Časopis pro pěstování matematiky

Tibor Šalát

О множествах расстояний линейных дисконтинуумов. I.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 4--16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117409`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

О МНОЖЕСТВАХ РАССТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКОНТИНУУМОВ, I

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

(Поступило в редакцию 28/VI 1960 г.)

Настоящая работа посвящена изучению множеств расстояний некоторых типов линейных множеств.

Введение. Если M является множеством метрического пространства (X, ϱ), тогда под множеством расстояний $D(M)$ множества M понимаем множество всех чисел $\varrho(x, y)$, где $x, y \in M$. Значит, если M есть какое-то множество вещественных чисел, то $D(M)$ обозначает множество всех чисел $|x - y|$, где $x, y \in M$.

Подробному изучению взаимной связи свойств множества M евклидова пространства со свойствами множества $D(M)$ посвящена монография [1]. Зависимость свойств $D(M)$ от свойств множества M (как подмножества метрического пространства) изучается в работе [2].

Если M есть подмножество евклидова пространства, тогда говорим, что M имеет свойство S_n $(n > 1)$, если существует $\eta > 0$ такое, что ко всякому множеству B этого пространства, которое имеет не более чем n точек и для которого $\mathrm{d}(B) \leqq \eta$, $\mathrm{d}(B)$ означает диаметр B, существует $M' \subset M$ такое, что M' получится смещением множества B.

Очевидно, что линейное множество $D(M)$ содержит какой-нибудь интервал с левым концом 0 тогда и только тогда, когда M имеет свойство S_2.

Подробному изучению свойства S_n $(n > 1)$ и аналогично определенным свойствам множеств евклидова пространства посвящена работа [3], которая содержит современные основные результаты этой проблематики.

Каждое множество положительной меры Лебега в k-мерном евклидовом пространстве имеет свойство S_n для каждого $n > 1$ (смотри [3], [9]).

Дисконтинуум Кантора C имеет свойство S_2, но не имеет свойства S_3 (смотри [7]).

Э. Марчевский поставил вопрос (Coll. Math. P. 125, 1955) о существовании совершенного линейного множества меры нуль, которое имеет свойство S_n для какого-то $n > 2$. П. Эрдес и С. Какутани ответили на этот вопрос положительно, даже показали, что множество всех тех вещественных x, которые можно изобразить в виде

$$x = \sum_{k=3}^{\infty} a_k/k!\,, \quad 0 \leqq a_k \leqq k - 2 \quad (k = 3, 4, 5, \ldots)$$

является совершенным множетсвом меры нуль, которое имеет свойство S_n для каждого $n > 1$ (смотри [5]).

Сегодня даже известно, что существует линейное множество нулевой хаусдорфовой размерности, которое имеет следующее свойство (T): Существует $\eta > 0$ такое, что ко всякому счетному множеству E, $d(E) \leqq \eta$ существует $E' \subset M$, E' конгруэнтно с E (т. е. E' получаем смещением множества E. Смотри [3]).

Множества расстояний дисконтинуумов W. Пусть $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходящийся ряд с положительными членами и суммой A. Обозначим символом W множество всех тех x, которые можно выразить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k\,, \quad \varepsilon_k = 1 \text{ или } -1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,; \tag{1}$$

W есть совершенное подмножество интервала $\langle -A, A\rangle$ (смотри [6]). Если $a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то разложение (1) числа x является однозначным, далее W является в таком случае дисконтинуумом, его мера Лебега $|W|$ дана соотношением $|W| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, R_n$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы: (Улучшением результата теоремы 1 автор обязан Я. Курцвейлу.)

Теорема 1. (a) *Пусть* $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$, $0 < a_k \leqq 2R_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Пусть* W — *множество всех тех* x, *которые имеют вид* $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$, $\varepsilon_k = 1$ *или* -1 $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Тогда* $D(W) = \langle 0, 2A\rangle$.

(b) *Если кроме выше приведенных предположений имеют еще место:*

$$a_k > R_k \, (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{и} \quad |W| = 0\,,$$

тогда почти все $x \in \langle 0, 2A\rangle$ *имеют следующее свойство: для числа* x *существует бесконечно много взаимно различных пар* $x', x'' \in W$ *таких, что* $|x' - x''| = x$.

