Časopis pro pěstování matematiky

Milan Sekanina

Poznámka k faktorisaci nekomutativních grup

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 94--97

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117398`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

POZNÁMKA K FAKTORISACI NEKOMUTATIVNÍCH GRUP

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 28. prosince 1960)

V článku e dokázána věta: Nechť grupa G obsahuje volnou podgrupu o $\aleph_\alpha$ generátorech. Pak existuje množina $C \subset G$ tak, že pro každé kardinální číslo $\mathfrak{m}$, $2 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_\alpha$, existuje množina $B_\mathfrak{m} \subset G$ taková, že $G = C \dot{\times} B_\mathfrak{m}$, card $B_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Při tom $C \dot{\times} B_\mathfrak{m}$ značí rozklad v Hajósově smyslu.

Nechť G je grupa. Nechť $A, B, C \subset G$. Píšeme $C = A \dot{\times} B$, když pro každé $x \in C$ existuje právě jedno $a \in A$ a $b \in B$ tak, že $x = a \,.\, b$ a $a \in A$, $b \in B \Rightarrow a \,.\, b \in C$. Dále položíme $C^{-1} = \{x \mid x = c^{-1},\ c \in C\}$, pro $d \in G$ je $dC = \{x \mid x = dc,\ c \in C\}$ apod.

Pro komutativní grupu G platí $G = A \dot{\times} B = A \dot{\times} C \Rightarrow \text{card}\, B = \text{card}\, C$.

Důkaz je proveden v lemmatu 1.2 z [1] jen pro nekonečnou cyklickou grupu, lze však beze změny převést na obecný případ. V této poznámce ukážeme, že obdobné tvrzení neplatí obecně pro nekomutativní grupy.

Věta. *Nechť G obsahuje volnou podgrupu G o $\aleph_\alpha$ generátorech. Potom existuje taková množina $C \subset G$, že pro každé kardinální číslo $\mathfrak{m}$, $2 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_\alpha$, existuje množina $B_\mathfrak{m} \subset G$ tak, že*

1. $C \dot{\times} B_\mathfrak{m} = G$. **2.** card $B_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Důkaz. Použijeme konstrukce z článku [2], str. 190. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\iota, \ldots, \varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots, \varphi_{\alpha_\iota}, \ldots$, $\iota \leqq \omega_\alpha$, je množina generátorů grupy G_1. Zkonstruujeme množiny $A, A_1, \ldots, A_\iota, \ldots, A_\iota \subset G_1$ tak, že pro každé $v \in G_1$ udáme předpis, do které z těchto množin v patří. Při tom postupujeme indukcí podle délky slova v. Je-li $v = 1$, pak $v \in A$. Nechť už pro každý prvek $v \in G_1$, jehož délka je $\leqq n$, je řečeno, do které z množin $A, A_1, \ldots, A_\iota, \ldots$ patří, a nechť patří každý takový prvek právě do jedné z těchto množin. Mějme pak prvek $v \in G_1$, jehož délka je $n + 1$.

I. Nechť vyjádření prvku v (pomocí shora uvedených generátorů) končí prvkem φ_k, tedy $v = u\varphi_k$.

α) Nechť $k = 1, 2, \ldots$. 1. Je-li $u \in A$, potom $v \in A_k$. 2. Není-li $u \in A$, potom $v \in A$.

β) Nechť $k = \alpha_\iota$, $\iota \leqq \omega_\alpha$. 1. Je-li $u \in A$, potom zvolme $\nu \geqq \iota$ a $v \in A_\nu$. 2. u non $\in$ $\in A \Rightarrow v \in A$.

II. Nechť vyjádření prvku v končí prvkem φ_k^{-1}.

α) Nechť $k = 1, 2, \ldots$. 1. Je-li $u \in A_k$, potom $v \in A$. 2. u non $\in A_k \Rightarrow v \in A_k$.

β) Nechť $k = \alpha_\iota$, $\iota \leqq \omega_\alpha$. 1. Existuje-li $\nu \geqq \iota$ tak, že $u \in A_\nu$, potom $v \in A$. 2. V opačném případě libovolně zvolíme ν a $v \in A_\nu$.

Poněvadž vyjádření pomocí generátorů je jednoznačné, patří $v \in G_1$ právě do jedné z množin $A, \ldots, A_\iota, \ldots$.

