Časopis pro pěstování matematiky

Jan Chrastina

O splynutí základních centrálních dispersí 3. a 4. druhu diferenciální rovnice $\ddot{y}(t) + Q(t)y(t) = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 2, 188--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117426

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

O SPLYNUTÍ ZÁKLADNÍCH CENTRÁLNÍCH DISPERSÍ 3. A 4. DRUHU DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $\ddot{y}(t) + Q(t)\, y(t) = 0$

JAN CHRASTINA, Brno

(Došlo dne 15. září 1960)

V práci jsou vyšetřovány takové rovnice (1), kdy pro každou dvojici $y_1(t)$, $y_2(t)$ jejich řešení mají funkce $y_1(t)\, \dot{y}_2(t)$, $\dot{y}_1(t)\, y_2(t)$ buď všechny nebo žádné kořeny společné.

1. Úvod. Ukážeme, jak některé úlohy vzniklé v souvislosti s teorií dispersí diferenciální rovnice

$$\ddot{y}(t) + Q(t)\, y(t) = 0\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \tag{1}$$

lze řešit pomocí známé Newtonovy interpretace. O funkci $Q(t)$ budeme v dalším předpokládat, že má n ($n \geqq 0$) spojitých derivací pro všechna t.[1]) Řešení rovnice (1) je pak tvaru

$$y(t) = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t)\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \tag{2}$$

kde α, β jsou libovolné konstanty a $y_1(t)$, $y_2(t)$ nějaká dvojice lineárně nezávislých řešení. Wronskián této dvojice je konstantní a různý od nuly

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix} = C \neq 0\,. \tag{3}$$

Funkce $y_1(t)$, $y_2(t)$ mají $n + 2$ spojitých derivací v celém definičním oboru; stručněji budem říkat, že jsou *hladké*. Podobně křivka daná v afinní rovině jistými parametrickými rovnicemi se bude nazývat *hladkou*, jestliže afinní souřadnice jejího bodu jsou hladkými funkcemi příslušného parametru. Tento parametr někdy značíme písmenem t; pak mluvíme o *hladce se pohybujícím bodu*.

Obráceně každé dvojici $y_1(t)$, $y_2(t)$, $-\infty < t < \infty$, hladkých funkcí s konstantním Wronskiánem různým od nuly odpovídá jistá diferenciální rovnice (1), která se dostane přechodem ke svazku (2) a vyloučením parametrů α, β:

$$\begin{vmatrix} y(t) & y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}(t) & \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{y}_1(t) & \ddot{y}_2(t) \end{vmatrix} = \ddot{y}(t) + \frac{1}{C} \begin{vmatrix} \dot{y}_1 t & \dot{y}_2 t \\ \ddot{y}_1 t & \ddot{y}_2 t \end{vmatrix} y(t) = 0\,. \tag{4}$$

[1]) Za nultou derivaci považujeme funkci $Q(t)$ samu.

Příslušná funkce $Q(t)$ bude mít n spojitých derivací a dvě dvojice funkcí dají tutéž rovnici (1) právě tehdy, když vedou ke stejnému svazku (2).

Vyjádřeme tyto podmínky přehledněji. Považujme vztahy $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ za rovnice popisující pohyb bodu $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$, afinní roviny y_1, y_2. Podle (3) opíše jeho průvodič za dobu dt plochu $\frac{1}{2}C\,dt$ a tedy za dobu $t_1 - t_2$ plochu $\frac{1}{2}C(t_1 - - t_2)$. Budeme říkat, že příslušný bod se pohybuje *rovnoměrně* (rychlostí $\frac{1}{2}C$, kterou budeme vždy brát různou od nuly). Dva rovnoměrně pohybující se body $Y(t)$, $\bar{Y}(t)$, $-\infty < t < \infty$, zřejmě vedou na tutéž rovnici právě tehdy, když existuje afinní transformace zachovávající počátek souřadnic (dále, *centrum*) a převádějící bod $Y(t)$ do bodu $\bar{Y}(t)$ pro každé t. Říkáme pak, že tyto pohybující se body jsou *ekvivalentní.*

Trajektorie bodu $Y(t)$ má speciální tvar. Podle (3) totiž poměry $y_1(t)/y_2(t)$, $y_2(t)/y_1(t)$ stále rostou nebo stále klesají, tedy bod $Y(t)$ se otáčí kolem centra stále jedním směrem. Rovnice jeho pohybu proto mají tvar

(5) $$y_1 = \varrho(\varphi)\cos\varphi\,,\quad y_2 = \varrho(\varphi)\sin\varphi\,,\quad a < \varphi < b\,,$$