Для доказательства теоремы используем следующие две вспомогательные леммы:

Лемма 1. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — *сходящийся ряд с положительными членами и суммой* A. *Пусть для каждого* $k = 1, 2, 3, \ldots, a_k \leqq 2R_k$. *Тогда каждое* $x \in \langle -A, A\rangle$ *можно выразить в виде* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n$, *где* $\eta_n = 0$, 1 *или же* -1.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует число $x \in \in \langle -A, A\rangle$ которое нельзя выразить в приведенном виде. Очевидно, можно уже предположить, что $x \in (0, A)$. Имеем две возможности: 1. $a_1 < x$. 2. $a_1 > x$. Случай $a_1 = x$ невозможен.

1. Существует $l_1 \geqq 1$ такое, что $a_1 + \ldots + a_{l_1} < x$, но $a_1 + \ldots + a_{l_1} + a_{l_1+1} > x$.

2. Опять имеем две возможности: a) Существует $l_1 \geqq 1$ такое, что $a_1 - a_2 - - \ldots - a_{l_1} > x$, но $a_1 - a_2 - \ldots - a_{l_1} - a_{l_1+1} < x$. b) Такое l_1 не существует, т. е. $a_1 - a_2 - \ldots - a_n - \ldots > x$ (учтем, что не может быть $x = a_1 - a_2 - a_3 - - \ldots - a_n - \ldots$). Тогда не может быть $0 \,.\, a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots < x$, ибо из этого следовало бы $2R_1 < a_1$, что противоречит предположению леммы. Поэтому существует в этом случае такое $l_1 \geqq 1$, что

$$0 \,.\, a_1 + a_2 + \ldots + a_{l_1} < x, \quad \text{но} \quad 0 \,.\, a_1 + a_2 + \ldots + a_{l_1} + a_{l_1+1} > x$$

(если бы $l_1 = 1$, то коэффициент при a_{l_1} приравниваем 0).

Итак, во всех случаях приходим к одной из следующих возможностей:

α) Существует $l_1 \geqq 1$ такое, что

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} < x\,, \quad \text{но} \quad \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + a_{l_1+1} > x$$

(такое положение в случаях 1, 2b).

β) Для подходящего $l_1 \geqq 1$ имеет место

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} > x\,, \quad \text{но} \quad \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} - a_{l_1+1} < x\,,$$

числа η_i принимают значения 0, 1 или -1, и в обоих случаях

$$|\sigma_{l_1} - x| < a_{l_1+1}\,, \quad \text{где} \quad \sigma_{l_1} = \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1}\,.$$

В доказательстве поступаем сейчас следующим образом: α) 1. Существует $l_2 \geqq l_1 + 1$ такое, что

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - \ldots - a_{l_2} > x\,,$$

но

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - \ldots - a_{l_2} - a_{l_2+1} < x\,.$$

2. Такое l_2 не существует, т. е.

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - a_{l_1+3} - \ldots > x\,.$$

Тогда не может быть одновременно

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \,.\, a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + a_{l_1+3} + \ldots < x\,,$$

так как из этого следовало бы $2R_{l_1+1} < a_{l_1+1}$ (это противоречит предположению). В таком случае используем фактор 0, и тогда существует l_2 такое, что

$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \,.\, a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \ldots + a_{l_2} < x\,,$$
$$\eta_1 a_1 + \ldots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \,.\, a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \ldots + a_{l_2} + a_{l_2+1} > x\,,$$

т. е.

$$|\sigma_{l_2} - x| < a_{l_2+1}\,,$$

где

$$\sigma_{l_2} = \eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \, . \, a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \dots + a_{l_2} \, .$$

β) 1. Существует $l_2 \geqq l_1 + 1$ такое, что

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} - a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \dots + a_{l_2} < x \, ,$$

но

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} - a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \dots + a_{l_2} + a_{l_2+1} > x \, .$$

2. Такое l_2 не существует, т. е.

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} - a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \dots < x \, ,$$

тогда не может быть одновременно

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \, . \, a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - a_{l_1+3} - \dots > x \, ,$$

так как из этого следовало бы $2R_{l_1+1} < a_{l_1+1}$ (противоречие с предположением). В таком случае существует l_2 такое, что

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \, . \, a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - \dots - a_{l_2} > x \, ,$$

но

$$\eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_1} a_{l_1} + 0 \, . \, a_{l_1+1} - a_{l_1+2} - \dots - a_{l_2} - a_{l_2+1} < x \, .$$

Применяя индукцию, построим изложенным способом последовательность $\{\sigma_{l_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\sigma_{l_n} = \eta_1 a_1 + \dots + \eta_{l_n} a_{l_n}$ со свойством $\sigma_{l_n} \to x$, итак, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n$, где $\eta_n = 0, 1$ или -1, что же однако противоречит предположению, сделанному в начале доказательства. Этим доказательство леммы закончено.

