Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

# Построение гамильтоновских графов третьей степени

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 87 (1962), No. 2, 148--168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117423

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

# ПОСТРОЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВСКИХ ГРАФОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 18/II 1960 г.)

В работе содержатся результаты исследования гамильтоновских графов третьей степени (гамильтоновским графом мы здесь называем граф, разложимый на линейные множители таким образом, что композиция произвольных двух из них является гамильтоновской линией графа). Работа является продолжением работы [1], в которой впервые обращается внимание на существование таких графов, а также работы [2], где имеются первые результаты относительно них. В настоящей работе прежде всего описан простой метод, дающий возможность путем повторения двух основных конструктивных элементов построить произвольный гамильтоновский граф третьей степени.

Во всей работе под графом разумеется всегда конечный граф. Пусть $G$ — произвольный регулярный граф $n$-ой $(n > 1)$ степени, который можно разложить на $n$ линейных множителей. Будем говорить, что $G$ — *гамильтоновский граф $n$-ой степени,* если существует такое его разложение $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ на линейные множители, что композиция произвольных двух отличных друг от друга линейных множителей этого разложения является гамильтоновской линией графа.[1])

О существовании гамильтоновских графов мы говорили уже в работе [1] (стр. 99—100), где также доказано следующее: *произвольный гамильтоновский граф является регулярно связным графом.* Гамильтоновским графам (четным) уделяется внимание также в работе [2]. В настоящей работе мы займемся исследованием гамильтоновских графов третьей степени и опишем метод, позволяющий при помощи двух основных конструктивных элементов построить все гамильтоновские графы третьей степени, причем исходится из простейшего такого графа, т. е. из графа, содержащего как раз две вершины и три ребра, соединяющие эти вершины.

Примечание 1. Термин гамильтоновский граф для такого графа, в котором композиция произвольных двух линейных множителей хотя бы одного его раз-

[1]) Под гамильтоновской линией графа мы понимаем такую окружность графа, которая содержит все вершины графа.

ложения на линейные множители дает гамильтоновскую линию этого графа, приводится здесь впервые (он не приводится ни в [1] ни в [2]). Термин же гамильтоновская линия для окружности, содержащей все вершины графа, является в литературе о графах общеприятым и употребляемым (см., например, книгу Д. Кенига [3]). Заметим, что не всякая гамильтоновская линия является гамильтоновским графом второй степени; для этого, кроме указанного, необходимо, чтобы она содержала четное число вершин (т. е. чтобы она была разложима на два линейных множителя).

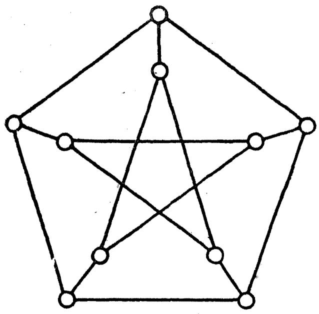

Рис. 1.

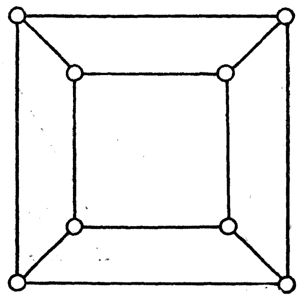

Рис. 2.

Прежде чем приступить к выполнению нашей основной задачи, необходимо сделать несколько пояснительных замечаний и дать *определение* некоторых дальнейших *понятий*. Прежде всего: как известно, не всякий регулярный граф третьей степени, содержащий множитель, можно разложить на три линейных множителя (известным примером служит граф, изображенный на рис. 1). Даже регулярный граф третьей степени, регулярно связный и разложимый на три линейных множителя, не обязательно является гамильтоновским графом (примером такого графа может служить граф, изображенный на рис. 2).

На рис. 3 приводятся примеры простейших гамильтоновских графов третьей степени. Чтобы из изображения графа можно было узнать и соответствующее разложение графа на линейные множители, мы поступаем следующим образом: ребра графа по принадлежности к отдельным линейным множителям изображаем различными линиями: полной, штрихованной и пунктирной.

В гамильтоновском графе третьей степени не всякое его разложение на линейные множители должно обладать тем свойством, что композиция произвольных двух из них является гамильтоновской линией графа. На рис. 4 изображены два разложения одного и того же графа. Первое из них (налево) обладает требуемым свойством, в то время как второе разложение этим свойством не обладает (одна из композиций, а именно, содержащая ребра, изображенные полными и штрихованными линиями, состоит из двух шестиугольников). Чтобы отличить разложение гамильтоновского графа на три линейных множителя, обладающее требуемыми свойствами, от таких разложений, которые этим свойством не обладают, мы будем называть его *гамильтоновским разложением*. (Рис. 4.)

Но в одном и том же гамильтоновском графе может существовать и больше одного гамильтоновского разложения.

В работе [1] мы вывели простой метод построения (путем последовательного расширения графа) графа, изоморфного с произвольным регулярно связным графом данной степени.

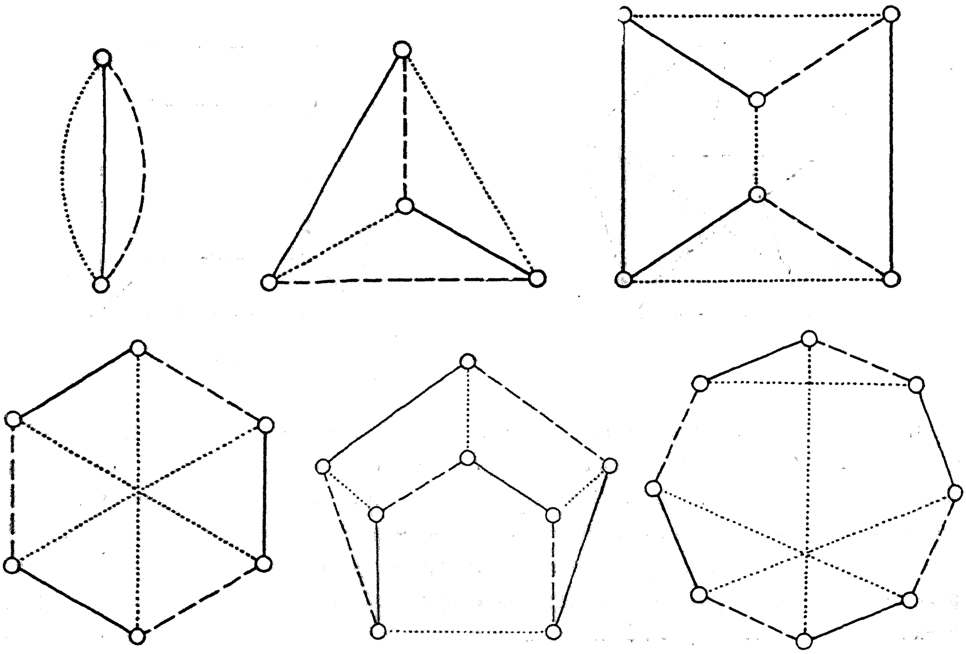

Рис. 3.

Гамильтоновские графы третьей степени (как известно из [1]) образуют специальный класс регулярных и регулярно связных графов третьей степени. Следовательно, если нам известно нз работы [1], как действовать, исходя из графа, изображенного на рис. 5, чтобы построить последовательным расширением графов произвольный регулярный и регулярно связный граф третьей степени, то у нас в руках имеется средство, с помощью которого можно построить произвольный гамильтоновский граф третьей степени. Напомним, о каком виде расширения здесь идет речь. Пусть $G_0$ — произвольный регулярный граф третьей степени, регулярно связный, и пусть $g \neq h$ — произвольных два его ребра. Из графа $G_0$ построим граф $G_1$ следующим образом: ребро $g$ разделим новой вершиной $u$ (т. е. ребро $g$ заменим двумя ребрами $g'$, $g''$, инцидентными с вершиной $u$; см. рис. 6), ребро $h$ разделим новой вершиной $v$ и разделяющие вершины $u$, $v$ соединим новым ребром $f$. Граф тогда будет, очевидно, регулярным графом третьей степени и согласно [1] он будет также регулярно связным.

Описанное расширение графа $G_0$ в граф $G_1$ мы будем называть *$\sigma$-расширением графа $G_0$, произведенным на ребрах $g$, $h$.* Обратный процесс назовем *$\sigma$-редукцией графа на ребре $f$.* Значит, исходя из графа, изображенного на рис. 5,

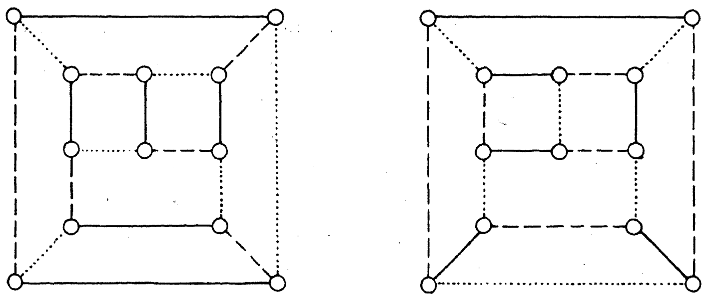

Рис. 4.