(5′) $$\varphi = \varphi(t)\,,\quad -\infty < t < \infty\,,$$

kde $\varrho(\varphi)$, $\varphi(t)$ jsou hladké funkce, $\varphi'(t) \neq 0$, $\varrho(\varphi) > 0$ a interval $a < \varphi < b$ je vytvořen hodnotami funkce $\varphi(t)$, když t probíhá všechna reálná čísla. Vztahy $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi = \varphi(t)$ zřejmě můžeme považovat za rovnice pohybu bodu $Y(t)$ v polárních souřadnicích, odkud plyne tato další podmínka: Integrály

(6) $$\int_a^c \varrho^2(\varphi)\,d\varphi\,,\quad \int_c^b \varrho^2(\varphi)\,d\varphi\,,\quad a < c < b\,,$$

divergují. Pro $t \to \infty$ i pro $t \to -\infty$ (tedy pro $\varphi \to a$ i pro $\varphi \to b$) roste totiž plocha opsaná průvodičem bodu $Y(t)$ v absolutní hodnotě nade všechny meze.

Uvedenými vlastnostmi jsou již naše trajektorie zcela charakterisovány. Předpokládejme totiž obráceně, že máme hladkou křivku (5), pro kterou integrály (6) divergují. Na této křivce stačí zavést parametr t vztahem

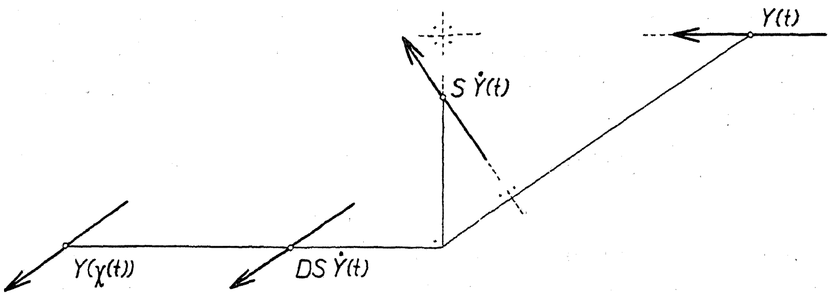
(7) $$t(\varphi) = \frac{1}{C}\int_A^\varphi \varrho^2(\varphi)\,d\varphi\,,\quad C \neq 0\,;$$

tím se dostane rovnoměrně (rychlostí $\frac{1}{2}C$) se pohybující bod $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$, který již vede k příslušné rovnici (1).

Zmíněné požadavky jsou splněny zejména pro hladkou uzavřenou konvexní křivku (tj. hranici konečné konvexní oblasti) obsahující uvnitř centrum.

2. Disperse, jejich splynutí. Definujme funkce $\chi(t)$, $\omega(t)$ takto: $\chi(\bar{t})$ je ten časový okamžik nejblíže následující po $\bar{t}$, kdy se bod $Y(t)$ pohybuje rovnoběžně s průvodičem bodu $Y(\bar{t})$; $\omega(\bar{t})$ je ten časový okamžik nejblíže následující po $\bar{t}$, kdy průvodič bodu $Y(t)$ je rovnoběžný s vektorem rychlosti v okamžiku $t = \bar{t}$.

Tyto definice jsou centroafinně invariantní a budou jim tedy odpovídat nějaké pojmy příslušné rovnici (1). Vezměme $\chi(t)$. Nechť průvodič bodu $Y(\bar{t})$ má rovnici $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, tedy $\alpha\, y_1(\bar{t}) + \beta\, y_2(\bar{t}) = 0$. Pak $\chi(\bar{t})$ je ten časový okamžik nejblíže následující po $\bar{t}$, kdy $\alpha\, \dot{y}_1(\chi(\bar{t})) + \beta\, \dot{y}_2(\chi(\bar{t})) = 0$, což je možné vyjádřit také takto: Vezmeme to netriviální řešení rovnice (1), které má pro $t = \bar{t}$ kořen; $\chi(\bar{t})$ je pak nejblíže větší kořen jeho derivace. Podle [1] tedy jde o tzv. *základní centrální dispersi 3. druhu*. Podobně $\omega(t)$ je *základní centrální disperse 4. druhu* a číslu $\bar{t}$ přiřazuje nejblíže větší kořen toho netriviálního řešení rovnice (1), které má v $\bar{t}$ extrém. V práci (1) jsou tyto funkce vyšetřovány v případě, kdy $Q(t) \leqq 0$ a kdy rovnice (1) je oscilatorická. To zaručuje, že jsou spojité a že mají smysl pro všechna t. Všimněme si však, že i v našem případě je $\omega(t)$ spojitá funkce definovaná na otevřeném oboru.



Obr. 1.

Budeme hledat takové rovnice, kdy příslušné funkce $\chi(t)$, $\omega(t)$ splynou a mají zejména tentýž definiční obor.