Примечание. Значит, каждое число $x \in \langle -A, A \rangle$ можно выразить в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n \, , \quad \text{где } \eta_n = 0, 1 \text{ или } -1 \, . \tag{2}$$

Вполне возможно, что число x можно развернуть в несколько рядов приведенного типа (однозначность не гарантирована). Ради простоты будем множители η_n (равные 0, 1 или -1) называть цифрами числа x в соответствующем ряде (2).

Лемма 2. *Пусть для ряда* $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ *с положительными членами имеет место* $R_k < a_k \leqq 2R_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$. *Пусть* W *имеет тот же смысл, что и раньше, и пусть* $|W| = 0$. *Обозначим символом* M *множество всех тех* $x \in \langle -A, A \rangle$, *которые имеют следующее свойство: число* x *можно развернуть хоть в один ряд* (2), *содержащий конечное число цифр* 0. *Тогда* M *есть нулевое множество.*

Доказательство. Обозначим символом $M(k)$, где $k \geqq 0$ — целое число, множество всех тех $x \in \langle -A, A \rangle$, которые имеют следующие свойство: для x существует хотя бы один ряд (2) такой, что в последовательности $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречается 0 именно k раз. Очевидно, $M(0) = W$. Так как $M \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} M(k)$ и $|W| =$

$= |M(0)| = 0$, то достаточно показать, что для каждого натурального k $|M(k)| = 0$.

Обозначим символом $M(k; i_1, i_2, \dots i_k)$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ множество всех тех x, которые можно выразить в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n$, где $\eta_n \neq 0$ для $n \neq i_1, i_2, \dots i_k$, и $\eta_{i_l} = 0$ $(l = 1, 2, \dots k)$ и всегда $\eta_n = 0, 1, -1$. Для того, чтобы показать, что $|M(k)| = 0$, достаточно, очевидно, доказать, что $|M(k; i_1, \dots i_k)| = 0$ для каждой определенно выбранной последовательности натуральных чисел $i_1, i_2, \dots, i_k$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Итак, пусть $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ есть определенно выбранная последовательность натуральных чисел, и пусть $\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_{i_k}^0$ есть определенно выбранная последовательность чисел 0, 1 или -1, причем $\eta_{i_l}^0 = 0$ $(l = 1, 2, \dots, k)$, и пусть $M\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & i_k \\ \eta_1^0, & \eta_2^0, \dots & \eta_{i_k}^0 \end{pmatrix}$ обозначает множество всех тех x, которые можно выразить в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n$, где $\eta_n = \eta_n^0$ для $n \leqq i_k$ и $\eta_n = 1$ или -1 для $n > i_k$. Очевидно,

$$M(k; i_1, i_2, \dots i_k) \subset \bigcup M\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots . & i_k \\ \eta_1^0, & \eta_2^0, \dots & \eta_{i_k}^0 \end{pmatrix}.$$

Суммирование проводится относительно всех последовательностей $\eta_1^0, \eta_2^0, \dots$ $\dots \eta_{i_k}^0$ чисел 0, 1 или -1 таких, что $\eta_{i_l}^0 = 0$ $(l = 1, 2, \dots k)$. Учтем, что для определенной последовательности $\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_{i_k}^0$ приведенного типа есть мера множества $M\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & i_k \\ \eta_1^0, & \eta_2^0, \dots, & \eta_{i_k}^0 \end{pmatrix}$ равна мере множества всех тех x, которые имеют вид

$$x = \sum_{n=i_k+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \quad (n = i_k + 1, i_k + 2, \dots)$$

и поэтому (смотри [8])

$$\left| M\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & i_k \\ \eta_1^0, & \eta_2^0, \dots, & \eta_{i_k}^0 \end{pmatrix} \right| = \lim_{m\to\infty} 2^{m+1} \,.\, R'_m, \quad R'_m = \sum_{n=i_k+m+1}^{\infty} a_n = R_{i_k+m}$$

(R_s означает остаток после s-того члена ряда $\sum_1^{\infty} a_n$). Поэтому согласно предположению теоремы имеет место

$$\left| M\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & i_k \\ \eta_1^0, & \eta_2^0, \dots, & \eta_{i_k}^0 \end{pmatrix} \right| = 2^{-i_k} \lim_{m\to\infty} 2^{i_k+m+1} R_{i_k+m} = 2^{-i_k}|W| = 0\,.$$

