Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Rieger

Ke kritice Churchovy teze o obecně rekursivních funkcích aritmetiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 4, 480--481

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117395`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

REFERÁTY

KE KRITICE CHURCHOVY TEZE O OBECNĚ REKURSIVNÍCH FUNKCÍCH ARITMETIKY

(Obsah přednášky LADISLAVA RIEGRA konané 27. března 1961 na matematicko-fysikální fakultě KU)

Churchova teze je předpoklad (hypotéza), že každá efektivně (strojem) vyčíslitelná funkce (rozumí se s přirozenými čísly jako argumenty i jako hodnotami – a stejně v dalším) je obecně rekursivní; přitom třídu *obecně rekursivních* funkcí aritmetiky možno, zhruba řečeno, charakterizovat jako nejmenší třídu funkcí, která a) obsahuje funkci $\varphi_0(x) = x + 1$, b) je uzavřena vůči těmto třem operacím na funkcích: b_1) *superpozice* (tj. tvoření složené funkce); b_2) tvoření nové funkce z daných dvou pomocí *primitivní rekurence*; b_3) tvoření nové funkce $\varphi(.)$ pomocí dané funkce $\psi(., .)$ tzv. *operací minima*, tj. $\varphi(x) = \mu_x(\psi(x, y) = 0)$ (= nejmenší takové y, že $\psi(x, y) = 0$) – rozumí se *za předpokladu, že ke každému x takové y existuje.*

Na Churchově tezi (resp. na ekvivalentní tezi Turingově či Markovově) spočívá běžný výklad negativních výsledků matematicko-logického rozboru některých tzv. masových úloh, tj. jejich zásadní strojová neřešitelnost. Tyto výsledky jsou v poslední době široce popularisovány právě v souvislosti s rozvojem elektronických počítačů. (Úloha platí za strojově neřešitelnou, jestliže její řešení nelze převést na výpočet hodnot vhodné obecně rekursivní funkce). Tak např. je známa strojová neřešitelnost úlohy rozhodnout při daných q čtvercových celočíselných maticích $U_1, U_2, \ldots, U_q$ vesměs řádu $n \geqq 6$, zda libovolná daná čtvercová matice U téhož řádu se dá vyjádřit jako součin konečného počtu matic vybíraných z matic $U_1, U_2, \ldots, U_q$ (ev. ovšem s opakováním) – (A. A. Markov, 1954). – Jiný známý, teoreticky důležitý a hluboký výsledek tohoto druhu je algoritmická neřešitelnost tzv. problému slov teorie grup, tj. neřešitelnost úlohy rozhodnout o rovnosti dvou prvků (daných tzv. grupovými slovy) v dané grupě s konečným počtem vytvářejících prvků a vytvářejících rovností (P. S. Novikov, 1955).

Přednášející udal jisté důvody k pochybnostem o absolutní nemožnosti (číslicově) strojového řešení zmíněných a podobných úloh (podle dosavadního výkladu Churchovy teze) a ukázal potřebu chápat Churchovu tezi v následujícím podmíněném pojetí.

I když přijmeme sám p o j e m obecně rekursivní funkce za (z mnoha přesvědčivých důvodů výstižnou) matematickou definici názorného (nematematického) pojmu „strojově vyčíslitelná funkce“ bez výhrad (které se však již vyskytly), zůstává v důkazech strojové neřešitelnosti úloh vesměs jeden mlčky činěný předpoklad. Ten spočívá v tom, že funkce $\varphi(x) = \mu_x(\psi(x, y) = 0)$ (daná operací minima) se považuje za definovanou jenom tehdy, když příslušnou definiční podmínku (že totiž ke každému x existuje y, tak, že je $\psi(x, y) = 0$) možno dokázat prostředky pouhé aritmetiky přirozených čísel.

Nebyla tedy zatím připuštěna možnost zaručit existenci y ke každému x, aby splňovalo $\psi(x, y) = 0$ prostředky silnějšími než skýtá aritmetika přirozených čísel, např. prostředky analytické teorie čísel nebo transfinitní indukcí apod. (Že taková možnost vskutku nastává, ukázal přednášející na příkladech; tyto příklady však nestačily ještě k udání funkce, která by ve smyslu silnější teorie byla a ve smyslu prostředků elementární aritmetiky vskutku nebyla obecně rekursivní.)

Z toho tedy plyne *závěr o relativnosti Churchovy teze*: Každá (dostatečně přesně charakterizovaná) matematická teorie, obsahující elementární aritmetiku, má svůj pojem obecně rekursivní funkce. Zásadně se může stát, že masová úloha, jevící se v jedné teorii jako strojově neřešitelná, může se v silnější teorii ukázat jako strojově řešitelná; ovšem v této silnější teorii budou jiné algoritmicky neřešitelné masové úlohy (jež se odhalí podobným postupem jako ve slabší teorii). Zda a v jakém smyslu by bylo možno hovořit o absolutně strojově neřešitelných úlohách v rozumném exaktním smyslu, je zatím nejasné.

Ladislav Rieger, Praha