Užijeme metody práce J. Radona [2]. Nechť S je polarita vzhledem ke kružnici o poloměru r $(r > 0)$ se středem v centru a D otočení kolem centra o úhel $\frac{1}{2}\pi$ nebo $-\frac{1}{2}\pi$ podle toho, zda $Y(t)$ obíhá kolem centra v kladném nebo záporném smyslu. Označme jako $\dot{Y}(t)$ tu tečnu v bodě $Y(t)$, která je určena vektorem rychlosti v okamžiku t. Tuto tečnu orientujme souhlasně s rostoucím φ. Vezměme nějaký největší interval $e < t < f$, na němž jsou naše disperse definovány. Z uvedeného náčrtu (obr. 1) je patrné, že bod $DS\, \dot{Y}(t)$, centrum a bod $Y(\chi(t))$ leží na jedné přímce a že přímka $DS\, Y(t)$ je rovnoběžná s přímkou $\dot{Y}(\chi(t))$.

Naše křivka je hladká a $\chi(t)$ je spojitá funkce; jakmile tedy absolutní hodnota čísla Δt je dostatečně malá, pak úhel mezi přímkami $\dot{Y}(\chi(t + \Delta t))$ a $\dot{Y}(\chi(t))$ je v absolutní hodnotě menší než jistý pevný násobek úhlu mezi průvodiči bodů $Y(\chi(t + \Delta t))$ a $Y(\chi(t))$ (které orientujeme ve směru od centra) a tedy úhel mezi přímkami $\dot{Y}(t + \Delta t)$ a $\dot{Y}(t)$ je v absolutní hodnotě větší než jistý kladný násobek úhlu mezi průvodiči bodů $Y(t + \Delta t)$ a $Y(t)$; tím jsme dokázali, že křivost oblouku $Y(t)$, $e < t < f$ je všude různá od nuly. Pro $\Delta t \to 0$ se tedy průsečík přímek $\dot{Y}(t + \Delta t)$, $\dot{Y}(t)$ blíží k bodu $Y(t)$ a proto spojnice bodů $DS\, \dot{Y}(t + \Delta t)$, $DS\, \dot{Y}(t)$ se blíží přímce $DS\, Y(t)$; tím jsme dokázali, že přímka $DS\, Y(t)$ se dotýká oblouku $DS\, \dot{Y}(\bar{t})$, $e < \bar{t} < f$, v bodě $DS\, \dot{Y}(t)$.

Z náčrtu pak plyne, že tento oblouk je podobný jistému oblouku křivky $Y(t)$, podrobněji $DS\, \dot{Y}(t) = k(r)\, Y(\chi(t))$. Pro $r \to 0$ je $k(r) \to 0$, pro $r \to \infty$ je $k(r) \to \infty$, tedy pro vhodné r je $k(r) = 1$. V dalším vezměme r právě takto. Pak $DS\, \dot{Y}(t) = Y(\chi(t))$

a zřejmě $DS\ Y(t) = \dot{Y}(\chi(t))$, což se obvykle vyjadřuje výstižněji tak, že transformace DS převádí oblouk $Y(t)$, $e < t < f$ na oblouk $Y(\bar{t})$, $\bar{t} = \chi(t)$, $e < t < f$ (analogicky se vyjadřujeme v obdobných případech).

Ponechme zatím stranou ten případ, kdy definiční obory funkcí $\omega(t)$, $\chi(t)$ jsou prázdné (což nastane na příklad pro $Q(t) \leqq 0$). Pak musí být $e = -\infty$. Jinak by totiž pro $t \to e +$ bylo $Y(\chi(t)) = DS\ \dot{Y}(t) \to DS\ \dot{Y}(e)$; pak bod $DS\ \dot{Y}(e)$ by ležel na křivce $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$, existuje $\bar{t}$ takové, že $DS\ \dot{Y}(e) = Y(\bar{t})$ a disperse by byly definovány i pro $t = e$: $\omega(e) = \chi(e) = \bar{t}$, což je proti předpokladu. Podobně $f = \infty$; tedy disperse jsou definovány pro všechna t.

Ještě ukážeme, že $Y(t)$ je jednoduchá uzavřená křivka. Uzavřenost však plyne ze vztahu $Y(t) = (DS)^4\ Y(t) = Y(\chi(\chi(\chi(\chi(t)))))$ a přírůstek φ na oblouku $Y(t)$, $\bar{t} \leqq t \leqq \chi(\chi(\chi(\chi(\bar{t}))))$, je 2π (tento přírůstek je totiž menší než 4π, neboť na každém oblouku tvaru $Y(t)$, $\bar{t} \leqq t \leqq \chi(\bar{t})$, vzroste φ o méně než o π), tedy křivka je jednoduchá.

Celkem vidíme, že $Y(t)$ je jednoduchá uzavřená křivka obsahující uvnitř centrum. Víme, že její křivost nemění znaménko, je tedy konvexní.

