Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Mleziva

K axiomatisaci trojhodnotové výrokové logiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 4, 392--403

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117388`

K AXIOMATISACI TROJHODNOTOVÉ VÝROKOVÉ LOGIKY

MIROSLAV MLEZIVA, Praha

(Došlo dne 4. června 1960)

V článku je podána axiomatisace funkčně úplného systému trojhodnotové výrokové logiky. Dva známé Słupeckého systémy axiomů pracují s třemi primitivními funktory. Zde zkoumaný systém má pouze dva primitivní funktory.

Počátek výzkumu vícehodnotových logik spadá do první čtvrtiny tohoto století. První výsledky podali nezávisle na sobě J. ŁUKASIEWICZ a E. POST [1]. Roku 1920 vytvořil Łukasiewicz (viz např. [2]) maticově definovaný systém trojhodnotové logiky výroků s primitivními funktory implikací (C) a negací (N), jak jsou definovány v tabulce 1. Roku 1929 axiomatisoval tento Łukasiewiczův systém M. WAJSBERG. Nato ukázal J. SŁUPECKI [3] 1936, že tento trojhodnotový systém Łukasiewiczův není funkčně úplný (tj. jeho primitivními funktory nelze definovat všechny možné funktory trojhodnotové výrokové logiky) a že se stane funkčně úplným po připojení jednoargumentového funktoru T (Tp nabývá hodnoty 2 nezávisle na hodnotě argumentu p) k primitivním funktorům C a N. Słupecki podal také axiomatisaci systému s funktory C, N a T. V roce 1946 [4] publikoval důkaz úplnosti svého axiomatického systému a podal další funkčně úplný systém trojhodnotové logiky výroků a jeho axiomatisaci. Tento druhý systém Słupeckého obsahuje primitivní funktory $\Rightarrow$, N, R, které jsou definovány v tabulce 2. Protože z axiomatisace tohoto systému vycházíme v dalších úvahách, uvedeme Słupeckého axiomy.

C	1 2 3	N
1	1 2 3	3
2	1 1 2	2
3	1 1 1	1

Tab. 1

$\Rightarrow$	1 2 3	N	R
1	1 2 3	3	2
2	1 1 1	1	1
3	1 1 1	1	3

Tab. 2

$\rightarrow$	1 2 3	R
1	1 3 2	2
2	1 1 1	1
3	1 1 1	3

Tab. 3

Všechny vždy-pravdivé formule (tj. nabývající podle tab. 2 pro všechny hodnoty argumentů pouze hodnoty 1) systému s funktory $\Rightarrow$, R, N jsou odvoditelné z následujících devíti axiomů:

$$\begin{array}{rlrl}
\text{I}': & (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\,, & \text{VI}': & p \Rightarrow [Rq \Rightarrow R(p \Rightarrow q)]\,,\\
\text{II}': & (Np \Rightarrow p) \Rightarrow p\,, & \text{VII}': & RRp \Rightarrow p\,,\\
\text{III}': & p \Rightarrow (Np \Rightarrow q)\,, & \text{VIII}': & p \Rightarrow RRp\,,\\
\text{IV}': & Rp \Rightarrow Np\,, & \text{IX}': & NRNp\,.\\
\text{V}': & R(p \Rightarrow q) \Rightarrow Rq\,, & &
\end{array}$$

Pravidla závěru jsou ve Słupeckého systému dvě: pravidlo odloučení

$$P': \qquad \frac{A,\, A \Rightarrow B}{B}$$

a pravidlo substituce (formulí za výrokové proměnné) formulované obvyklým způsobem.

V tomto článku bude podána axiomatisace systému výrokové logiky, který je vymezen tabulkou 3. Prvky systému jsou tedy všechny ty formule, utvořené z výrokových proměnných a funktorů $\rightarrow$ a R, které nabývají podle tabulky 3 pro všechny hodnoty proměnných hodnoty 1.

Věta 1. *Systém s primitivními funktory* $\rightarrow$ *a* R *je funkčně úplný.*

Funkční úplnost prokážeme prostě tím, že na základě funktorů $\rightarrow$ a R definujeme funktory systému Słupeckého (R můžeme pominout, protože je v obou systémech určen stejně), o nichž je známo [4], že postačují k definičnímu zavedení všech funktorů trojhodnotové výrokové logiky:

Definice 1. $p \Rightarrow q \;=_{df}\; p \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Definice 2. $Np \;=_{df}\; p \rightarrow Rp$.