Из этого получаем $|M(k; i_1, \dots, i_k)| = 0$, и отсюда уже следует утверждение леммы. Приступим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. (a) Пусть $x \in \langle 0, 2A \rangle$, тогда $x/2 \in \langle 0, A \rangle$. Согласно лемме 1 можно $x/2$ выразить в виде

$$x/2 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n\,, \quad \text{где} \quad \eta_n = 0,\ 1 \quad \text{или} \quad -1\,,$$

отсюда получаем $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2\eta_n a_n$. Построим сейчас числа

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n\,, \quad x'' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon''_n a_n\,, \quad x', x'' \in W,$$

такие, чтобы для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имело место $\varepsilon''_n - \varepsilon'_n = 2\eta_n$. Это, очевидно, возможно, и таким образом часть (a) теоремы I доказана. (b) Согласно лемме 2 существует множество $M_1 \subset \langle 0, A\rangle$ такое, что $|M_1| = A$ и каждое $y \in M_1$ можно представить в виде $y = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n$, $\eta_n = 0$, 1 или -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, причем $\eta_n = 0$ для бесконечно многих n. Построим функцию $x = 2y$, которая отображает интервал $\langle 0, A\rangle$ на интервал $\langle 0, 2A\rangle$. Это отображение отображает множество M_1 на M_2, причем $|M_2| = 2A$. Пусть сейчас $x \in M_2$. Тогда $y = x/2 \in$ $\in M_1$, следовательно,

$$x/2 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n\,, \quad \eta_n = 0,\ 1 \text{ или } -1\,,$$

и для бесконечно многих n, $\eta_n = 0$. Из этого получаем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2\eta_n a_n\,.$$

Построим сейчас числа x', $x'' \in W$,

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n\,, \quad x'' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon''_n a_n\,,$$

(подобным образом, как в доказательстве части (a) настоящей теоремы) такие, чтобы для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ было $\varepsilon''_n - \varepsilon'_n = 2\eta_n$. Это, очевидно, возможно и тогда $|x' - x''| = x$. Достаточно только заметить, что каждый нуль в $\{2\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ дает возможность построить две разные пары чисел x', $x'' \in W$ такие, что $|x' - x''| = x$. Если, например, $\eta_l = 0$, то одну пару получим выбором $\varepsilon'_l = 1$, $\varepsilon''_l = 1$ и другую выбором $\varepsilon'_l = -1$, $\varepsilon''_l = -1$. Учитывая однозначность рядов

$$\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

имеем здесь действительно две различные пары. Из этого справедливость утверждения теоремы очевидна.

Простым следствием теоремы 1 является несложное доказательство следующей теоремы, которая принадлежит Г. Штейнгаузу.

Теорема 2. *Дисконтинуум Кантора C имеет свойство S_2.*

Доказательство. Учтем, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ имеет место $0 < a_n \leqq 2R_n$, $R_n = 1/(2\,.\,3^n)$. Построим множество W, соответствующее этому ряду. Оно согласно теореме I имеет свойство S_2. Для каждого $x \in \langle 0, 1\rangle$ существуют числа $x', x'' \in W$ такие, что

$$x'' - x' = x\,, \quad x' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n' \,.\, 3^{-n}\,, \quad x'' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n'' \,.\, 3^{-n}\,.$$

Итак,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n'' - \varepsilon_n')\, 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \,.\, 3^{-n}\,, \quad \text{где} \quad \eta_n = 0, 2 \quad \text{или же} \quad -2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Построим числа

$$z' = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n'\, 3^{-n}\,, \quad z'' = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n''\, 3^{-n}\,,$$

такие, чтобы для каждого n было $\lambda_n'' - \lambda_n' = \eta_n$ и чтобы λ_n', λ_n'' принимали только значения 0, 2. Это, очевидно, возможно, и тогда $z', z'' \in C$, $z'' - z' = x$. Этим доказательство теоремы закончено.