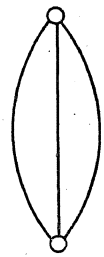

Рис. 5.

путем повторения $\sigma$-расширения можно построить произвольный регулярный и регулярно связный граф третьей степени, и тем самым и произвольный гамильтоновский граф третьей степени.

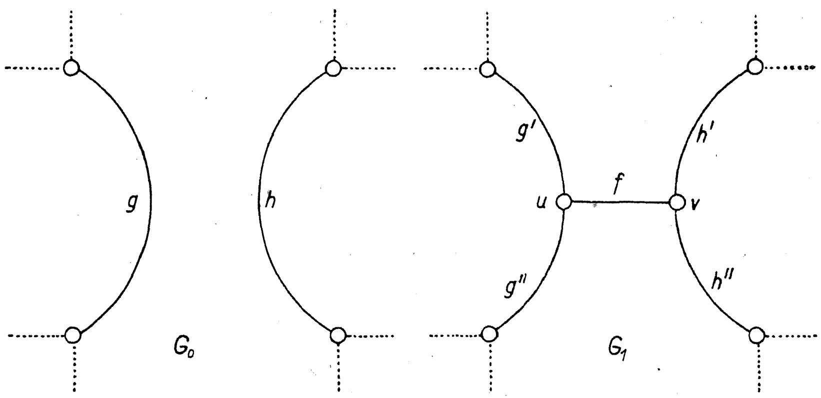


Рис. 6.

Такие действия при построении гамильтоновских графов вообще невыгодны, так как наряду с гамильтоновскими графами мы получим при этом целый ряд не гамильтоновских графов, а критерии, позволяющие установить, можно ли данный регулярный и регулярно связный граф гамильтоновски разложить на три линейных множителя или нет — отнюдь не простые. Уточним поэтому нашу задачу следующим образом: нужно найти такие расширения гамильтоновских графов третьей степени, чтобы 1. расширением гамильтоновского графа получить снова гамильтоновский граф третьей степени; 2. повторным таким расширением графов — если исходить из гамильтоновского графа третьей степени с двумя вершинами — можно было построить всякий гамильтоновский граф третьей степени.

Сделаем теперь необходимые подготовительные шаги для выполнения поставленной таким образом задачи.

Пусть $G$ — произвольный регулярный граф третьей степени, разложимый на три линейных множителя; пусть $\{L_1, L_2, L_3\}$ — произвольное такое разложение. Пусть $h_0 \in L_3$ — ребро, не принадлежащее никакому двухугольнику графа $G$; пусть $u_0, v_0$ — его концевые вершины. Пусть $f_1, f_2$ $(g_1, g_2)$ — дальнейших два ребра, инцидентные с вершиной $u_0$ (с вершиной $v_0$), причем ребра $f_1, g_1$ $f_1$, $g_1$ принадлежат $L_1$, ребра $f_2$, $g_2$ принадлежат $L_2$. Обозначим через $u_1$ $(u_2)$ вторую концевую вершину ребра $f_1$ $(f_2)$ и через $v_1$ $(v_2)$ вторую концевую вершину ребра $g_1$ $(g_2)$. Притом не исключается возможность,что $u_1 = u_2$ $(v_1 = v_2)$. Но во всяком случае имеем $u_1 \neq v_1$, $u_2 \neq v_2$ (так как в противном случае вершина $u_1 = v_1$ $(u_2 = v_2)$ была бы инцидентна с двумя ребрами одного и того же линейного множителя, что невозможно). Образуем из графа $G$ граф $G'$ следующим способом: (1) удалим из графа $G$ вершины $u_0, v_0$ и удалим из $G$ также все ребра, инцидентные с этими вершинами; (2) присоединим новые ребра, а именно, ребро $h_1$, соединяющее вершины $u_1, v_1$ и ребро $h_2$, соединяющее вершины $u_2$, $v_2$. Будем говорить, что граф $G'$ образуется из графа $G$ *расщеплением ребра $h_0$ по разложению* $\{L_1, L_2, L_3\}$, если $G'$ получается из $G$ описанным только что способом.

Очевидно, граф $G'$ тогда тоже будет регулярным графом третьей степени, разложимым на три линейных множителя $L'_1, L'_2, L'_3$. Эти линейные множители мы найдем следующим образом: $L'_1$ и $L'_2$ содержат все ребра соответственно из $L_1$ и $L_2$, принадлежащие $G'$, и, кроме того, соответственно ребра $h_1$ и $h_2$, а $L'_3$ содержит все ребра из $L_3$, принадлежащие $G'$. Об определенном таким образом разложении $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ графа $G'$ мы будем говорить, что оно *аналогично разложению* $\{L_1, L_2, L_3\}$.

Пусть $G$ — произвольный гамильтоновский граф третьей степени, $\{L_1, L_2, L_3\}$ — его гамильтоновское разложение. Пусть $2m$ $(m > 1)$ — число вершин графа $G$. (Известно, что число вершин в произвольном регулярном графе третьей степени всегда четно.) Обозначим отдельные вершины из $G$ через $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ в том порядке, в каком мы их проходим, если — исходя из твердо выбранной вершины — мы продвигаемся по гамильтоновской линии $K = L_1 \times L_2$ таким способом, что первое ребро, по которому мы проходим, принадлежит $L_1$ (для облегчения выкладок мы будем полагать $u_0 = u_{2m}$; $u_{2m+1} = u_1$). Ребро, соединяющее вершины $u_i, u_j$, обозначим через $h_{i,j}$. Очевидно, справедливо следующее: множество $H_1 = \{h_{1,2}, h_{3,4}, \ldots, h_{2m-1,2m}\}$ является множеством ребер линейного множителя $L_1$; $H_2 = \{h_{2,3}, h_{4,5}, \ldots, h_{2m,1}\}$ — множеством ребер линейного множителя $L_2$; $H_3$ пусть будет множеством всех ребер из $L_3$. Обозначим, далее,

$U_1 = \{u_1, u_3 \ldots, u_{2m-1}\}$, $U_0 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{2m}\}$. Определим подмножества $H_3^0$, $H_3^1$, $H_3^2$ множества $H_3$ следующим образом: ребро из $H_3$ принадлежит соответственно $H_3^0$ или $H_3^1$ или $H_3^2$ тогда и только тогда, когда оно соединяет, соответственно, две вершины из $U_0$, или вершину из $U_0$ с вершиной из $U_1$, или когда оно соединяет две вершины из $U_1$.

Ясно, что если $G$ — четный граф, то множества $H_3^0$, $H_3^2$ — пустые, и наоборот: если $H_3^0 = \emptyset = H_3^2$ (т. е. если $H_3^1 = H_3$), то $G$ — четный граф.

**Лемма 1.** *Пусть* G *— гамильтоновский граф третьей степени с* $2m$ $(m > 1)$ *вершинами и пусть* $\{L_1, L_2, L_3\}$ *— его гамильтоновское разложение на линейные множители. Пусть* $h_{i,j}$ $(i < j)$ *— произвольное ребро из* $L_3$ *и пусть* $G'$ *— граф, получающийся из* $G$ *расщеплением ребра* $h_{i,j}$ *по разложению* $\{L_1, L_2, L_3\}$. *Справедливо: разложение* $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ *графа* $G'$, *аналогичное разложению* $\{L_1, L_2, L_3\}$, *будет гамильтоновским разложением тогда и только тогда, когда* $h_{i,j}$ *не принадлежит* $H_3^1$.

Доказательство. То, что $G'$ — регулярный граф третьей степени и что он разложим на три линейных множителя — очевидно.

Предположим, что ребро $h_{i,j}$ не принадлежит $H_3^1$ и докажем, что разложение $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$, аналогичное разложению $\{L_1, L_2, L_3\}$ графа $G$, является гамильтоновским разложением графа $G'$. Элементы композиции $L_1 \times L_2$, принадлежащие $G'$, образуют в графе $G'$ два пути (не имеющие общих элементов), а именно, путь $C_1$, соединяющий вершину $u_{i+1}$ с вершиной $u_{j-1}$, и путь $C_2$, соединяющий вершину $u_{j+1}$ с вершиной $u_{i-1}$. Очевидно, ребра $h_{i-1,i}$, $h_{j-1,j}$ принадлежат одному и тому же линейному множителю (либо $L_1$, либо $L_2$), а также ребра $h_{i,i+1}$, $h_{j,j+1}$ принадлежат одному и тому же линейному множителю (но другому, чем ребра $h_{i-1,i}$, $h_{j-1,j}$) разложения $\{L_1, L_2, L_3\}$. Никакое из указанных ребер не принадлежит $L_3$ и никакое из них не принадлежит также $G'$. Вместо них содержатся в графе $G'$ два ребра. Одно из них соединяет вершину $u_{i-1}$ с вершиной $u_{j-1}$, второе вершину $u_{i+1}$ с вершиной $u_{j+1}$. Оба эти ребра принадлежат композиции $L'_1 \times L'_2$ и вместе с путями $C_1$, $C_2$, содержащими все вершины из $G'$, образуют гамильтоновскую линию графа $G'$. Значит, композиция $L'_1 \times L'_2$ есть гамильтоновская линия графа $G'$.