Parametrické rovnice všech spojitých konvexních křivek, které transformace DS převádí do sebe, uvádí J. Radon [2]. Po nepatrné změně parametru je

$$\varrho(u) = \frac{E}{\sqrt{\sin \vartheta(u)}} \exp \frac{1}{2} \int_0^u \operatorname{cotg} \vartheta(v)\, \mathrm{d}v\,, \tag{8}$$

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + u - \vartheta(u))\,, \tag{9}$$

kde $\vartheta(u)$, $-\infty < u < \infty$, splňuje podmínky:

$$0 < \vartheta(u) < \pi\,, \tag{10}$$

$$-1 \leqq \frac{\vartheta(u_1) - \vartheta(u_2)}{u_1 - u_2} \leqq 1\,, \tag{11'}$$

$$\vartheta(u) + \vartheta(u + \pi) = \pi\,. \tag{12}$$

$\vartheta(u)$ pak je úhel sevřený průvodičem příslušného bodu a tečnou v něm (orientace je provedena známým způsobem).

Naše křivka $Y(t)$ má ovšem být hladká. Ze vztahu $\mathrm{d}\varrho = \varrho \operatorname{cotg} \vartheta\, \mathrm{d}\varphi$ tedy plyne, že ϑ má $n + 1$ spojitých derivací podle φ. Podle (9) má stejný počet derivací podle φ také parametr u. Křivost křivky není nikde nulová, proto $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\varphi < -1$[2]) a podle (9) je $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi > 1 > 0$, tedy funkce $\varphi(u)$ má $n + 1$ spojitých derivací a stejně tak funkce $\vartheta(u)$. Kromě toho podle (9) je $1 - \vartheta'(u) = 2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}u) < 2$, tedy vzhledem k (12) je $-1 \neq \vartheta'(u) \neq 1$ a vztah (11') lze zesílit takto:

$$-1 < \vartheta'(u) < 1\,. \tag{11}$$

[2]) Jestliže α je úhel sevřený osou y_1 a tečnou v příslušném bodě, pak $\alpha = \vartheta + \varphi$ a nulová křivost je charakterisována vztahem $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\varphi = 0$. Proto na naší křivce je $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(\alpha - \varphi)/\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\varphi - 1 \neq -1$. Nerovnost plyne ze zvolené orientace a z toho, že křivka je konvexní, tedy že $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\varphi < 0$.

Jestliže obráceně funkce $\vartheta(u)$ má $n + 1$ spojitých derivací, má veličina ϑ podle (9), (11) $n + 1$ spojitých derivací podle φ, ϱ je hladkou funkcí φ a příslušná křivka je hladká.

Nyní již lze snadno získat v explicitním tvaru všechny diferenciální rovnice (1), pro které funkce $\chi(t)$, $\omega(t)$ splynou. Stačí vzít všechny uvedené křivky, nechat po nich rovnoměrně probíhat bod $Y(t)$ a přejít k rovnicím známým způsobem vyloženým v úvodu. Jestliže dokonce vybereme z každé třídy ekvivalentních pohybů takto vzniklých po jednom representantu, budou jednojednoznačně odpovídat hledaným rovnicím.

Vezmeme toho representanta $Y(t)$, který vycházeje z bodu $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ pohybuje se v něm rychlostí $\frac{1}{2}$ rovnoběžně s osou y_2 (tedy v čase $t = 0$ má polohu $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ a pro diferenciály souřadnic platí v čase $t = 0$ $\mathrm{d}y_1(t) = 0$, $\mathrm{d}y_2(t) = \mathrm{d}t$). Dosazením do rovnic (7) až (9) vyjde $C = 1$, $E = 1$, $A = 0$ a

(13) $$\vartheta(0) = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Hledaná rovnice je dána vztahy (4), (5), (5'), (7) až (9),

$$\mathrm{d}\varrho = \varrho \operatorname{cotg} \vartheta \, \mathrm{d}\varphi\,, \quad \mathrm{d}^2\varrho = \varrho\left(\operatorname{cotg}^2 \vartheta - \frac{2\vartheta'}{\sin^2 \vartheta \,.\, (1 - \vartheta')}\right)\mathrm{d}\varphi^2\,,$$
$$2\mathrm{d}\varphi + (\vartheta' - 1)\,\mathrm{d}u = 0\,, \quad \mathrm{d}t = \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Značme tečkou derivaci podle t, čárkou derivaci podle φ s jedinou výjimkou u funkce ϑ, kterou v dalším derivujeme jen podle parametru u. Pak je

$$Q(t) = \frac{1}{C}\begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_1(t) & \ddot{y}_2(t) \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^3 \begin{vmatrix} \varrho' \cos\varphi - \varrho \sin\varphi, & \varrho' \sin\varphi + \varrho\cos\varphi \\ \varrho'' \cos\varphi - 2\varrho' \sin\varphi - \varrho\cos\varphi, & \varrho'' \sin\varphi + 2\varrho'\cos\varphi - \varrho\sin\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\varrho^4}\left(1 + 2\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 - \frac{\varrho''}{\varrho}\right) = \frac{1 + \vartheta'}{1 - \vartheta'} \exp\left(-2\int_0^u \operatorname{cotg}\vartheta(v)\,\mathrm{d}v\right)$$