Eliminace funktoru N bylo dosaženo jednoduše záměnou hodnot 2 a 3 v tabulce implikace Słupeckého systému (tab. 2).

Axiomatisaci tohoto systému provedeme metodou zprostředkované axiomatisace, opírajíce se o to, že již byl axiomatisován systém určený tabulkou 2. Pro dvouhodnotovou výrokovou logiku s implikací byla tato metoda podrobně vyložena v [5]. Zde je ta zvláštnost, že implikace systému axiomatisovaného (systém s funktory $\rightarrow$, R) a systému, jehož axiomatisace je předpokládána (systém s funktory $\Rightarrow$, N, R), se liší.

Nejprve ještě definujeme pojem deduktivní ekvivalence formule jedné nebo více formulím (A, B, $B_1, \ldots, B_i$ jsou proměnné formulí).

Definice 3. a) A je *deduktivně ekvivalentní* B ($A \sim B$) tehdy a jen tehdy, jsou-li odvoditelné formule $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$; b) A je *deduktivně ekvivalentní* $B_1, B_2, \ldots, B_i$ ($A \sim B_1, B_2, \ldots, B_i$) tehdy a jen tehdy, jsou-li odvoditelné formule $A \rightarrow B_1$, $A \rightarrow B_2$, $\ldots$, $A \rightarrow B_i$, $B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (B_i \rightarrow A) \ldots)$.

Uvažujme nyní tuto množinu axiomů:

$$\begin{aligned}
&\text{I:}\ [(p \to q) \to r] \to [(r \to p) \to (s \to p)]\,,\\
&\text{II:}\ R(p \to q) \to (Rq \to r)\,,\\
&\text{III:}\ p \to \{(q \to Rq) \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)]\}\,,\\
&\text{IV:}\ p \to RRp\,,\\
&\text{V:}\ RRp \to p\,.
\end{aligned}$$

Pravidly závěru jsou zde: 1. pravidlo odloučení P:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}\,,$$

2. obvykle formulované pravidlo substituce.

Věta 2. *Množina axiomů* I–V *je bezesporná.*

Bezesporností axiomů zde rozumíme, že jsou odvoditelné jen ty z formulí, obsahujících pouze funktory $\to$ a R, které jsou vždy-pravdivé podle tabulky 3.

Důkaz. 1. Všechny axiomy jsou podle tabulky 3 vždy-pravdivými formulemi. 2. Obvykle formulovaným pravidlem substituce nemůžeme ze vždy-pravdivých formulí získat jiné formule, než zase vždy-pravdivé. 3. Také pravidlo odloučení „přenáší vlastnost vždy-pravdivosti z předpokladů na závěr. Předpokládejme, že A a $A \to B$ jsou pravdivé – tj. mají hodnotu 1. Pak můžeme psát místo antecedentu implikace hodnotu 1 a tvrdit, že implikace $1 \to B$ má hodnotu 1. Tabulka 3 nám ukáže, že implikace, jejíž první člen má hodnotu 1 má sama hodnotu 1 pouze tehdy, má-li i druhý člen hodnotu 1. Tedy i B je pravdivé. Ze vždy-pravdivých axiomů lze pomocí pravidel odvodit pouze vždy-pravdivé formule. Nemůže tedy nastat případ, abychom odvodili nějakou formuli a také její negaci.

Věta 3. *Množina axiomů* I–V *je úplná.*

Úplností axiomů zde rozumíme, že jsou odvoditelné všechny ty formule, obsahující pouze funktory $\to$ a R, které jsou vždy-pravdivé podle tabulky 3.