Nechť ν je libovolně ale pevně zvolené ordinální číslo, $1 \leqq \nu \leqq \omega_\alpha$. Potom platí

$$A\varphi_1 = A_1, \ldots, A\varphi_\iota = A_\iota, \ldots, A\varphi_{\alpha_\nu} = A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots, \iota < \nu \,. \tag{1}$$

Nechť totiž $\iota < \nu$. Nechť $u \in A$. Nechť vyjádření u nekončí φ_ι^{-1}. Potom $u\varphi_\iota \in A_\iota$ podle I α), 1: Nechť vyjádření u končí φ_ι^{-1}, tedy $u = u_1\varphi_\iota^{-1}$, kde vyjádření u_1 nekončí φ_ι. Podle II α), 1: $u_1 \in A_\iota$ tedy $u\varphi_\iota = u_1 \in A_\iota$. Odtud $A\varphi_\iota \subset A_\iota$. Nechť $v \in A_\iota$. Nechť vyjádření v nekončí φ_ι. Potom podle II α), 1: $v\varphi_\iota^{-1} \in A$. Nechť vyjádření v končí φ_ι. Potom $v = v_1\varphi_\iota$, kde v_1 nekončí φ_ι^{-1} a podle I α), 1: $v_1 \in A$. Tedy $v\varphi_\iota^{-1} = v_1 \in A$. Odtud $A_\iota\varphi_\iota^{-1} \subset A$, tedy $A_\iota \subset A\varphi_\iota$. Celkem $A\varphi_\iota = A_\iota$.

Dokážeme nyní $A\varphi_{\alpha_\nu} = A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots$ Nechť $u \in A$. Nechť vyjádření u nekončí $\varphi_{\alpha_\nu}^{-1}$. Potom podle I β), 1: $u\varphi_{\alpha_\nu} \in A_\mu$ pro jisté $\mu \geqq \nu$. Nechť vyjádření u končí $\varphi_{\alpha_\nu}^{-1}$. Potom $u = u_1\varphi_{\alpha_\nu}^{-1}$, kde u_1 nekončí φ_{α_ν}. Podle II β), 1 existuje $\mu \geqq \nu$ tak, že $u_1 \in A_\mu$, tedy $u\varphi_{\alpha_\nu} = u_1 \in A_\mu$. Proto v obou případech $A\varphi_{\alpha_\nu} \subset A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots$. Nechť $v \in A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots$, tj. $v \in A_\mu$ pro jisté $\mu \geqq \nu$. Nechť vyjádření v nekončí na φ_{α_ν}. Potom podle II β), 1 je $v\varphi_{\alpha_\nu}^{-1} \in A$. Nechť vyjádření v končí na φ_{α_ν}. Potom $v = v_1\varphi_{\alpha_\nu}$, kde vyjádření v_1 nekončí na $\varphi_{\alpha_\nu}^{-1}$. Je podle I β), 1: $v_1 \in A$, tedy $v\varphi_{\alpha_\nu}^{-1} = v_1 \in A$ a $(A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots)\,\varphi_{\alpha_\nu}^{-1} \subset A$, odkud $A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots \subset A\varphi_{\alpha_\nu}$. Celkem $A\varphi_{\alpha_\nu} = A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \ldots$.

Z rovnic (1) bezprostředně plyne

$$G_1 = A \dot{\times} \{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_\iota, \ldots, \varphi_{\alpha_\nu}\}\ \iota < \nu \,.$$

Nechť nyní C_1 značí systém representantů množiny levých tříd v grupě G vzhledem k podgrupě G_1. Je

$$G = (C_1 \,.\, A) \dot{\times} \{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_\iota, \ldots, \varphi_{\alpha_\nu}\} \,.$$

Položíme $C = C_1 \,.\, A$, $B_\nu = \{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_\iota, \ldots, \varphi_{\alpha_\nu}\}$. Je nyní card $B_\nu = \bar{\nu} + 1$ ($\bar{\nu}$ značí kardinální číslo příslušné k množině typu ν) a stačí tedy položit $B_\mathfrak{m} = B_\nu$, kde $\mathfrak{m} = \bar{\nu} + 1$. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *V každé grupě G, která obsahuje volnou podgrupu s dvěma generátory, existuje množina C a množiny B_n pro $n = 2, 3, \ldots, \aleph_0$ tak, že:*

$$1. \ \text{card}\, B_n = n \,. \quad 2. \ G = C \dot{\times} B_n \,.$$

D ů k a z plyne z faktu, že každá volná grupa s dvěma generátory obsahuje volnou podgrupu s $\aleph_0$ generátory (viz [3], str. 40).

Zůstává neřešeným problémem, zda v každé nespočetné nekomutativní grupě G existují množiny C, D, E takové, že $G = C \dot{\times} D = C \dot{\times} E$ a card $D \neq$ card E. K tomuto problému připojíme nyní dvě poznámky.