Проделаем теперь аналогичные рассуждения по отношению к композициям $L_1 \times L_3$, $L_2 \times L_3$. Элементы той из них, из которой при образовании графа $G'$ были удалены ребра $h_{i-1,i}$, $h_{i,j}$ $h_{j-1,j}$ (эти ребра в графе $G'$ замечены единственным ребром $h_{i-1,j-1}$), образуют в графе $G'$ путь, соединяющий вершины $u_{j-1}, u_{j-1}$ (и содержащий все вершины из $G'$). Этот путь вместе с ребром $h_{i-1,j-1}$ образует гамильтоновскую линию графа $G'$. Все элементы этой гамильтоновской линии принадлежат композиции линейного множителя $L'_3$ с тем линейным множителем из $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$, который содержит ребро $h_{i-1,j-1}$. Ребро $h_{i+1,j+1}$ принадлежит, очевидно, другому линейному множителю разложения $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$, чем ребро $h_{i-1,j-1}$. Если проделать аналогичное рассуждение для ребра $h_{i+1,j+1}$, можно убедиться, что обе композиции $L'_1 \times L'_3$, $L'_1 \times L'_3$ являются гамильтоновскими линиями графа $G'$. Итак, для случая $h_{i,j} \in H_3^0 \cup H_3^2$ будет $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ гамильтоновским разложением графа $G'$.

Предположим, что ребро $h_{i,j}$ принадлежит $H_3^1$. Пусть, например, $u_i$ принадлежит $U_0$, $u_j$ — $U_1$. Тогда ребра $h_{i-1,i}$, $h_{j,j+1}$ принадлежат $L_1$ и ребро $h_{i-1,j+1}$ из $G'$ принадлежит $L'_1$. Элементы композиции $L_1 \times L_2$, принадлежащие $G'$, образуют в $G'$ два пути. Один из них соединяет вершины $u_{i-1}$, $u_{j+1}$. Этот путь вместе с ребром $h_{i-1,j+1}$ образует некоторую окружность, являющуюся компонентом композии $L'_1 \times L'_2$ и не содержащую все вершины из $G'$. Поэтому разложение $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ не является гамильтоновским. Аналогично будет доказана справедливость леммы для случая $h_{i,j} \in H_3^1$ и тогда, когда $u_i$ принадлежит $U_1$ и $u_j$ — $U_0$. Доказательство леммы закончено.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — произвольный гамильтоновский граф третьей степени с более чем двумя вершинами. Пусть $h_{i,k}$ $(i < k)$ — произволньое ребро из $H_3$. В множестве $H_3$ существует хотя бы одно такое ребро $h_{j,l}$ (соединяющее вершины $u_j$, $u_l$), что выполняется утверждение: вершина $u_j$ принадлежим множеству $V = \{_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{k-1}\}$, и вершина $u_l$ принадлежит множеству $W = U -$ $- (V \cup \{u_i, u_k\})$.*

Доказательство. Ребро $h_{i,k}$ не принадлежит двухугольнику (в противном случае граф $G$ не был бы регулярно связным). Оба множества $V$, $W$, очевидно, не пусты (в противном сулчае в графе существовал бы двухугольник). Удалим из $G$ ребра $h_{i,i+1}$, $h_{k-1,k}$. Получится граф, который будет связным (дело в том, что в регулярно связном графе третьей степени не может существовать сечение мощности меньше чем 3 — см. [1]). Подграф этого графа, содержащий все элементы из $L_1 \times L_3$, принадлежащие этому графу, не является связным. Следовательно, существует ребро $h_{j,l}$, принадлежащее, очевидно, $H_3$, соединяющее вершину $u_j$ из $V$ с некоторой вершиной $u_l$ из $W$. Это и доказывает лемму.

Примечание 2. Гамильтоновский граф третьей степени с $2m$ вершинами можно при данном гамильтоновском разложении $\{L_1, L_2, L_3\}$ изобразить на плоскости, например, следующим образом: вершины изобразим как $2m$ точек на окружности, которые разделяют эту окружность на $2m$ дут. Отдельные дуги поставим в соответствие отдельным ребрам композиции $L_1 \times L_2$. Ребра из $H_3$ изобразим как отрезки (хорды), соединяющие те точки, которые соответствуют их концевым вершинам. Лемма 2 утверждает, что при таком изображении графа $G$ существуют всегда хотя бы две пересекающие друг друга хорды. Если двигаться по окружности, то точки, соответствующие вершинам из $U_0$, чередуются с точками, соответствующими вершинам из $U_1$. Для четного гамильтоновского графа третьей степени $G$ имеет лемма 2 такое следствие: в $G$ существуют два таких ребра $h_{i,k}$, $h_{j,l}$ из $H_3^1$, что $i < j < k < l$. Подходящим выбором вершины, которую обозначим через $u_1$, при удовлетворении условия, чтобы ребро $h_{1,2}$ принадлежало $L_1$, можно, очевидно, добиться для такой пары ребер всегда того, чтобы выполнялось: $u_i = u_1$ принадлежит $U_1$; $u_j$ принадлежит $U_1$ и вершины $u_k$, $u_l$ принадлежат $U_0$. Это обстоятельство будет нами использовано для упрощения формулировки следующей леммы и для сокращения ее доказательства.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ — четный гамильтоновский граф третьей степени с больше, чем двумя вершинами, пусть $\{L_1, L_2, L_3\}$ — его гамильтоновское разложение. Пусть $h_{1,j}$, $h_{i,k}$ — такие два ребра из $H_3^1 = H_3$, что $1 < i < j < k$; вершины $u_1$, $u_i$ принадлежат $U_1$ и вершины $u_j$, $u_k$ принадлежат $U_0$. Пусть граф $G'$ получается из графа $G$ расщеплением ребра $h_{1,j}$ по разложению $\{L_1, L_2, L_3\}$, и пусть его разложение $\{L_1', L_2', L_3'\}$ аналогично разложению $\{L_1, L_2, L_3\}$. Обозначим через $G''$ граф, получающийся из графа $G'$ расщеплением ребра $h_{i,k}$ по разложению $\{L_1', L_2', L_3'\}$. Справедливо следующее: $G''$ является четным гамильтоновским графом третьей степени.*

Доказательство. Очевидно, $G''$ — регулярный граф третьей степени. Граф $G''$ можно также разложить на три линейных множителя. Таким разложением является, например, разложение $\{L_1'', L_2'', L_3''\}$, аналогичное разложению $\{L_1', L_2', L_3'\}$. Следовательно, нужно доказать уже только две вещи: что I. $G''$ — гамильтоновский граф и что II. $G''$ — четный граф. Проведем соответствующие доказательства.

I. Докажем, что разложение $\{L_1'', L_2'', L_3''\}$ является гамильтоновским разложением графа $G''$. Вершины $u_1, u_i, u_j, u_k$ разделяют гамильтоновскую линию $L_1 \times L_2$ графа $G$ на четыре являющиеся продолжением друг друга пути, по которым — если продвигаться по этой гамильтоновской линии таким образом, что исходим из $u_1$ и через $u_i$, $u_j$ придем в $u_k$ и потом снова в $u_1$ — мы проходим в таком порядке: $C_{1,i}$, $C_{i,j}$, $C_{j,k}$, $C_{k,1}$ ($C_{x,y}$ — та часть из $L_1 \times L_2$, которая соединяет вершину $u_x$ с вершиной $u_y$). Ясно, что пути $C_{1,i}$, $C_{j,k}$ имеют нечетное число (значит, хотя бы одну) внутренних вершин (так как $2 < i$; $j + 1 < k$); однако, пути $C_{i,j}$, $C_{k,1}$ могут не содержать никакой внутренней вершины.

Мы знаем, что ребра $h_{1,2}$, $h_{j-1,j}$ принадлежат $L_1$ и ребра $h_{2m,1}$, $h_{j,j+1}$ — $L_2$. После расщепления ребра $h_{1,j}$ по разложению $\{L_1, L_2, L_3\}$ должно поэтому существовать в графе $G'$ ребро, соединяющее вершины $u_2$, $u_{j-1}$, а также ребро, соединяющее вершины $u_{2m}$, $u_{j+1}$, первое из которых принадлежит $L_1'$, а второе $L_2'$ (дело в том, что ребра $h_{1,2}$, $h_{j-1,j}$ после исчезновения вершин $u_1$, $u_j$ сольются в единственное ребро $h_{2,j-1}$, а ребра $h_{2m,1}$, $h_{j,j+1}$ в единственное ребро $h_{j+1,2m}$).

