3) výrazem $\bar{\varphi}_0(x)$, dostaneme po integraci podle $x$

$$\lambda_0 \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \bar{\varphi}_0(x)\, \varphi_0(y)\, dx\, dy = 1\,. \tag{8}$$

Předpokládejme nyní, že jádro $K(x, y)$ je positivně semidefinitní, tj. že pro libovolnou integrabilní funkci $\varphi(x)$ platí

$$K[\varphi] \geqq 0\,. \tag{9}$$

Podle pomocné věty 2 existuje funkce $\psi(x)$, kterou můžeme normovat vztahem (6), pro niž platí $K[\bar{\psi}] > 0$. Položme

$$\frac{1}{\Lambda} = K[\bar{\psi}]\,, \tag{10}$$

$$g(x) = \psi(x) - \Lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy\,. \tag{11}$$

Nyní mohou nastat dva případy:

1. $g(x) \equiv 0$; potom $\Lambda$ je charakteristická hodnota a $\psi(x)$ jí odpovídající charakteristická funkce. Pro nejmenší charakteristickou hodnotu $\lambda_0$ pak zřejmě bude

$$0 < \lambda_0 \leqq \Lambda\,. \tag{12}$$

2. $g(x) \not\equiv 0$; předpokládejme, že v intervalu $\langle 0, \Lambda \rangle$ neleží žádná charakteristická hodnota. Potom rovnice

$$\varphi(x, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y, \lambda)\, dy = g(x) \tag{13}$$

má pro každé $\lambda$ z tohoto intervalu právě jedno řešení

$$\varphi(x, \lambda) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda)\, g(y)\, dy\,,$$

které je v něm spojitou funkcí parametru $\lambda$. Odtud a ze vztahů (13) a (11) plyne speciálně

(14) $$\varphi(x, 0) = g(x), \quad \varphi(x, \Lambda) = \psi(x).$$

Položme dále

(15) $$h(\lambda) = \tfrac{1}{2}\int_a^b [\varphi(x, \lambda)\,\bar{g}(x) + \bar{\varphi}(x, \lambda)\,g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $h(\lambda)$ je spojitá v intervalu $\langle 0, \Lambda\rangle$; kromě toho je $h(0) = \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqq 0$ a podle (14), (11), (2) a (10) platí

$$h(\Lambda) = \tfrac{1}{2}\int_a^b (\psi(x)\,\bar{g}(x) + \bar{\psi}(x)\,g(x))\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_a^b \{2|\psi(x)|^2 - \Lambda\int_a^b K(x, y)\,\bar{\psi}(x)\,\psi(y)\,\mathrm{d}y -$$
$$- \Lambda\int_a^b \overline{K(x, y)}\,\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\,\mathrm{d}y\}\,\mathrm{d}x = = 1 - \Lambda\int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\bar{\psi}(x)\,\psi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Užijeme-li postupně vztahů (13) a (2), dostaneme dále

$$h(\lambda') - h(\lambda) = \tfrac{1}{2}\int_a^b \Big\{\varphi(x, \lambda')\Big[\bar{\varphi}(x, \lambda) - \lambda\int_a^b \overline{K(x, y)}\,\bar{\varphi}(y, \lambda)\,\mathrm{d}y\Big] +$$
$$+ \bar{\varphi}(x, \lambda')\Big[\varphi(x, \lambda) - \lambda\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y, \lambda)\,\mathrm{d}y\Big] -$$
$$- \varphi(x, \lambda)\Big[\varphi(x, \lambda') - \lambda'\int_a^b \overline{K(x, y)}\,\bar{\varphi}(y, \lambda')\,\mathrm{d}y\Big] -$$
$$- \bar{\varphi}(x, \lambda)\Big[\varphi(x, \lambda') - \lambda'\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y, \lambda')\,\mathrm{d}y\Big]\Big\}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\lambda' - \lambda}{2}\int_a^b\int_a^b K(x, y)\Big[\bar{\varphi}(x, \lambda)\,\varphi(y, \lambda') + \bar{\varphi}(x, \lambda')\,\varphi(y, \lambda)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

z čehož

$$h'(\lambda) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda} = \lim_{\lambda' \to \lambda}\frac{h(\lambda') - h(\lambda)}{\lambda' - \lambda} = \int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\bar{\varphi}(x, \lambda)\,\varphi(y, \lambda)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Podle (9) je tedy vždy $h'(\lambda) \geqq 0$ a podle (14) a (10) $h'_-(\Lambda) = 1/\Lambda > 0$. Poněvadž je $h(0) \geqq 0$, bude v celém intervalu $\langle 0, \Lambda\rangle$ $h(\lambda) \geqq 0$. Z nerovnosti $h'_-(\Lambda) > 0$ však plyne, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro $\Lambda - \delta < \lambda < \Lambda$ bude $h(\lambda) < h(\Lambda) = 0$, což je spor. Předpoklad, že v intervalu $\langle 0, \Lambda\rangle$ není žádná charakteristická hodnota, je tedy nesprávný, takže pro nejmenší charakteristickou hodnotu $\lambda_0$ platí opět vztah (12).