Как заметил Т. Найбрунн, можно с помощью леммы 2 доказать следующую теорему, которая является дополнением теоремы Штейнгауза:

Теорема 3. *Для почти всех $x \in \langle 0, 1\rangle$ имеет место: к числу x существует бесконечно много пар чисел $x', x'' \in C$ (C есть дисконтинуум Кантора) таких, что $|x' - x''| = x$.*

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ удовлетворяет предположениям части (b) теоремы 1 и поэтому доказательство можно провести таким же образом как в теореме 1. Подобно как и там придем к тому, что для почти всех $x \in \langle 0, 1\rangle$ имеет место $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2\eta_n \,.\, 3^{-n}$, где $\eta_n = 0$, 1 или -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и для бесконечно многих n, $\eta_n = 0$. К последовательности $\{2\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ достаточно сейчас выбрать две последовательности

$$\{C_n'\}_{n=1}^{\infty}\,, \quad \{C_n''\}_{n=1}^{\infty} \tag{4}$$

чисел 0, 2 такие, чтобы для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$C_n'' - C_n' = 2\eta_n\,. \tag{5}$$

Причем так же, как и в теореме 1, придем к тому, что $\eta_n = 0$ дает возможность построить две различные пары последовательностей (4), удовлетворяющих (5). Из этого непосредственно вытекает наше утверждение.

Примечание. Из работы [8] получаем для размерности Хаусдорфа множеств W, соответствующие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ которых удовлетворяют предположениям части (a) теоремы 1, оценку $\dim W \geqq \dim C$. Действительно, из условия $a_n \leqq 2R_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ вытекает

$$\limsup_{n \to \infty} (a_n / R_n) \leqq 2\,,$$

и (смотри [8])

$$\dim W \geqq \frac{\log 2}{\log\left(1 + \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n/R_n)\right)} \geqq \frac{\log 2}{\log 3} = \dim C \,.$$

Г. Хадвигер показал (смотри [9]), что каждое множество $M \subset E_k$, $|M| > 0$, (E_k означает k-мерное евклидово пространство) имеет не только свойство S_n для каждого натурального $n > 1$, но что для него имеет место и следующее утверждение:

Существует $\eta > 0$ такое, что к каждому множеству $E \subset E_k$ такому, что $\mathrm{d}(E) \leqq \eta$ и E не имеет больше чем n элементов (n-натуральное число > 1), существует бесконечно много множеств $E' \subset M$, E' получаются смещением множеств E.

Теорему 1 (часть (b))можно в определенном смысле понимать как аналог теоремы Хадвигера для линейных дисконтинуумов W нулевой меры и свойств S_2.

Множества W, соответствующие рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, которые удовлетворяют

$$R_n < a_n \leqq 2R_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

являются особым случаем общего класса так называемых совершенных множеств первого рода (смотри [10]). В монографии С. Пиккард доказано, что такие множества имеют свойство S_2. Доказательство основывается на определенном результате Д. Мириманова о совершенных множествах первого рода. Доказательство, приведенное в настоящей работе, существенно отличается от доказательства С. Пиккард и дает возможность дополнить его результат для множеств W(и такие для дисконтинуума Кантора – смотри часть (b) теоремы 1), чего нельзя сделать методом Пиккард.

В дальнейшем потребуется ближе узнать структуру множества W, соответствующего ряду $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (смотри [8]). В работе [8] было показано, что $W = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$, где J_n есть соединение 2^n интервалов

$$i_n^m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots 2^n)\,,$$

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n\,, \quad \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n \rangle$$

($\varepsilon_i = 1$ или -1 для $i = 1, 2, \ldots n$). Для данного n является интервал $\langle -A, A\rangle$ соединением 2^n интервалов i_n^m, образующих множество J_n, и смежных интервалов

$$\Delta_k^l\,, \quad 1 \leqq k \leqq n\,, \quad 1 \leqq l \leqq 2^{k-1}\,,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_1^1 &= (-a_1 + R_1,\ a_1 - R_1)\,, \quad \Delta_2^1 = (-a_1 - a_2 + R_2,\ -a_1 + a_2 - R_2)\,,\\
\Delta_2^2 &= (a_1 - a_2 + R_2,\ a_1 + a_2 - R_2)\,, \ldots\\
&\ \vdots\\
\Delta_{n+1}^m &= (\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + R_{n+1},\ \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - R_{n+1})\,.
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть для каждого* $n = 1, 2, 3, \ldots$

(6) $$a_n > 2R_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}\,.$$

Тогда множество W *всех тех* x, *которые можно выразить в виде*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,,\ \varepsilon_n = 1 \text{ или } -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

не обладает свойством S_2.