Если, кроме того, ребро $h_{i,k}$ расщепить по разложению $\{L_1', L_2', L_3'\}$ (чтобы таким образом получился граф $G''$), то у нас совпадет первое ребро пути $C_{i,j}$ с последним ребром пути $C_{j,k}$ (оба эти ребра принаделжат $L_1'$; см. рис. 7), и получится таким образом ребро $h_{i+1,\ k+1}$, принадлежащее $L_1''$. Кроме того, совпадет последнее ребро пути $C_{1,i}$ с первым ребром пути $C_{k,1}$ (эти ребра принадлежат $L_2'$) и получится таким образом ребро $h_{i-1,k+1}$, принадлежащее $L_2''$.

Будем двигаться по ребрам композиции $L_1 \times L_2$ и по ребрам $h_{1,j}$, $h_{i,k} \in L_3$ следующим способом (см. рис. 7): выйдем из вершины $u_i$ и пройдем по пути $C_{1,i}$. Из вершины $u_1$ по ребру $h_{1,j}$ перейдем в $u_j$ и по пути $C_{i,j}$ перейдем в $u_i$. Оттуда по ребру $h_{i,k}$ в вершину $u_k$. Продолжаем по пути $C_{j,k}$ до вершины $u_j$ и по ребру $h_{1,j}$ перейдем в вершину $u_1$. Из вершины $u_1$ по пути $C_{k,1}$ перейдем в вершину $u_k$ и из нее по ребру $h_{i,k}$ вернемся в вершину $u_i$, из которой мы вна-

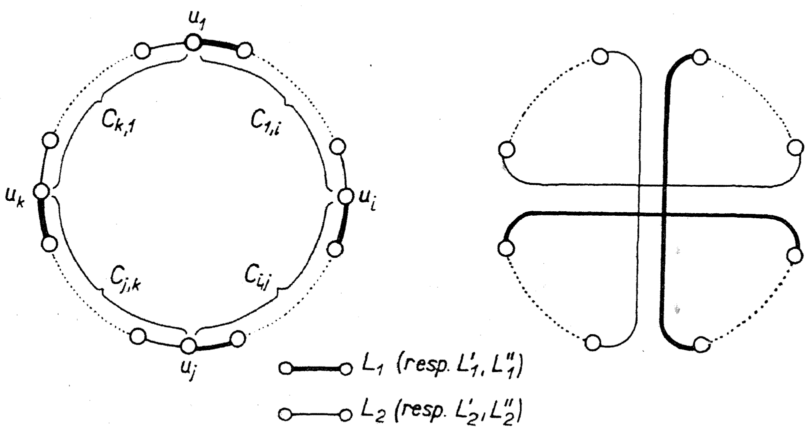


Рис. 7.

чале вышли. Заметим, что при таком прохождении мы по каждому из ребер композиции $L_1 \times L_2$ пройдем точно один раз и по ребрам $h_{1,j}$ $h_{i,k}$ точно два раза. При расщеплении ребра $h_{1,j}$ тройка ребер $h_{1,2}$, $h_{1,j}$, $h_{j-1,j}$ (образующая некоторый отрезок при указанном прохождении) заменена единственным ребром из $L_1'$; а тройка ребер $h_{2m,1}$, $h_{1,j}$, $h_{j,j+1}$ – единственным ребром из $L_2'$. Аналогично: при расщеплении ребра $h_{i,k}$ две тройки ребер (образующие при нашем прохождении два отрезка – средним ребром притом в обоих случаях является ребро $h_{i,k}$) будут заменены двумя ребрами из композиции $L_1'' \times L_2''$.

Итак, если в последовательности ребер, описывающей наше путешествие в графе $G$, сделать изменения, вытекающие из изменений графа при расщеплении ребер $h_{1,j}$, $h_{i,k}$, то получим, собственно говоря, окружность графа $G''$, содержащую все ребра из $L_1''$, а также все ребра из $L_2''$. Из этого вытекает, что композиция $L_1'' \times L_2''$ имеет единственный компонент, значит, $L_1'' \times L_2''$ является гамильтоновской линией графа $G''$.

Проследим теперь, какой вид имеет композиция $L_1'' \times L_2''$. Учтем, что вместо тройки являющихся продолжением друг друга ребер из композиции $L_1 \times L_3$, в композиции $L_1' \times L_3'$ содержится единственное ребро $h_{2,j-1}$ и остальные элементы остаются неизменными, и учтем дальше, что композиция $L_1'' \times L_2''$ отличается от $L_1' \times L_3'$ только тем, что тройка ребер $h_{i+1,i}$, $h_{i,k}$ $h_{k,k-1}$ заменена единственным ребром $h_{i+1,k-1}$. Так как $L_1 \times L_3$ согласно предположению – гамильтоновская линия графа $G$, то $L_1'' \times L_3''$ является гамильтоновской линией графа $G''$. Аналогично докажется, что $L_2'' \times L_3''$ — гамильтоновская линия графа $G''$. Значит, $\{L_1'', L_2'', L_3''\}$ — гамильтоновское разложение графа $G''$.

II. Докажем, наконец, что $G''$ — четный граф. Определим множества $U_0''$, $U_1''$ следующим образом: $U_0'' = U_0 - \{u_j, u_k\}$; $U_1'' = U_1 - \{u_1, u_2\}$. Произвольное ребро из $G$, принадлежащее $G''$, соединяет, очевидно, некоторую вершину из $U_0''$ с некоторой вершиной из $U_1''$. Новыми ребрами в $G''$ (не содержащимися в графе $G$) могут быть только следующие: $h_{2,j-1}$, $h_{2m,j+1}$, $h_{i-1,k+1}$, $h_{i+1,k-1}$. Так как $i$ согласно предположению — нечетное число, а $j$, $k$ — четные числа, необходимо выполняется: произвольное ребро из $G''$ соединяет некоторую вершину из $U_0''$ с некоторой вершиной из $U_1''$; другими словами: $G''$ — четный граф. Доказательство леммы закончено.

Примечание 3. Из леммы 3 и из ее доказательства вытекает следующее: Если в гамильтоновском графе третьей степени $G$ существуют такие ребра $h_{1,j}$, $h_{i,k}$ из $H_3^1$, что $1 < i < j < k$, и что граф $G'$ возникнет расщеплением ребра $h_{1,j}$ по разложению $\{L_1, L_2, L_2\}$, а граф $G''$ возникнет из графа $G'$ расщеплением ребра $h_{i,k}$ по разложению $\{L_1', L_2', L_3'\}$, то $G''$ является гамильтоновским графом третьей степени даже в том случае, когда $G$ не является четным графом.

Определенными изменениями гамильтоновского графа третьей степени, описанными в лемме 1 и в лемме 3, мы получим всегда гамильтоновский граф третьей степени, а именно, граф, содержащий меньшее число вершин, чем первоначальный граф. В обоих случаях имеем дело с редукцией гамильтоновского графа к более простому гамильтоновскому графу. Чтобы различить эти две редукции, введем новые обозначения: Пусть $G$ — гамильтоновский граф третьей степени с $2m$ $(m > 1)$ вершинами и пусть $\{L_1, L_2, L_3\}$ — его гамильтоновское разложение. Если граф $G'$ получится из графа $G$ расщеплением некоторого ребра $h$ из $H_3^0 \cup H_3^2$ по разложению $\{L_1, L_2, L_3\}$, то будем говорить, что $G'$ получается из графа $G$ $\varrho$-редукцией. Если $G$ — четный гамильтоновский граф третьей степени, и граф $G''$ получится из графа $G$ расщеплением ребер, удовлетворящих условиям, высказанным в лемме 3, причем способом там описанным, то будем говорить, что $G''$ получается из $G$ $\pi$-редукцией.

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** *Произвольный гамильтоновский граф третьей степени $G$ с более чем двумя вершинами можно $\varrho$-редукциями и $\pi$-редукциями постепенно свести к графу, состоящему из двух вершин и из трех ребер, соединяющих эти вершины. В четном графе* G *всегда можно осуществить $\pi$-редукцию и только $\pi$-редукцию. В нечетном графе всегда можно осуществить хотя бы одну $\varrho$-редукцию.*

Доказательство. Теорема является следствием леммы 1—3.

Из теоремы 1 ясно также следующее: с помощью обратного по отношению к $\varrho$-редукции и к $\pi$-редукции процесса можно построить гамильтоновские графы третьей степени, содержащие большее число вершин, чем первоначальный гамильтоновский граф. Это имеет немаловажное значение для построения гамильтоновских графов. Обратим на это в дальнейшем наше внимание.