Je tedy vždy

(16) $$\frac{1}{\lambda_0} \geqq K[\bar{\psi}]$$

pro jakoukoliv funkci $\psi(x)$, pro níž je $K[\bar{\psi}] > 0$. (Vztah (16) bude ovšem samozřejmě splněn i pro $K[\overline{\psi}] = 0$.) Z toho plyne $1/\lambda_0 \geqq \sup\limits_{\varphi} K[\varphi]$. Avšak k charakteristické hodnotě $\lambda_0$ můžeme sestrojit normovanou charakteristickou funkci $\varphi_0(x)$ a podle (8) bude $\lambda_0 K[\overline{\varphi}_0] = 1$, takže $1/\lambda_0 = \max\limits_{\varphi} K[\varphi]$. Tím je věta dokázána pro positivně semidefinitní jádro.

Abychom větu dokázali pro libovolné jádro $K(x, y)$, budeme aplikovat tento výsledek na druhé iterované jádro $K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, y)\, dt$. Pro libovolnou normovanou integrabilní funkci $\varphi(x)$ platí

$$(17) \qquad \int_a^b \int_a^b K_2(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy \geqq \left| \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy \right|^2.$$

Je totiž

$$\int_a^b \int_a^b K_2(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, K(t, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy\, dt = \int_a^b \left| \int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, dx \right|^2 dt$$

a podle Schwarzovy nerovnosti máme dále

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy \right|^2 \leqq \int_a^b |\varphi(y)|^2\, dy \,.\, \int_a^b \left| \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, dx \right|^2 dy =$$

$$= \int_a^b \left| \int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, dx \right|^2 dt\,.$$

Druhé iterované jádro je tedy positivně semidefinitní; poněvadž podle pomocné věty 2 existuje funkce $\psi(x)$, pro níž je $K[\psi] \neq 0$, máme vzhledem k (17) splněny všechny předpoklady k užití dokázaného výsledku na toto iterované jádro.

Pro nejmenší charakteristickou hodnotu $\lambda_0$ (v absolutní hodnotě) jádra $K(x, y)$ tedy platí

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \max_{\varphi} \int_a^b \int_a^b K_2(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy \geqq \int_a^b \int_a^b K_2(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy \geqq |K[\varphi]|^2,$$

tj.

$$\frac{1}{|\lambda_0|} \geqq |K[\varphi]|$$

a

$$\frac{1}{|\lambda_0|} \geqq \sup_{\varphi} |K[\varphi]|\,.$$

Poněvadž však k této charakteristické hodnotě $\lambda_0$ existuje charakteristická funkce $\varphi_0(x)$, bude podle (8) $\lambda_0 K[\overline{\varphi}_0] = 1$, takže

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = \max_{\varphi} |K[\varphi]|\,,$$

čímž je věta úplně dokázána.

*Literatura*

[1] *A. Apfelbeck*: Mathematische Theorie der Torsions- u. Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe. Čech. matem. žurnal 7 (*82*), 1957, str. 274—411.
[2] *L. Collatz*: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949.
[3] *S. G. Michlin*: Integrální rovnice. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.
[4] *И. Г. Петровский:* Лекции по теории интегральных уравнений. Москва-Ленинград 1951.



## Резюме

## ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

АЛОИС АПФЕЛЬБЕК (Alois Apfelbeck), Прага

В работе дается элементарное доказательство существования характеристических значений для симметрических интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Центр тяжести доказательства заключается в построении функции (15) и в исследовании ее основных свойств.

## Zusammenfassung

## ELEMENTARER BEWEIS DER EXISTENZ VON EIGENWERTEN FÜR SYMMETRISCHE FREDHOLMSCHE INTEGRALGLEICHUNGEN ZWEITER ART

ALOIS APFELBECK, Praha

In der Arbeit ist ein elementarer Beweis der Existenz von Eigenwerten für Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art angegeben. Der Hauptgedanke des Beweises beruht auf der Konstruktion der Funktion (15) und der Ermittlung ihrer Grundeigenschaften.