a hledané rovnice mají tvar

(14) $$\ddot{y}(t) + \frac{1 + \vartheta'}{1 - \vartheta'}\exp\left(-2\int_0^u \operatorname{cotg}\vartheta(v)\,\mathrm{d}v\right) y(t) = 0\,,$$

kde $u = u(t)$ je funkce inversní k funkci

(15) $$t = t(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + u - \vartheta(u))} (1 - \vartheta')\exp\int_0^u \operatorname{cotg}\vartheta(v)\,\mathrm{d}v \,\frac{\mathrm{d}u}{\sin\vartheta(u)}\,.$$

Funkce $\vartheta(u)$, $-\infty < u < \infty$, je libovolná funkce s $n + 1$ spojitými derivacemi splňující podmínky (10) až (13). Dvěma různým funkcím $\vartheta(u)$ odpovídají dvě různé rovnice.

Ještě poznamenejme, že pro $\vartheta(u) = \arccos \alpha \sin u$, kde $|\alpha| < 1$, obdržíme $Q(t) = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$, tj. všechny rovnice trigonometrických funkcí. Pro $\vartheta(u) = \arccos \alpha \sin nu$, n liché, $|\alpha| < 1/n$, dostaneme jiné rovnice našeho typu.

V uvedených vzorcích (14), (15) vystupuje nepříjemná proměnná u, kterou není možno rozumným způsobem eliminovat. Zachycuje nám totiž vztah mezi body $Y(t)$, $Y(\chi(t))$; liší se v nich o konstantu π. (Plyne to ze vztahu (9): $u = \frac{1}{2}\pi + 2\varphi + \vartheta$, kde veličina $2\varphi + \vartheta$ transformací DS roste o π.) Parametr t se v těchto bodech liší o velmi složitou funkci $\chi(t) - t$. Předpokládáme-li však, že $Q(t)$ má spojitou derivaci, lze za nezávisle proměnnou vzít přímo u. Vzniklé rovnice nebudou mít ovšem samoadjungovaný tvar (1), neboť bod $Y(t(u))$ se obecně nepohybuje rovnoměrně, pokládáme-li u za čas. Označme čárkou derivaci podle u, tečkou derivaci podle φ. Příslušné rovnice mají tvar:

$$\begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1'(u) & y_2'(u) \end{vmatrix} y''(u) - \begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1''(u) & y_2''(u) \end{vmatrix} y'(u) + \begin{vmatrix} y_1'(u) & y_2'(u) \\ y_1''(u) & y_2''(u) \end{vmatrix} y(u) = 0\,,$$

kde

$$\begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1'(u) & y_2'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho\cos\varphi & \varrho\sin\varphi \\ \dot\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi & \dot\varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} \varphi' = \varrho^2\,\frac{1-\vartheta'}{2}\,,$$

$$\begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1''(u) & y_2''(u) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varrho\cos\varphi & \varrho\sin\varphi \\ (\ddot\varrho\cos\varphi - 2\dot\varrho\sin\varphi - \varrho\cos\varphi)\,\varphi'^2 + & (\ddot\varrho\sin\varphi + 2\dot\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi)\,\varphi'^2 + \\ +\,(\dot\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi)\,\varphi'' & +\,(\dot\varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi)\,\varphi'' \end{vmatrix} =$$

$$= \varrho^2\left(2\frac{\dot\varrho}{\varrho}\,\varphi'^2 + \varphi''\right) = \varrho^2\left(\left(\frac{1-\vartheta'}{2}\right)^2 2\operatorname{cotg} - \frac{\vartheta''}{2}\right),$$

$$\begin{vmatrix} y_1'(u) & y_2'(u) \\ y_1''(u) & y_2''(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi & \dot\varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi \\ \ddot\varrho\cos\varphi - 2\dot\varrho\sin\varphi - \varrho\cos\varphi & \ddot\varrho\sin\varphi + 2\dot\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi \end{vmatrix} \varphi'^3 =$$

$$= \varrho^2\left(1 + 2\left(\frac{\dot\varrho}{\varrho}\right)^2 - \frac{\ddot\varrho}{\varrho}\right)\left(\frac{1-\vartheta'}{2}\right)^3 = \varrho^2(1-\vartheta')\,\frac{(1-\vartheta')^2}{8\sin^2\vartheta}\,,$$

tedy celkem

$$y'' + \left(\frac{\vartheta''}{1-\vartheta'} - (1-\vartheta')\operatorname{cotg}\vartheta\right) y' + \frac{(1+\vartheta')(1-\vartheta')}{4\sin^2\vartheta}\, y = 0\,,$$

kde $\vartheta(u)$, $-\infty < u < \infty$, má aspoň dvě spojité derivace a splňuje známé podmínky (10) až (13). Dostanou se však pouze ty rovnice, u kterých po převedení na samoadjungovaný tvar (1) má funkce $Q(t)$ spojitou derivaci.