Пусть $G$ – произвольный гамильтоновский граф третьей степени с $2m$ вершинами, пусть $\{L_1, L_2, L_3\}$ – его гамильтоновское разложение. Пусть $f$ – произвольное ребро из $L_1$, $g$ – произвольное ребро из $L_2$. Если из композиции $L_1 \times L_2$ удалить ребра $f$, $g$, то она распадется на два пути $C_a$, $C_b$ графа $G$, при-

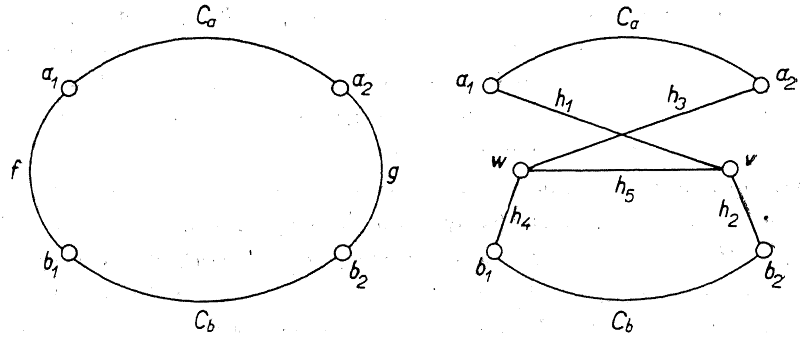


Рис. 8.

чем каждый из этих путей соединяет в графе $G$ концевую вершину ребра $f$ с концевой вершиной ребра $g$ (конечно, может произойти случай, что такой „путь“ будет содержать единственную вершину и не будет содержать никакого ребра, т. е. что концевая вершина ребра $f$ совпадет с концевой вершиной ребра $g$). Обозначим через $a_1$ $(b_1)$ концевую вершину пути $C_a$ $(C_b)$, инцидентную с ребром $f$, а через $a_2$ $(b_2)$ концевую вершину пути $C_a$ $(C_b)$, инцидентную с ребром $g$. Построим из графа $G$ граф $G^*$ следующим образом (см. рис. 8): (1) удалим из $G$ ребра $f$, $g$; (2) присоединим новые ребра $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, $h_5$ и новые вершины $v$, $w$ следующим образом: $h_1$ соединяет вершины $a_1$, $v$; ребро $h_2$ – вершины $v$, $b_2$; ребро $h_3$ – вершины $a_2$, $w$; ребро $h_4$ – вершины $b_1$, $w$, и ребро $h_5$ соединяет вершины $v$, $w$. Образуем множества $H_1^*$, $H_2^*$, $H_3^*$ следующим образом: множество $H_1^*$ $(H_2^*)$ содержит все ребра из $L_1$ $(L_2)$, принадлежащие $G^*$ и, кроме того, ребра $h_1$, $h_4$ (кроме того, ребра $h_2$, $h_3$); множество $H_3^*$ содержит все ребра из $L_3$ и ребро $h_5$.

Очевидно, справедлива следующая

**Лемма 4.** *Множества $H_1^*$, $H_2^*$, $H_3^*$ являются множествами ребер линейных множителей некоторого гамильтоновского разложения $\{L_1^*, L_2^*, L_3^*\}$ графа $G^*$. Граф $G^*$ является гамильтоновским графом третьей степени с $2m + 2$ вершинами и граф $G$ получится из графа $G^*$ расщеплением ребра $h_5$ по разложению $\{L_1^*, L_2^*, L_3^*\}$, т. е. $G$ получается из $G^*$ некоторой $\varrho$-редукцией.*

Доказательство очевидно.

Договор: Если некоторый гамильтоновский граф третьей степени $G_1$ получится из гамильтоновского графа $G_2$ $\varrho$-редукцией, то будем говорить, что $G_2$ получается из $G_1$ $\varrho$-расширением.

**Лемма 5.** *Хотя бы одно $\varrho$-расширение можно произвести в любом гамильтоновском графе третьей степени.*

Доказательство. Лемма вытекает из леммы 4.

**Лемма 6.** *Произвольный гамильтоновский граф третьей степени с $2m+2$ вершинами ($m > 0$), не четный, можно построить путем $\varrho$-расширения некоторого гамильтоновского графа третьей степени с $2m$ вершинами.*

Доказательство. Лемма является следствием леммы 1 и леммы 4.

**Лемма 7.** *$\varrho$-расширением произвольного гамильтоновского графа третьей степени получится гамильтоновский граф третьей степени, не четный.*

Доказательство. Предположим, что четный гамильтоновский граф третьей степени $G$ получается некоторым $\varrho$-расширением гамильтоновского графа третьей степени $G'$. Но тогда граф $G'$ получается $\varrho$-редукцией графа $G$. А это невозможно, так как в графе $G$ множества $H_3^0, H_3^2$ – пустые. Это и доказывает лемму.

Пусть $G$ – произвольный гамильтоновский граф третьей степени с $2m$ вершинами ($m > 0$); $\{L_1, L_2, L_3\}$ – произвольное его гамильтоновское разложенне. Изобразим композицию $L_1 \times L_2$ следующим образом: построим в плоскости окружность $K$ и разделим ее $2m$ точками на $2m$ дуг. Начиная с некоторой точки (которую мы поставим в соответствие некоторой вершине из $G$) и двигаясь в определенно выбранном направлении обхода, обозначим эти отдельные точки через $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ таким образом, что ребро из $L_1 \times L_2$, соединяющее вершины $u_1, u_2$ принадлежит $L_1$. (Отдельные дуги окружности соответствуют отдельным ребрам из $L_1 \times L_2$). Выберем теперь на окружности $K$ четыре новых (отличных друг от друга) точки $v_1, v_2, v_3, v_4$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) если при выбранном направлении обхода по окружности $K$ выйти из вершины $v_1$, то через рассматриваемые точки проходим в порядке $v_1, v_2, v_3, v_4$;

(2) Точка $v_1$, а также точка $v_2$ лежат на дуге, соответствующей ребру из $L_1$; точка $v_3$, а также точка $v_4$ – на дуге, соответствующей ребру из $L_2$ (притом точки $v_1, v_2$ ($v_3, v_4$) лежат не обязательно на разных дугах).

Точками $v_1, v_2, v_3, v_4$ окружность $K$ разделена на четыре дуги. Обозначим их через $O_{1,2}, O_{2,3}, O_{3,4}, O_{4,1}$; дуга $O_{x,y}$ начинается в точке $v_x$ и кончается в точке $v_y$, если двигаться в рассматриваемом направлении. Обозначим через $f_{x,y}$ ($g_{x,y}$) начало (конец) дуги $O_{x,y}$ (см.рис. 9). Повернем теперь каждую из этих четырех дуг (относительно ее оси симметрии) так, чтобы мы в первоначальном направлении обхода по окружности $K$ проходили через внутренние точки всех дуг в обратном порядке (см. рис. 9).

После этого изменения дополним рисунок следующими отрезками (хордами): отрезком, соединяющим вершины $v_1, v_3$; отрезком, соединяющим вершины $v_2, v_4$, а дальше точку $u_i$ соединим отрезком с точкой $u_j$ тогда и только тогда, когда вершина $u_i$ в графе $G$ соединена ребром из $H_3$ с вершиной $u_j$. Если отдельные наши точки рассматривать как вершины, а дуги и отрезки — как ребра, то тем самым, очевидно, задан некоторый гамильтоновский граф третьей

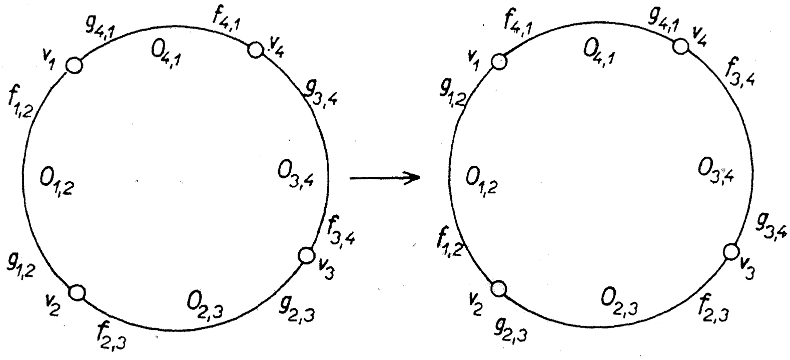


Рис. 9.

степени $G^*$ (из которого $\pi$-редукцией мы получили бы первоначальный граф $G$). Соответствующее гамильтоновское разложение $\{L_1^*, L_2^*, L_3^*\}$ графа $G^*$ найдем следующим образом: в $L_3^*$ включим все ребра из $G^*$, соответствующие отдельным отрезкам, соединяющим точки окружности $K$, в $L_1^*$ $(L_2^*)$ включим ребра графа $G^*$, соответствующие отдельным дугам (после измельчения новыми разделяющими точками $v_1, v_2, v_3, v_4$), а именно таким образом, что ребра поочередно включаем то в $L_1^*$, то в $L_2^*$.