Доказательство:[1]) Пусть η есть произвольно выбранное положительное число. Возьмем $n > 1$ настолько большим, чтобы $2(a_n - R_n) < \eta$. Учтем, что для каждого l, $1 \leqq l \leqq n$, имеет место, согласно предположению (6) (смотри [8]), $2(a_l - R_l) \geqq 2(a_n - R_n)$ и поэтому

(7) $$\min |\Delta_l^s| = |\Delta_n^1|\,,\quad 1 \leqq l \leqq n\,,\quad 1 \leqq s \leqq 2^{l-1}$$

($|M|$ как обычно означает меру множества M). Интервал i_{n-1}^1 разлагается на два интервала i_n^1, i_n^2 и смежный интервал Δ_n^1. Выберем в интервале Δ_n^1 две точки x_1, x_2 такие, чтобы $|x_1 - x_2| > 2R_n$. Это, очевидно, возможно, так как согласно предположению (6)

$$|\Delta_n^1| = 2(a_n - R_n) > 2(2R_n - R_n) = 2R_n\,.$$

Положим $M = \{x_1, x_2\}$, тогда

$$d(M) = |x_1 - x_2| < |\Delta_n^1| = 2(a_n - R_n) < \eta\,.$$

Пусть $M' = \{x_1', x_2'\}$ есть произвольный сдвиг множества M. Если бы $M' \subset W$, то из $W \subset \bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$ вытекает $M' \subset \bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$. Очевидно невозможно, чтобы $M' \subset i_n^m$ для какого-то m, так как длина интевала i_n^m равна $2R_n$. Также невозможно, чтобы пересечение M' с двумя интервалами i_n^m, i_n^l, $|l - m| > 1$, было непустым, ибо тогда, согласно (7), диаметр множества M должен был бы быть больше, чем $|\Delta_n^1|$. Остается еще случай, что $M' \subset i_n^m \cup i_n^{m+1}$ для подходящего m, причем пересечение M' с i_n^m и i_n^{m+1} в правой части непустое. Однако тогда, если Δ_l^s есть смежный интервал, лежащий между i_n^m и i_n^{m+1}, должно быть согласно (7)

$$|x_1 - x_2| = |x_1' - x_2'| > |\Delta_l^s| \geqq |\Delta_n^1|\,,$$

и это противоречит выбору множества M.

Примечание. Для размерности Хаусдорфа множества W, удовлетворяющего предположению теоремы 4, имеет согласно [8] место $\dim W \leqq \dim C$, где C есть множество Кантора. Действительно, из условия $a_n > 2R_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует $\liminf_{n\to\infty} (a_n/R_n) \geqq 2$ и таким образом

[1]) Доказательство теоремы 4 и 5 основано на идее доказательства утверждения Ц. Рылл-Нардзевского, следуя которому множество Кантора не имеет свойства S_3. Этот результат Нардзевского не напечатан и автор о нем узнал из письма профессора Э. Марчевского.

$$\dim W \leqq \frac{\log 2}{\log\left(1 + \liminf\limits_{n\to\infty} (a_n/R_n)\right)} \leqq \frac{\log 2}{\log 3} = \dim C\,.$$

Теорема 5. *Пусть k есть нечетное натуральное число > 1. Пусть для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$kR_n/(k-1) < a_n \leqq kR_n/(k-2)\,. \tag{8}$$

Утверждение: Множество W всех тех x, которые имеют вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,, \quad \varepsilon_n = 1 \text{ или } -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

не имеет свойства S_k.

Доказательство. Пусть $\eta > 0$. Выберем $n \geqq 1$ таким большим, чтобы $2R_n < \eta$. Разделим интервал $\langle -A, A\rangle$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на 2^n интервалов i_n^m множества J_n и смежные интервалы Δ_l^s, $1 \leqq l \leqq n$, $1 \leqq s \leqq 2^{l-1}$. Из условия (8) легким подсчетом получаем

$$\begin{aligned} a_s > kR_s/(k-1) &= ka_{s+1}/(k-1) + kR_{s+1}/(k-1) \geqq \\ &\geqq ka_{s+1}/(k-1) + k(k-2)\,a_{s+1}/k(k-1) = 2a_{s+1}\,, \end{aligned}$$