Transcendentní funkce je možné eliminovat; položme $\operatorname{cotg}\vartheta = \Phi$. Rovnice pak budou

$$(1+\Phi^2)\,y'' + \left(\frac{2\Phi\Phi' - (1+\Phi^2)\,\Phi''}{1+\Phi^2+\Phi'} - (1+\Phi^2+\Phi')\,\Phi\right) y +$$
$$+ \tfrac{1}{4}(1+\Phi^2-\Phi')\,(1+\Phi^2+\Phi')\,y = 0\,,$$

kde funkce $\Phi(u)$, $-\infty < u < \infty$, má dvě spojité derivace a splňuje podmínky

$$|\Phi'(u)| < 1 + \Phi^2(u)\,, \quad \Phi(u+\pi) + \Phi(u) = \Phi(0) = 0\,.$$

3. Periodičnost funkce $Q(t)$. V předchozím odstavci jsme našli všechny diferenciální rovnice (1), pro které splynou disperse $\omega(t)$, $\chi(t)$. Zejména jsme zjistili, že příslušný rovnoměrně pohybující se bod $Y(t)$ opisuje uzavřenou trajektorii. Jestliže d je doba jednoho jeho oběhu (zřejmě je $d \neq 0$), pak je $Y(t + d) = Y(t)$ a tedy souřadnice bodu $Y(t)$ mají periodu d; stejnou periodu bude mít funkce $Q(t)$. Zabývejme se periodičností funkce $Q(t)$ podrobněji.

Především je lehké zjistit, že funkce $Q(t)$ má periodu g právě tehdy, když příslušné rovnoměrně pohybující se body $Y(t)$, $Y(t + g)$ jsou ekvivalentní. Tato transformace ekvivalence T_g je pak jednoznačně určena. Převádí bod $Y(t)$ do stejně rychle pohybujícího se bodu $Y(t + g)$, transformuje tedy trajektorii bodu $Y(t)$ do sebe a zachovává plošný obsah. Ukazuje se, že poslední dvě vlastnosti jsou pro ni charakteristické.

Nejprve si totiž všimněme, že naše trajektorie je jednoduchá, takže parametr t je na ní určen vzorcem (7) až na substituci $t \to t/c + g$. Jestliže je tedy tato křivka trajektorií rovnoměrně pohybujícího se bodu $Y(t)$, pak každý další na ní rovnoměrně pohybující se bod má tvar $Y(t/c + g)$ a jeho rychlost je c-násobek rychlosti bodu $Y(t)$. Mějme nyní (centroafinní) transformaci, která převádí trajektorii bodu $Y(t)$ do sebe a zachovává plošný obsah. Tato transformace převádí bod $Y(t)$ do stejně rychle pohybujícího se bodu o téže trajektorii, tedy do bodu $Y(t + g)$. Funkce $Q(t)$ má periodu g a transformace má tvar T_g, což právě bylo třeba zjistit.

Periody funkce $Q(t)$ tvoří aditivní grupu G. Jestliže $g_1 \in G$, $g_2 \in G$, pak

$$T_{g_1} T_{g_2} Y(t) = T_{g_1} Y(t + g_2) = Y(t + g_1 + g_2);$$

tedy transformace T_g, $g \in G$, tvoří jistou grupu T a máme epimorfismus $g \to T_g$. Jeho jádro je tvořeno těmi periodami g, pro něž je T_g identita, tj. pro něž $Y(t) = Y(t + g)$. Zjistili jsme již, že obsahuje transformaci T_d a je tedy netriviální. Nechme stranou případ, kdy $Q(t)$ je konstanta. Pak G je nekonečná cyklická grupa a tedy T je konečná cyklická grupa tvořená jistými transformacemi $T_k, T_k^2, \ldots, T_k^n = T_k^0$. Transformace T_k zachovává plošný obsah a převádí do sebe jednoduchou uzavřenou křivku obsahující centrum. Snadno se zjistí, že je buď identita, nebo nemá reálné vlastní vektory. Proto ve vhodném systému souřadnic má tytéž rovnice jako rotace kolem centra. Můžeme předpokládat, že tento souřadnicový systém jsme zvolili již od začátku úvah a zavést v naší rovině euklidovskou metriku tak, že je pravoúhlý. Podle výše uvedených charakteristických vlastností transformací grupy T je pak tato grupa tvořena všemi rotacemi, které převádějí trajektorii bodu $Y(t)$ do sebe.