Договор: Изменения, которые мы проделали с графом $G$, чтобы получить граф $G^*$, назовем *$\pi$-расширением графа $G$*. Значит, $\pi$-расширение является обратным по отношению к $\pi$-редукции процессом.

Непосредственно из определения $\pi$-расширения и из леммы 1 вытекает:

**Лемма 8.** *Хотя бы одно $\pi$-расширение можно произвести в произвольном гамильтоновском графе третьей степени; произвольным $\pi$-расширением четного гамильтоновского графа третьей степени (и только $\pi$-расширением графа, который является четным) получим всегда четный гамильтоновский граф третьей степени. Если исходить из графа, состоящего из двух вершин и трех ребер, соединяющих эти вершины, то повторным $\pi$-расширением можно построить граф, изоморфный с произвольным данным четным гамильтоновским графом третьей степени.*

Доказательство очевидно (лемма является следствием леммы 2 и леммы 3.)

Примечание 4. Из леммы 8 сразу же вытекает следующее: для числа $p$ вершин произвольного четного гамильтоновского графа третьей степени всегда справедливо: $p \equiv 2 \pmod 4$. Это соотношение (другим способом) было выведено и в работе [2]. Однако лемма 8 говорит намного больше; она говорит, что при произвольном $p \equiv 2 \pmod 4$ можно построить четный гамильтоновский граф третьей степени с $p$ вершинами; кроме того, она указывает, каким образом найти произвольный такой граф.

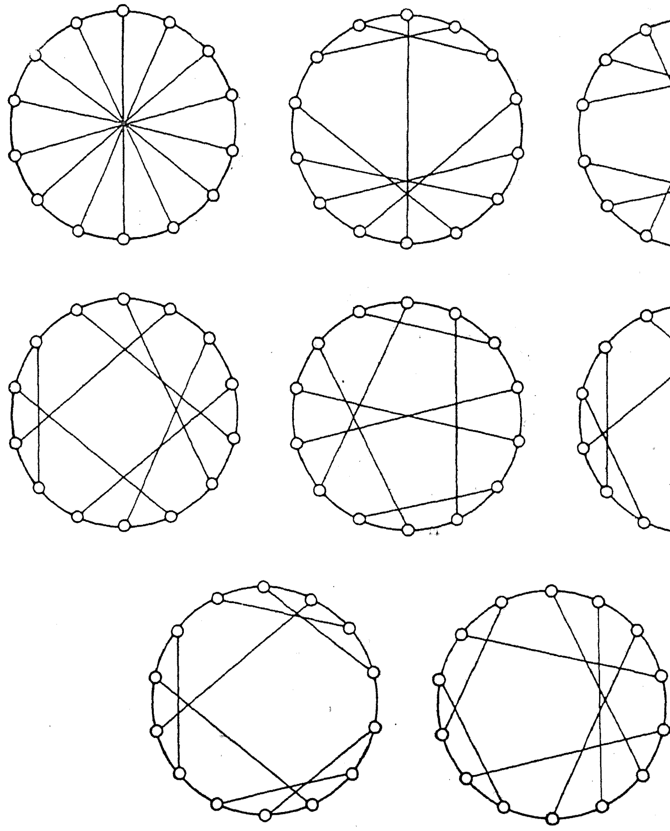

Рис. 10.

**Теорема 2.** *Исходя из графа, состоящего из двух вершин и из трех ребер соединяющих эти вершины, можно путем повторных $\varrho$-расширений и $\pi$-расширений построить граф, изоморфный с произвольным гамильтоновским графом третьей степени.*

Доказательство. Пусть $G_0$ — произвольный гамильтоновский граф третьей степени. Если $G_0$ — четный граф, то не нужно ничего доказывать (см. лемму 8). Предположим, что $G_0$ — нечетный граф. Образуем последователность $G_0$, $G_1, \ldots$ гамильтоновских графов третьей степени таким образом, что граф $G_{i+1}$ получается из графа $G_i$ $\varrho$-редукцией. Если граф $G_i$ — нечетный граф, то в нем можно всегда осуществить $\varrho$-редукцию (см. лемму 1). Процесс закончится тогда, когда некоторый граф $G_k$ $(k \geqq 1)$ станет четным. Граф $G_k$ либо состоит из двух вершин и трех ребер, либо может быть из такого графа построен, возможно, даже повторными $\pi$-расширениями (лемма 8). Обратным путем (повторными $\varrho$-расширениями) мы получим из графа $G_k$ граф $G_0$. Это и доказывает теорему.

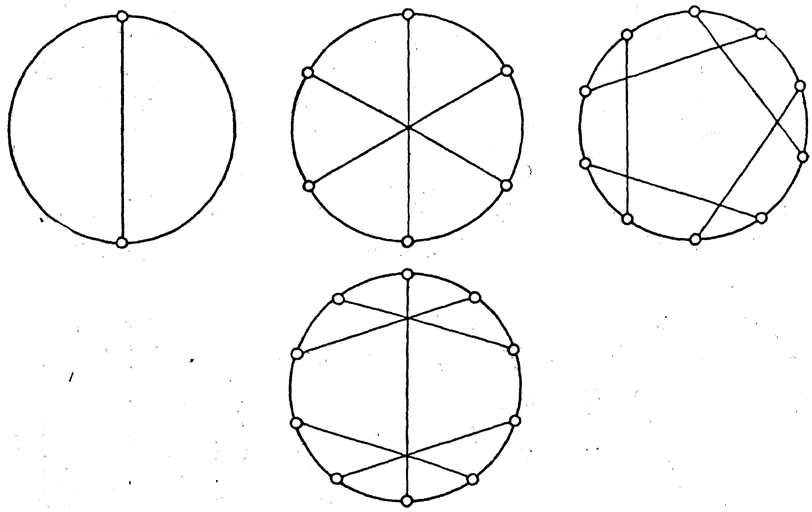

Рис. 11.

На рис. 10 изображены примеры четных гамильтоновских графов с 14-тью вершинами (хорды соответствуют ребрам из $L_3$, дуги поочередно принадлежат то $L_1$, то $L_2$). Для графов, изображенных на рис. 11, справедливо: произвольный четный гамильтоновский граф третьей степени, имеющий меньше чем 14 вершин, изоморфен с одним и только с одним из изображенных здесь графов.

Выводом теоремы 2 мы решили поставленную перед нами задачу. Оказалось, что при построении произвольного гамильтоновского графа третьей степени нам достаточно двух основных конструктивных элементов ($\varrho$-расширения и $\pi$-расширения), обладающих следующим выгодным свойством: в произвольном гамильтоновском графе третьей степени можно произвести и $\varrho$-расширение и $\pi$-расширение, а $\varrho$-расширением ($\pi$-расширением) произвольного гамильтоновского графа третьей степени получается всегда гамильтоновский граф третьей степени. В графе, который так получится, можно притом очень легко найти гамильтоновское разложение.

Однако, при изучении гамильтоновских графов третьей степени возникают некоторые задачи, решение которых могло бы нашу проблематику в значительной мере упростить. Такой является, например, следующая задача: установить, существует ли гамильтоновский граф третьей степени с более чем двумя вершинами, обладающий следующим свойством: $\sigma$-редукция на каждом из его ребер приводит к графу, не являющемуся гамильтоновским. Целый ряд открытых до сих пор вопросов появляется при устанавливании числа различных гамильтоновских разложений данного гамильтоновского графа третьей степени и при исследовании отношений между различными гамильтоновскими разложениями одного и того же графа (два разложения отличны друг от друга тогда и только тогда, когда существуют два таких ребра, которые принадлежат разным линейным множителям некоторого разложения и принадлежат одному и тому же линейному множителю другого разложения).

Интерес к таким задачам не понизится, если при их изучении ограничиться плоскими графами.[2]) Но одно важное упрощение сразу же появляется при таком ограничении. Дело в том, что можно доказать справедливость следующей теоремы:

**Теорема 3.** *Единственным плоским четным гамильтоновским графом третьей степени является граф, состоящий из двух вершин и из трех ребер, соединяющих эти вершины.*

Прежде чем провести доказательство приведенной теоремы, сделаем необходимые подготовительные шаги.

Пусть $L_1 \times L_2 = K$ — произвольная гамильтоновская линия регулярного графа третьей степени $G$. Ребра, не принадлежащие $K$, образуют множество ребер некоторого линейного множителя $L_3$ графа $G$. [3])

Изобразим граф $G$ способом, использованным при изображении гамильтоновского графа в примечании 2, т. е. таким образом, что гамильтоновская линия будет снова изображена как окружность, разделенная $2m$ точками (= вершинами) на $2m$ дуг (= ребер), и ребра из $L_3$ будут изображены как отрезки, соединяющие соответствующие точки окружности. Оставим также обозначение $U_0 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{2m}\}$, $U_1 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{2m-1}\}$, от которого требуем, чтобы ребро $h_{1,2}$ принадлежало $L_1$.