Důkaz. Bude ukázáno, že za pomoci definic jsou z axiomů I–V odvoditelné všechny vždy-pravdivé formule Słupeckého systému (s funktory $\Rightarrow, N, R$) a že všechny vždy-pravdivé formule zde zkoumaného systému lze redukovat na odvoditelné formule Słupeckého systému.*)

Axiom I má tu vlastnost, že z něho můžeme odvodit všechny ty „čistě" implikativní formule (tj. obsahující pouze funktor implikace), které platí ve dvouhodnotové výro-

*) Možností „redukce" množiny formulí $\mathfrak{A}$ na množinu formulí $\mathfrak{B}$ zde rozumíme možnost ukázat, že všechny formule množiny $\mathfrak{A}$ lze odvodit (pomocí daných pravidel) z formulí množiny $\mathfrak{B}$. Je-li známo, že z axiomů jsou odvoditelné všechny formule množiny $\mathfrak{B}$ a že všechny formule množiny $\mathfrak{A}$ můžeme v uvedeném smyslu „redukovat" na formule množiny $\mathfrak{B}$, pak usuzujeme, že všechny formule množiny $\mathfrak{A}$ jsou odvoditelné z axiomů.

kové logice [6]. Jsou tedy odvoditelné následující formule:

1. $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$,
2. $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$,
3. $[p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)]$,
4. $(p \to q) \to [p \to (p \to q)]$,
5. $[p \to (p \to q)] \to (p \to q)$,
6. $[(p \to q) \to r] \to (q \to r)$,
7. $p \to p$,
8. $p \to (q \to p)$,
9. $[(p \to q) \to p] \to p$,
10. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$,
11. $[(p \to q) \to q] \to [(q \to p] \to p]$,
12. $(p \to (p \to q)) \to \{(p \to (p \to q)) \to \{(q \to (q \to r)) \to [(q \to (q \to r)) \to (p \to$ $\to (p \to r))]\}\}$.

Musíme dále odvodit řadu formulí, obsahujících funktor R. Při odvozování použijeme toho zkráceného způsobu zápisu jednotlivých kroků odvozování, který je podobný způsobu, zavedenému polskými logiky. Objasníme tento způsob zápisu na příkladě odvození formule 22. V řádku nad formulí 22 je vyjádřeno toto: Ve formuli 3 dosadíme za proměnnou p proměnnou q, za q formuli 7 a za r formuli $Rq \to (Rq \to$ $\to r)$; z obdržené formule pak podle pravidla P odloučíme („O" je znak odloučení) formuli, která vznikne z formule 21 dosazením formule 7 za proměnnou p; dále odloučíme ještě formuli 7; výsledkem je formule 22. Analogicky čteme zápisy způsobu odvození i v jiných případech.

$3q/q \to Rq,\ r/[(Rq \to q) \to R(p \to q)] \times O$ III $- 13$.

13. $(q \to Rq) \to \{p \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)]\}$,
$6p/q,\ q/Rq,\ r/p \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)] \times O\ 13 - 14$.
14. $Rq \to \{p \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)]\}$,
$2q/p \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)],\ r/(Rq \to q) \to [p \to R(p \to q)]$,
$p/Rq \times O\ 3q/Rq \to q,\ r/R(p \to q) - O\ 14 - 15$.
15. $Rq \to \{(Rq \to q) \to [p \to R(p \to q)]\}$,
$3p/Rq,\ q/Rq \to q,\ r/p \to R(p \to q) \times O\ 15 - 16$.
16. $(Rq \to q) \to \{Rq \to [p \to R(p \to q)]\}$,
$6p/Rq,\ r/Rq \to [p \to R(p \to q)] \times O\ 16 - 17$.
17. $q \to \{Rq \to [p \to R(p \to q)]\}$,
$2q/R(p \to q),\ r/Rq \to r \times O$ II $- 18$.
18. $[p \to R(p \to q)] \to [p \to (Rq \to r)]$,
$2q/p \to R(p \to q),\ r/p \to (Rq \to r),\ p/Rq \times O\ 18 - 19$.

19. $\{Rq \to [p \to R(p \to q)]\} \to \{Rq \to [p \to (Rq \to r)]\}$,
$2q/Rq \to [p \to R(p \to q)],\ r/Rq \to [p \to (Rq \to r)],\ p/q \times O\,19 - O\,17 - 20$.

20. $q \to \{Rq \to [p \to (Rq \to r)]\}$,
$2q/Rq \to [p \to (Rq \to r)],\ r/p \to [Rq \to (Rq \to r)],\ p/q \times O\,3p/Rq,\ q/p,$
$r/Rq \to r - O\,20 - 21$.

21. $q \to \{p \to [Rq \to (Rq \to r)]\}$,
$3p/q,\ q/7,\ r/Rq \to (Rq \to r) \times O\,21\,p/7 - O\,7 - 22$.

22. $q \to [Rq \to (Rq \to r)]$,
$2q/Rp \to (Rp \to q),\ r/Rp \to q \times O\,5p/Rp - O\,22q/p, r/q - 23$.