Tato trajektorie je zachovávána transformací DS, tedy také transformací $(DS)^2 = D^2$, tj. je centrálně symetrická a spolu s bodem $Y(t)$ leží na ní bod $D^2\, Y(t)$. Ten se pohybuje také rovnoměrně a se stejnou rychlostí, a proto bod $Y(t)$ se dostane do polohy $D^2\, Y(t)$ za dobu $\frac{1}{2}d$; nebo jinak: když $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ je spojnice centra s bodem $Y(t)$, tedy $\alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t) = 0$, pak za dobu $\frac{1}{2}d$ se bod $Y(t)$ opět poprvé nachází na této přímce, tedy $\alpha\, y_1(t + \frac{1}{2}d) + \beta\, y_2(t + \frac{1}{2}d) = 0$, což znamená, že kořeny každého netriviálního řešení rovnice (1) mají ekvidistantní vzdálenost $\frac{1}{2}d$. Nalezli jsme tedy další význam čísla d. Navíc jsou body $Y(t)$, $Y(t + \frac{1}{2}d) = D^2\, Y(t)$ zřejmě ekvivalentní a proto funkce $Q(t)$ má periodu $\frac{1}{2}d$. Ukážeme, že jen ve zvláštních případech může mít periodu ještě menší.

Především není $D \in T$. Trajektorie bodu $Y(t)$ by totiž byla invariantní vůči transformaci $D^3DS = S$, byla by kružnicí (stačí si všimnout, jak S transformuje ty body trajektorie, které jsou nejdále, nebo nejblíže centru), grupa T by byla tvořena všemi rotacemi a $Q(t)$ by byla konstantní, což jsme vyloučili. Proto grupa T se skládá z rotací o úhly

$$\frac{\pi}{j},\ 2\frac{\pi}{j},\ \ldots,\ (2j-1)\frac{\pi}{j},\ 0\,,$$

kde j je liché číslo. Funkce $Q(t)$ pak má nejmenší kladnou periodu $d/(2j)$, kde $\frac{1}{2}d$ je, jak víme, vzdálenost mezi sousedními kořeny nějakého netriviálního řešení rovnice (1).

Sestrojme tuto funkci $Q(t)$. Trajektorie příslušného bodu $Y(t)$ bude mít tu charakteristickou vlastnost, že ji grupa T převádí do sebe. Její parametrické rovnice tedy jsou (8), (9), kde $\vartheta(u)$ splňuje navíc podmínku

$$\vartheta\left(\frac{2\pi}{j} + u\right) = \vartheta(u) \quad (j \text{ liché})\,. \tag{16}$$

Skutečně, v těch bodech trajektorie, ve kterých se parametr u liší o celý násobek $2\pi/j$, se $\varphi = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + u - \vartheta)$ liší podle (16) o celý násobek π/j a opět podle (16), úhel mezi průvodičem a tečnou je stejný; tedy křivka $Y(t)$ je invariantní vůči rotacím grupy T. Lehce se vidí, že úvahu lze obrátit. Získali jsme tedy rovnice všech hledaných trajektorií. Na těchto trajektoriích se opět nechá rovnoměrně probíhat bod $Y(t)$. Pro tvoření tříd ekvivalentních pohybů však můžeme použít jen ty transformace, které zachovávají význam rovnice (16). Obecně pro $j = 1$ máme k disposici všechny regulární centroafinní transformace a tento případ jsme již probrali v předchozí kapitole. Při $j > 1$ tvoříme třídy ekvivalentních pohybů pomocí rotací kolem centra a podobností se středem v centru. Můžeme tedy vybrat toho representanta, který vychází z bodu $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Příslušné rovnice (1) jsou pak dány vztahy (14), $t = t(u)/c$, kde $t(u)$ je funkce (15). Podmínku (13) ovšem zastoupí vztah (16). Ještě poznamenejme, že obě rovnice (12), (16) se dají nahradit jedinou

$$\vartheta\left(u + \frac{\pi}{j}\right) + \vartheta(u) = \pi\,.$$

Uvedené výsledky mají aplikaci v Minkowského geometrii. Trajektorie bodu $Y(t)$ totiž indukuje v rovině y_1, y_2 Minkowského metriku se symetrickou relací kolmosti (křivku $Y(t)$ považujeme za jednotkovou kružnici, viz [3]). Centroafinní transformace, které zachovávají tuto trajektorii a tedy i příslušnou metriku a nemají reálné vlastní vektory, nazvěme rotacemi Minkowského roviny (*M. roviny*). Jako již jednou, můžeme opět předpokládat, že jsme zvolili takový systém souřadnic, že jde o běžné rotace kolem centra. Má tedy zřejmě smysl mluvit o *úhlu rotace* M. roviny a z našich výsledků plyne, že v M. rovině se symetrickou relací kolmosti buď existuje rotace jen o úhly $\pi/j, 2\pi/j, \ldots, (2j-1)\pi/j$ pro jisté liché j, nebo že jde o běžnou euklidovskou geometrii. V této větě jde o isometrické transformace poměrně speciální M. roviny; lze ji však snadno upravit na mnohem obecnější tvar: Existuje-li centroafinní transformace M. roviny, která převádí každou přímku do přímky k ní kolmé, pak jde o běžnou euklidovskou geometrii. Tato transformace totiž nemá reálné vlastní vektory (neboť žádná přímka M. roviny není sama k sobě kolmá), tedy ve vhodně zvoleném systému souřadnic bude mít tytéž rovnice jako součin jisté rotace kolem centra s podobností o středu v centru. Podle definice kolmosti v M. rovině může být jedině otočením o úhel $\frac{1}{2}\pi$, nebo $-\frac{1}{2}\pi$ (neboť jednotková kružnice M. roviny je uzavřená křivka); jde tedy skutečně o běžnou euklidovskou geometrii.