Гамильтоновскую линию $K$ назовем *важной гамильтоновской линией* тогда и только тогда, когда множество $H_3$ ребер линейного множителя $L_3$ можно разложить на два класса $T_1$, $T_2$ так, чтобы выполнялось: никаких два отрезка, изображающих ребра из одного и того же класса при описанном изображении не пересекаются. Справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — регулярный граф третьей степени, содержащий хотя бы одну гамильтоновскую линию $K$. Граф $G$ будет плоским графом тогда и только тогда, когда $K$ — важная гамильтоновская линия.*

---

[2]) Граф $G$ будет плоским тогда и только тогда, когда его вершины можно реализировать в плоскости как точки и ребра как дуги, соединяющие соответствующие точки таким образом, что никакие две дуги не имеют — за исключением концевых точек (представляющих вершины) — никакой общей точки.

[3]) Заметим, что теперь не требуется, чтобы композиции $L_1 \times L_3$; $L_2 \times L_3$ были гамильтоновскими линиями графа $G$.

Доказательство. I. Пусть $G$ — плоский граф, реализированный в некоторой плоскости $P$. Гамильтоновская линия $K$ разделяет плоскость $P$ на две связных плоских области $P_1, P_2$. Произвольное ребро из $G$, не принадлежащее $K$ (а, значит, принадлежащее $H_3$) либо все принадлежит области $P_1$, либо все принадлежит области $P_2$. Обозначим через $T_1$ $(T_2)$ множество тех ребер из $H_3$, которые лежат в $P_1$ $(P_2)$. Если $K$ изобразить как окружность, разделенную $2m$ точками на $2m$ дуг и ребра из $H_3$ как отрезки, соединяющие соответствующие пары вершин, то отрезки, изображающие два ребра из одного и того же класса $T_x$ $(x = 1{,}2)$ не могут, очевидно, пересекаться. Значит, если $G$ — плоский граф, то разложение $\{T_1, T_2)$ с требуемыми свойствами существует.

II. Предположим, что множество ребер $H_3$ можно разложить на классы $T_1$, $T_2$ так, чтобы при данном изображении два отрезка, изображающих ребра из одного и того же класса $T_x$, не пересекались. Граф $G$ реализуем на сферической поверхности следующим образом: экватор, разделенный $2m$ точками (= вершинами) на $2m$ дуг (= ребер) будет изображать гамильтоновскую линию $K$. Ребро из $T_1$ (из $T_2$) начертим как дугу на северном (южном) полушарии таким образом, чтобы ее ортогональная проекция на плоскость экватора была отрезком, соединяющим соответствующие две точки. Граф $G$, реализованный таким способом на сферической поверхности, имеет следующее свойство: никакие две дуги, изображающие два ребра из $G$, не имеют — кроме вершин — никаких общих точек. Известно, что если можно таким способом реализировать граф на сферической поверхности, то его можно указанным способом реализировать также на плоскости. Значит, если существует разложение $\{T_1, T_2\}$ с требуемыми свойствами, то $G$ — плоский граф. Это и доказывает теорему.

Докажем еще справедливость следующей леммы:

**Лемма 9.** *Пусть $G_0$ — произвольный гамильтоновский граф третьей степени с более чем шестью вершинами; пусть $\{L_1^0, L_2^0, L_3^0\}$ — некоторое его гамильтоновское разложение и пусть $h_{1,j}$, $h_{i,k}$ — таких два ребра из $H_3^1$, что $1 < i < j < k$. Пусть $G_1$ — граф, получающийся из графа $G_0$ $\pi$-редукцией, а именно, расщеплением ребер $h_{1,j}$, $h_{i,k}$ по разложению $\{L_1^0, L_2^0, L_3^0\}$, и пусть $\{L_1^1, L_2^1, L_3^1\}$ — соответствующие гамильтоновское разложение графа $G_1$. Имеет место утверждение: Если гамильтоновская линия $L_1^0 \times L_2^0$ — важная, то важной будет также гамильтоновская линия $L_1^1\, L \times \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Предположим, что $L_1^0 \times L_2^0 = K^0$ — важная гамильтоновская линия, т. е. что множество $H_3$ ребер линейного множителя $L_3^0$ можно разбить на классы $T_1$, $T_2$ так, чтобы никаких два отрезка, изображающих в изображении графа два ребра, принадлежащих одному и тому же классу, не пересекались. Ребра $h_{1,j}$, $h_{i,k}$ принадлежат разным классам разложения $\{T_1, T_2\}$ (так как отрезки, изображающие эти ребра, пересекаются). Не ограничивая общности можно предполагать, что $h_{1,j}$ принадлежит $T_1$, $h_{i,k}$ принадлежит $T_2$. Вершины $u_1$, $u_i$, $u_j$, $u_k$ разделяют гамильтоновскую линию $K^0$ на четыре пути $C_{1,i}$, $C_{i,j}$,

$C_{j,k}$, $C_{k,1}$ (путь $C_{x,y}$ — тот участок гамильтоновской линии, который соединяет вершину $u_x$ с вершиной $u_y$).

Построим регулярный граф третьей степени $G_2$, который пусть имеет те же вершины, что и граф $G_0$, следующим образом: окружность $K^2$ разделим сначала точками (вершинами) $u_1$, $u_i$, $u_j$, $u_k$, расположенными так же, как и на окружности $K^0$, на четыре дуги $O_{1,i}$, $O_{i,j}$, $O_{j,k}$, $O_{k,1}$. Каждую из этих дуг $O_{x,y}$ разделим еще внутренними вершинами пути $C_{x,y}$ (если такие вершины существуют) на столько частичных дуг, сколько ребер имеет путь $C_{x,y}$. Притом внутренние вершины этого пути упорядочим в дуге $O_{x,y}$ (т. е. между точками $u_x$, $u_y$) в обратном порядке по отношению к порядку, в котором мы через них проходили при прохождении из вершины $u_x$ в вершину $u$ по пути $C_{x,y}$.

Окружность $K^2$, разделенную таким образом $2m$ точками на $2m$ дуг, дополним отрезками, соединяющими указанные делящие точки (чтобы получился граф $G_2$) следующим образом: вершины $u_a$, $u_b$ соединены в $G_2$ отрезком тогда и только тогда, когда в $L_3^0$ существует ребро, концевые вершины которого — $u_a$, $u_b$. Очевидно, $G_2$ — регулярный граф третьей степени и $K^2$ — его гамильтоновская линия.

Докажем, что $K^2$ — важная гамильтоновская линия. Ребра из $G_2$, не принадлежащие $K^2$, образуют множество ребер некоторого линейного множителя $L_3^2$, который является также линейным множителем графа $G_0$. Утверждаю: никаких два отрезка, изображающие два таких произвольных ребра, принадлежащие одному и тому же классу разбиения $\{T_1, T_2\}$, не будут пересекаться также в изображении графа $G_2$. Проведем доказательство этого утверждения.

Ради упрощения выкладок обозначим через $A$, $B$, $C$, $D$ множество внутренних вершин, соответственно, путей $C_{1,i}$, $C_{i,j}$, $C_{j,k}$, $C_{k,1}$.

Очевидно, имеет место следующее: 1. Если оба конца некоторого отрезка принадлежат одному и тому же множеству системы $S = \{A, B, C, D\}$, то произвольный другой отрезок пересекает этот отрезок в изображении графа $G_2$ тогда и только тогда, когда он его пересекает в изображении графа $G_0$.

2. Ни в изображении графа $G_0$, ни в изображении графа $G_2$ не содержится отрезка, пересекающего отрезок, изображающий ребро $h_{1,}$‘, и отрезок, изображающий ребро $h_{i,k}$ (дело в том, что в противном случае ребро, изображенное таким отрезком, не могло бы принадлежать ни $T_1$ ни $T_2$ — а это противоречит предположению, что $\{T_1, T_2\}$ — разложение множества ребер линейного множителя $L_3^0$).

3. Если некоторый отрезок, изображающий ребро $f$, пересекает в изображении графа $G_0$ (и то же самое относится и к изображению графа $G_2$) отрезок, изображающий ребро $h_{1,j}$, то $f$ либо соединяет вершину из $A$ с вершиной из $D$, либо соединяет вершину из $B$ с вершиной из $C$. Аналогично: если некоторый отрезок, изображающий ребро $g$, пересекает в изображении графа $G_0$ (или также $G_2$) отрезок, изображающий ребро $h_{i,k}$, то $g$ соединяет либо вершину из $A$ с вершиной из $B$, либо вершину из $C$ с вершиной из $D$ (см. 2).

Чтобы закончить доказательство нашего утверждения, достаточно, учитывая сказанное, доказать следующее: отрезок, изображающий ребро $f$ (ребро $g$) не пересекает в изображении графа $G_2$ никакой отрезок, изображающий ребро из $T_2$ (из $T_1$), ибо тогда уже $\{T_1, T_2\}$ является, очевидно, подходящим разложением и для графа $G_2$ (ведь, очевидно, $f \in T_2$, $g \in T_1$).