значит,

$$\begin{gathered} a_s - a_{s+1} > a_{s+1}\,, \quad a_s - R_s > a_{s+1} - R_{s+1} \\ \min 2(a_s - R_s) = 2(a_n - R_n)\,, \quad 1 \leqq s \leqq n\,, \\ \min |\Delta_l^s| = |\Delta_n^1|\,, \quad 1 \leqq l \leqq n\,, \quad 1 \leqq s \leqq 2^{l-1}\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Теперь построим в интервале i_n^1 множество M, имеющее k точек таким образом, что как точки множества M возьмем точки, образующие разложение интервала i_n^1 на $k - 1$ интервалов одинаковой длины. Средняя точка этого разделения лежит, согласно конструкции множества M и W, в смежном интервале множества W и поэтому не принадлежит W. Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и пусть $M' = \{x_1', x_2', \ldots x_k'\}$ есть произвольное множество, конгруэнтное с M. Очевидно, $d(M') = d(M) = 2R_n < \eta$. Покажем, что M' не может быть подмножеством W. Действительно, если бы $M' \subset W$, то из $W \subset \bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$, следовало бы $M' \subset \bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$. Очевидно невозможно (с учетом конструкцию множества M), чтобы пересечение M' с тремя или больше различными интервалами i_n^m или с двумя интервалами i_n^m, i_n^l, $|l - m| > 1$ было непустым. Также невозможно, чтобы $M' \subset i_n^m$ для какого-то m. Остается еще возможность, что $M' \subset i_n^m \cup i_n^{m+1}$ для подходящего m, причем

$$M' \cap i_n^m \neq \emptyset \neq M' \cap i_n^{m+1}\,.$$

Следовательно, существует в этом случае r, $1 \leqq r \leqq k$ такое, что

$$x_r' \in i_n^m\,, \quad x_{r+1}' \in i_n^{m+1}\,.$$

Тогда

$$|x'_{r+1} - x'_r| = |x_{r+1} - x_r| \geqq |\Delta^s_l|\,,$$

где Δ^s_l есть смежный интервал между i^m_n и i^{m+1}_n. Согласно (9) получаем в этом случае неравенство

$$|x_{r+1} - x_r| \geqq 2(a_n - R_n) = |\Delta^1_n|\,,$$

с другой стороны, согласно конструкции множества M есть

$$|x_{r+1} - x_r| = 2R_n/(k-1) \quad \text{и отсюда} \quad kR_n/(k-1) \geqq a_n\,,$$

что противоречит предположению теоремы. Этим доказательство закончено.

Примечание. 1. Если $k+1$ — четное число >2, то k — нечетное, $k>1$, и достаточное условие для того, чтобы W не обладало свойством S_{k+1}, является то, чтобы для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ было удовлетворено условие (8) теоремы 5, потому что тогда W не имеет свойства S_k и тем более не имеет свойства S_{k+1}.

2. Для $k = 3$ получаем, что множество W не имеет свойства S_3, как $3R_n/2 < a_n \leqq 3R_n$ только для $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. Для размерности Хаусдорфа множества W, удовлетворяющего предположению (8) теоремы 5, получаем из [8] оценки

$$\frac{\log 2}{\log 2 + \log\left(1 + 1/(k-2)\right)} \leqq \dim W \leqq \frac{\log 2}{\log 2 + \log\left(1 + 1/(2k-2)\right)}\,.$$

Мне неизвестно и не удалось мне пока определить, что существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такой, что соответствующей ему дисконтинуум W имеет свойство S_k для какого-то $k > 2$.

Заметим, наконец, что не представляет больших трудностей при переносе результатов о множестве W, соответствующем ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, на множество сумм всех частичных рядов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Литература

[1] *S. Piccard*: Sur les ensembles des distances des ensembles de points d'un espace Euclidien, Neuchatel 1939.

[2] *T. Neubrunn* a *T. Šalát*: O množinách vzdialeností množín metrického priestoru, Mat.-fyz. čas. SAV, *4* (1959), 222—235.

[3] *E. Marczewski*: O przesunięciach zbiorόv i o pewnym tverdzieniu Steinhausa. Prace matematyczne *I*, *2* (1955), 256—263.

[4] *H. Steinhaus*: Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, Fund. Math. *I* (1920), 93—104.

[5] *P. Erdös* and *S. Kakutani*: On a perfect set, Coll. Math. *IV*, *2* (1957), 195—196.

[6] *T. Šalát*: K absolútne konvergentným radom, Mat.-fyz. čas. SAV, *VIII*, *3* (1957), 139—142.

[7] *H. Steinhaus*: Nowa vlasnośc mnogości G. Cantora, Wektor (1917), 105—107.