Poznámka 1. *Nechť v grupě G existují $C, D, E \subset G$ tak, že $G = C \dot{\times} D = C \dot{\times} E$ a* card $D = 2 \neq$ card E. *Potom G není periodická grupa.*

Důkaz. Protože pro $d \in G$ platí $G = C \dot{\times} D \Rightarrow G = C \dot{\times} (Dd)$,[1]) můžeme předpokládat $1 \in D$, $1 \in E$. Nechť $\varphi \in D$, $\psi \in E$. Protože $C \dot{\times} \{1, \varphi\} = G$ a card $E \neq 2$, je $C\psi \subset C\varphi$, $C\psi \neq C\varphi$ a tedy $C\psi\varphi^{-1} \subset C$, $C\psi\varphi^{-1} \neq C$. Odtud plyne indukcí $C \,.\, (\psi\varphi^{-1})^n \subset C$, $C \,.\, (\psi\varphi^{-1})^n \neq C$ pro každé přirozené číslo n. Tedy $\psi\varphi^{-1}$ má nekonečný řád a proto G není periodická grupa.

Poznámka 2. *Existují spočetné nekomutativní grupy G, pro něž platí $G = A \dot{\times} B = A \dot{\times} C \Rightarrow$* card $B =$ card C. Příkladem takové grupy je grupa G vytvořená dvěma generátory φ a ψ s vytvořujícími relacemi $\varphi^2 = \psi^2 = 1$. Pro tuto grupu platí

$$G = \{(\varphi\psi)^n\}_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots} \cup \{\psi(\varphi\psi)^n\}_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots} .$$

Tedy $G_1 = \{(\varphi\psi)^n\}_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ je komutativní normální podgrupa v G a G/G_1 je rovněž komutativní grupa. Tedy podle [4] (str. 79) je G měřitelná grupa. Nechť μ je nějaká míra v G a $G = A \dot{\times} B = A \dot{\times} C$. Je-li card B konečné, je potom $\mu(A) = 1/\text{card } B = 1/\text{card } C$ a tedy card B = card C. Je-li B nekonečná množina, je též C nekonečná množina.

Literatura

[1] *М. Секанина:* Замечания к факторизации бесконечной циклической группы. Чех. мат. жур., *9* (1959), 485—495.

[2] *T. I. Dekker, J. de Groot*: Decompositions of the sphere. Fund. math., XLIII (1956), 185—193.

[3] *W. Specht*: Gruppentheorie, Berlín 1956.

[4] *J. v. Neumann*: Zur allgemeinen Theorie des Masses. Fund. math., *XIII* (1929), 73—120.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОМУТАТИВНЫХ ГРУПП

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

В работе доказывается следующая теорема:

Пусть группа G содержит свободную подгруппу G_1 с $\aleph_\alpha$ генераторами. Тогда существует такое множество $C \subset G$, что для всех кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, $2 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_\alpha$ имеется в G подмножество $B_\mathfrak{m}$, для которого

$$\text{1. } C \dot{\times} B_\mathfrak{m} = G \,. \quad \text{2. card } B_\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \,.$$

[1]) Poznamenejme, že obecně $G = A \dot{\times} B$ a $d \in G$ neimplikuje $A \dot{\times} (dB) = G$. Příklad: Nechť G je volná grupa s dvěma generátory φ a ψ. Nechť A je množina všech mocnin φ, B množina skládající se z prázdného slova a všech slov začínajících ψ nebo ψ^{-1}. Zřejmě $G = A \dot{\times} B$. Pro $d = \varphi\psi$, φ non $\in A \,.\, (dB)$.

$C \dot{\times} B_{\mathfrak{m}} = G$ означаем факторизацию в смысле Хайоша, это значит, что всякое $g \in G$ можно выразить точно одним образом как $a \,.\, b$, $a \in C$, $b \in B_{\mathfrak{m}}$.

Доказательство опирается на одну конструкцию Декера-Грота.

Summary

A REMARK ON THE FACTORISATION OF NON-ABELIAN GROUPS

MILAN SEKANINA, Brno

In the paper following theorem is proved:

Let a group G contain a free subgroup G_1 with $\aleph_\alpha$ generators. Then there exists a set $C \subset G$ and, for each cardinal $\mathfrak{m}$ with $2 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_\alpha$, a set $B_{\mathfrak{m}} \subset G$, such that

$$\textbf{1.}\ C \dot{\times} B_{\mathfrak{m}} = G\,; \quad \textbf{2.}\ \operatorname{card} B_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$$

(*where $C \dot{\times} B_{\mathfrak{m}} = G$ denotes a factorisation of G in Hajós' sense, i. e. each $g \in G$ can be written in just one way as $a.\, b$ with $a \in C$, $b \in B_{\mathfrak{m}}$*).

In the proof a construction due to Dekker-de Groot is used.