По свойствам симметрии можно, не ограничивая общности, предполагать, что $f$ соединяет вершину $b_0 \in B$ с вершиной $c_0 \in C$, и достаточно тогда доказать

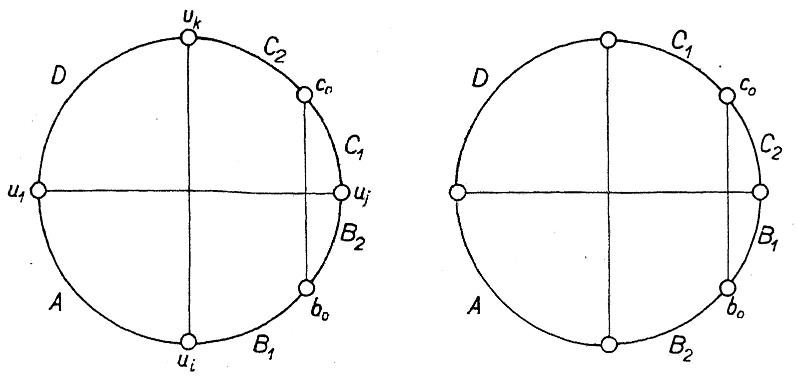


Рис. 12.

справедливость нашего утверждения для этого случая. Дело в том, что таким же способом доказывается утверждение относительно ребра $g$. Пусть $B_1$ $(B_2)$ – множество тех вершин из $B$, которые в гамильтоновской линии $K^0$ лежат между вершиной $u_i$ и вершиной $b_0$ (между вершиной $b_0$ и вершиной $u_j$) и пусть $C_1$ $(C_2)$ – множество тех вершин из $C$, которые в $K^0$ лежат между вершинами $u_j$, $c_0$ (между вершинами $c_0$, $u_k$). На рис. 12 схематически показано расположение рассматриваемых множеств вершин в гамильтоновской линии $K^0$ и $K^2$, и там же отрезками изображены ребра $f$, $h_{1,j}$, $h_{i,}k$.

Учтем (см. рис. 12), что произвольный отрезок $e$ (отличный от $h_{1,j}$), пересекающий в изображении графа $G_2$ отрезок, соединяющий вершины $b^0$, $c_0$, обязан соединять некоторую вершину из $B_1 \cup C_2$ с некоторой вершиной из $A \cup B_2 \cup$ $\cup\ C_1 \cup D$. Отрезок $e$ не может соединять, согласно предыдущему (см. 2), вершину из $A$ с вершиной из $C_2$, и не может также соединять вершину из $B_1$ с вершиной из $D$. Так как $e$ не может одновременно пересекать $f$ и $h_{i,j}$ (в противном случае $e$ не могло бы принадлежать ни $T_1$ ни $T_2$), то $e$ не может соединять вершину из $B_1$ с вершиной из $C_1$ и не может также соединять вершину из $B_2$ с вершиной из $C_2$. Остается рассмотреть уже только следующих четыре случая: $e$ соединяет

α) вершину из $A$ с вершиной из $B_1$, β) вершину из $B_1$ с вершиной из $B_2$,
γ) вершину из $C_1$ с вершиной из $C_2$, δ) вершину из $C_2$ с вершиной из $D$.

В случае α), δ) отрезок $e$ пересекает отрезок, соединяющий $u_i$, $u_k$ (изображающий ребро $h_{i,k} \in T_2$), поэтому ребро, изображаемое отрезком $e$, принадлежит $T_1$. В случае β), γ) отрезок $e$ пересекает отрезок, соединяющий $b_0$, $c_0$ (изображающий ребро $f \in T_2$) и в изображении графа $G_0$. Поэтому ребро, изображенное отрезком $e$, принадлежит всегда $T_1$. Из этого вытекает: отрезок, который пересекает в графическом изображении графа $G_2$ отрезок, изображающий произвольное ребро $f \in T_2$; $f \neq h_{i,k}$ изображает всегда ребро, принадлежащее $T_1$. Итак, справедливо утверждение: разложение $\{T_1, T_2\}$ является подходящим разложением и для графа $G_2$, и $K^2$ является важной гамильтоновской линией.

Теперь уже быстро закончим доказательство леммы. Согласно теореме 4, $G_2$ — плоский граф. Если из графа удалить ребра $h_{1,j}$, $h_{i,k}$, далее, вершины $u_1$, $u_i$, $u_j$, $u_k$, и если пары ребер из $K^2$, инцидентные с удаленными вершинами, заменить всегда единственным ребром, получим граф $G_1$. Описанными изменениями (так как здесь удаляются ребра) нельзя, очевидно, нарушить свойство графа быть плоским и граф $G_1$ поэтому будет плоским графом. Из этого по лемме 4 вытекает, что гамильтоновская линия $L_1^1 \times L_2^1 = K^1$ графа $G_1$ есть важная гамильтоновская линия. Это доказывает лемму.

Проведем теперь доказательство высказанной уже теоремы 3:

Доказательство теоремы 3. Предположим вопреки утверждению теоремы, что существует четный плоский гамильтоновский граф третьей степени с более чем двумя вершинами. Пусть $G_0$ — тот из этих графов, который имеет наименьшее число вершин. Пусть число вершин графа $G_0$ равно $4m + 2$ (см. [2]). Так как по предположению $m > 0$, то некоторой $\pi$-редукцией можно граф $G_0$ свести к четному гамильтоновскому графу $G_1$. Если бы было $m > 1$, то согласно лемме 9 $G_1$ также был бы плоским четным гамильтоновским графом и имел бы на четыре вершины меньше чем $G_0$ (противоречие, так как $G_0$ имеет наименьшее число вершин из тех графов, которые обладают требуемыми свойствами). Поэтому $m = 1$ и $G_0$ имеет как раз шесть вершин. Но произвольный четный регулярный граф третьей степени с шестью вершинами без двухугольников изоморфен с графом с шестью вершинами, изображенным на рис. 10, а последний, хотя и является гамильтоновским, все же — как известно (см. Кениг [3]) — не является плоским. Предположение о существовании четного гамильтоновского графа третьей степени с более чем двумя вершинами приводит к противоречию. Это доказывает теорему.

*Литература*


[1] *A. Kotzig*: Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956.

[2] *A. Kotzig*: Poznámka k rozkladom konečných pravidelných párnych grafov na lineárne faktory. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 348—354.

[3] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

# Výtah

## KONŠTRUKCIA HAMILTONOVSKÝCH GRAFOV TRETIEHO STUPŇA

ANTON KOTZIG, Bratislava

Práca obsahuje výsledky štúdia hamiltonovských grafov tretieho stupňa (hamiltonovským grafom nazýva sa tu graf, ktorý sa dá rozložiť na lineárne faktory tak, že kompozícia ľubovoľných dvoch z nich je hamiltonovskou čiarou grafu). Odvodzuje sa najmä jednoduchá metóda umožňujúca pomocou dvoch základných konštrukčných prvkov zostrojiť ľubovoľný hamiltonovský graf tretieho stupňa a ukazuje sa, že stačí pritom výjsť z najjednoduchšieho hamiltonovského grafu tretieho stupňa, ktorým je graf pozostávajúci z dvoch uzlov a z troch hrán tieto uzly spájajúcich. Niekoľko poznámok venuje autor aj rovinným hamiltonovským grafom tretieho stupňa. Dokazuje napr., že neexistuje taký párny hamiltonovský graf tretieho stupňa s viac než dvoma uzlami, ktorý by bol rovinným grafom.

# Zusammenfassung

## DIE KONSTRUKTION DER HAMILTONSCHEN GRAPHEN DRITTEN GRADES

ANTON KOTZIG, Bratislava

Die Arbeit enthält die Ergebnisse der Untersuchung der Hamiltonschen Graphen dritten Grades (unter der Bezeichnung „Hamiltonscher Graph" versteht man einen Graphen, der in lineare Faktoren auf solche Weise zerlegt werden kann, dass die Komposition beliebiger zwei von diesen eine Hamiltonsche Linie des Graphen ist). Vor allem wird eine einfache Methode abgeleitet, die mit Hilfe von zwei Konstruktionsgrundelementen einen beliebigen Hamiltonschen Graphen dritten Grades konstruieren gestattet und es wird gezeigt, dass es genügt, von einem einfachsten Hamiltonschen Graphen dritten Grades – dieser besteht aus zwei Knotenpunkten und aus drei diese Knotenpunkte verbindenden Kanten – auszugehen. Einige Bemerkungen widmet der Verfasser auch den ebenen Hamiltonschen Graphen dritten Grades. Es wird z. B. bewiesen, dass es einen paaren Hamiltonschen Graphen dritten Grades mit mehr als zwei Knotenpunkten, der ein ebener Graph wäre, nicht geben kann.