[8] *T. Šalát*: Absolut konvergente Reihen und das Hausdorffsche Mass, Чехосл. Мат. Журнал, *9 (84)*, (1959), 372—389.
[9] *H. Hadwiger*: Ein Translationssatz für Mengen positiven Masses, Portugaliae Math., *5*, *3* (1946), 143—144.
[10] *D. Mirimanoff*: Sur une problème de la théorie de la mesure II, Fund. Math., *IV* (1923), 118—121.

Výtah

O MNOŽINÁCH VZDIALENOSTÍ LINEÁRNYCH DISKONTINUÍ, I

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Nech M je lineárna množina. Množinou vzdialeností $D(M)$ množiny M rozumieme množinu všetkých čísel $|x - y|$, kde $x, y \in M$. V tejto práci vyšetruje autor množiny vzdialeností niektorých lineárnych množín, ktoré sú definované nekonečnými radmi určitého typu.

Hlavným výsledkom tejto práce je nasledujúca veta:

Veta 1. (a) *Nech*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty\,, \quad 0 < a_k \leqq 2R_k = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Nech W je množina všetkých tých x, ktoré majú tvar

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,; \quad \varepsilon_n = 1 \quad \textit{alebo} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Potom $D(W) = \langle 0, 2A \rangle$.

(b) *Ak okrem predchádzajúcich predpokladov ešte platí*

$$a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad a \quad |W| = 0$$

($|W|$ značí Lebesgueovu mieru množiny W), potom skoro všetky $x \in \langle 0, 2A \rangle$ majú túto vlastnosť: K číslu x existuje nekonečne mnoho navzájom rôznych dvojíc $x', x'' \in W$ takých, že $|x' - x''| = x$.

Z dôkazu tejto vety vyplýva veta:

Veta 3. *Nech C značí Cantorovo diskontinuum. Potom skoro všetky $x \in \langle 0, 1 \rangle$ majú nasledujúcu vlastnosť: K číslu x existuje nekonečne mnoho dvojíc čísel $x', x'' \in C$ takých, že $|x' - x''| = x$.*

Táto práca obsahuje ešte niektoré ďalšie výsledky týkajúce sa množín W, ktoré sú určené nekonečnými radmi $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ v súvislosti s vlastnosťou S_n, ktorú definoval E. MARCZEWSKI (pozri [3]).

Zusammenfassung

ÜBER DIE MENGEN DER ENTFERNUNGEN DER LINEAREN DISKONTINUEN, I

Tibor Šalát, Bratislava

Es sei M eine lineare Punktmenge. Unter der Menge der Entfernungen $D(M)$ der Menge M verstehen wir die Menge aller $|x - y|$, wo $x, y \in M$. In dieser Arbeit studiert der Verfasser die Mengen der Entfernungen einiger linearen Punktmengen, die durch gewisse Reihen definiert sind. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz:

Satz 1. (a) *Es sei* $A = \sum_1^\infty a_n < +\infty$, $0 < a_k \leqq 2R_k = 2\sum_{n=1}^\infty a_{k+n}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Es sei W die Menge aller derjenigen x, welche die Form* $x = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k a_k$, $\varepsilon_k = 1$ *oder* -1 $(k = 1, 2, \ldots)$ *haben. Behauptung*: $D(W) = \langle 0, 2A \rangle$.

(b) *Wenn ausser den vorhergehenden Voraussetzungen noch* $a_k > R_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ist und* $|W| = 0$ *gilt* ($|W|$ *ist das Lebesguesche Mass der Menge* W), *dann besitzen fast alle* $x \in \langle 0, 2A \rangle$ (*im Sinne des Lebesgueschen Masses*) *diese Eigenschaft*: *Zur Zahl x existiert eine unendliche Menge von Zahlenpaaren* $x', x'' \in W$ *derart, dass* $|x' - x''| = x$ *gilt.*

Aus dem Beweis dieses Satzes folgt:

Satz 3. *Für fast alle* $x \in \langle 0, 1 \rangle$ *gilt*: *Zur Zahl x existiert eine unendliche Menge von Zahlenpaaren* $x', x'' \in C$ (*C ist das Cantorsche Diskontinuum*) *derart, dass* $|x' - x''| = x$ *gilt.*

Die Arbeit bringt noch einige weitere Ergebnisse über die durch die Reihen $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n$ $(\varepsilon_n = 1$ oder -1, $n = 1, 2, \ldots)$ definierten Mengen W im Zusammenhang mit der Eigenschaft S_n, welche von E. Marczewski eingeführt wurde (siehe [3]).