Poslední výsledek ještě uvedeme v terminologii teorie dispersí diferenciální rovnice (1). Netriviální integrály této rovnice tvoří přirozeným způsobem projektivní prostor. Ten lze ztotožnit s projektivním prostorem průměrů centroafinní roviny y_1, y_2, tj. se svazkem přímek procházejících centrem. Integrálu $\alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t)$ přitom odpovídá průměr $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$. *Projektivností* mezi integrály rovnice (1) se rozumí (podle [1]) regulární projektivní transformace tohoto prostoru na sebe. Budeme říkat, že dva integrály naší rovnice jsou *sdružené*, jestliže každý z nich má tytéž kořeny, jako derivace druhého. Ukážeme, že pouze v případě rovnice trigonometrických nebo hyperbolických funkcí existuje projektivnost, která každému (netriviálnímu) integrálu přiřazuje sdružený.

Především je vidět, že v centroafinní rovině y_1, y_2 odpovídají sdruženým integrálům takové průměry, že tečny ke křivce $Y(t)$ v průsečících jednoho z nich jsou rovnoběžné s druhým. Pro naši rovnici tedy splynou disperse $\omega(t), \chi(t)$. Jestliže tyto disperse mají neprázdný definiční obor, bude podle výsledků předchozí kapitoly křivka $Y(t)$ konvexní, podle výsledků v této kapitole bude symetrická vzhledem k centru a tedy indukuje v rovině y_1, y_2 jistou M. metriku. Příslušná projektivnost pak vede na takovou centroafinní transformaci M. roviny, že každá přímka je převáděna do přímky k ní kolmé; jde pak o euklidovskou geometrii a o rovnici trigonometrických funkcí. Právě tento případ tedy odpovídá výše uvedené větě o M. rovině. V každém případě však průměry odpovídající sdruženým integrálům tvoří involuci, křivka $Y(t)$ je tedy regulární kuželosečka a naše rovnice jsou buď rovnicemi trigonometrických nebo hyperbolických funkcí.

Poznámka. Úlohy vyšetřované v této práci formuloval asi před pěti lety prof. O. Borůvka ve svém semináři o diferenciálních rovnicích. O její konečnou úpravu a vyjití má značné zásluhy recensent J. Vrkoč.

Literatura

[1] *О. Борувка*: О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка. Чехосл. матем. ж., *3 (78)*, 1953, 199—256.

[2] *J. Radon*: Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven. Ber. Verh. Sächs. Akad., Leipzig *68*, 1916, 123—128.

[3] *H. Busemann, J. Kelly*: Projective Geometry and Projective Metrics. New York 1953.

Резюме

О СОВПАДЕНИИ ОСНОВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЙ 3-ГО И 4-ГО ПОРЯДКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $\ddot{y}(t) + Q(t)\, y(t) = 0$

ЯН ХРАСТИНА (Jan Chrastina), Брно

Исследуются дифференциальные уравнения (1) со следующим свойством: каждому решению $y_1(t)$ соответствует другое $y_2(t)$ так, что корни решения $y_1(t)$ совпадают с корнями первой производной $\dot{y}_2(t)$ и наоборот. Тривиальным примером такого уравнения является случай уравнения тригонометрических функций, но существует целый класс таких уравнений (14), где $\vartheta = \vartheta(u)$, $-\infty < u < \infty$, подчиняется условиям (10)–(13) и $u = u(t)$ – обратная функция к (15). Затем изучаются свойства полученных уравнений.

Summary

ON COINCIDENCE OF BASIC CENTRAL DISPERSIONS OF 3rd AND 4th ORDERS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $\ddot{y}(t) + Q(t)\, y(t) = 0$

JAN CHRASTINA, Brno

We investigate differential equations (1) with the following property: To every solution $y_1(t)$ there corresponds another solution $y_2(t)$ such that the zeros of $y_1(t)$ are identical with the zeros of the first derivative $\dot{y}_2(t)$, and vice versa. A trivial example of such an equation is the equation of trigonometric functions. Nevertheless there exists a large class of such equations (14), where $\vartheta = \vartheta(u)$, $-\infty < u < \infty$, fulfills the conditions (10)–(13) and $u = u(t)$ is the inverse function to (15). Some properties of these equations are established.