23. $p \to (Rp \to q)$,
$3q/Rp, r/q \times O\,23 - 24$.

24. $Rp \to (p \to q)$,
$2q/Rp,\ r/p \to q \times O\,24 - 25$.

25. $(p \to Rp) \to [p \to (p \to q)]$,
$3p/p \to Rp,\ q/p,\ r/p \to q \times O\,25 - 26$.

26. $p \to [(p \to Rp) \to (p \to q)]$,
$2q/(p \to Rp) \to (p \to q),\ r/p \to [(p \to Rp) \to q] \times O\,3p/p \to Rp,\ q/p,$
$r/q \times O\,26 - 27$.

27. $p \to \{p \to [(p \to Rp) \to q]\}$,
$2q/(p \to Rp) \to q,\ r/(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to q] \times O\,4p/p \to Rp - 28$.

28. $\{p \to [(p \to Rp) \to q]\} \to \{p \to \{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to q]\}\}$,
$2q/p \to [(p \to Rp) \to q],\ r/p \to \{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to q]\} \times O\,28 -$
$- O\,27 - 29$.

29. $p \to \{p \to \{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to q]\}\}$,
$9q/Rp - 30$.

30. $[(p \to Rp) \to p] \to p$,
$1p/(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to p],\ q/(p \to Rp) \to p,\ r/p \times O\,5p/p \to Rp,$
$q/p - O\,30 - 31$.

31. $\{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to p]\} \to p$,
$4p/(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to p],\ q/p \times O\,31 - 32$.

32. $\{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to p]\} \to \{\{(p \to Rp) \to [(p \to Rp) \to p]\} \to p\}$,
$2q/(q \to Rq) \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)],\ r/(Rq \to q) \to [(q \to Rq) \to$
$\to R(p \to q)] \times O\,3p/q \to Rq,\ q/Rq \to q,\ r/R(p \to q) - O\,\mathrm{III} - 33$.

33. $p \to \{(Rq \to q) \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$3q/Rq \to q,\ r/(q \to Rq) \to R(p \to q) \times O\,33 - 34$.

34. $(Rq \to q) \to \{p \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$34q/p \to q - 35$.

35. $[R(p \to q) \to (p \to q)] \to \{p \to \{[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q))\}\}$,
$3p/R(p \to q),\ q/Rq,\ r/p \to q \times O\,\mathrm{II}\,r/p \to q - 36$.

36. $Rq \to [R(p \to q) \to (p \to q)]$,
$2q/R(p \to q) \to (p \to q)$, $r/p \to \{[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q))\}$,
$p/Rq \times O\ 35 - O\ 36 - 37$.

37. $Rq \to \{p \to \{[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q))\}\}$,
$3p/Rq$, q/p, $r/[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q)) \times O\ 37 - 38$.

38. $p \to \{Rq \to \{[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q))\}\}$,
$2q/Rq \to \{[(p \to q) \to R(p \to q)] \to R(p \to (p \to q))\}$,
$r/\{Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)]\} \to [Rq \to R(p \to (p \to q))] \times O\ 10p/Rq$,
$q/(p \to q) \to R(p \to q)$, $r/R(p \to (p \to q)) \times O\ 38 - 39$.

39. $p \to \{\{Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)]\} \to [Rq \to R(p \to (p \to q))]\}$,
$10q/Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)]$, $r/Rq \to R(p \to (p \to q)) \times O\ 39 - 40$.

40. $\{p \to \{Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)]\}\} \to \{p \to [Rq \to R(p \to (p \to q))]\}$,
$6p/Rq$, $r/p \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)] \times O\ 34 - 41$.

41. $q \to \{p \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$3p/q$, q/p, $r/(q \to Rq) \to R(p \to q) \times O\ 41 - 42$.

42. $p \to \{q \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$10r/(q \to Rq) \to R(p \to q) \times O\ 42 - 43$.

43. $(p \to q) \to \{p \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$3p/p \to q$, q/p, $r/(q \to Rq) \to R(p \to q) \times O\ 43 - 44$.

44. $p \to \{(p \to q) \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]\}$,
$2q/(p \to q) \to [(q \to Rq) \to R(p \to q)]$,
$r/(q \to Rq) \to [(p \to q) \to R(p \to q)] \times O\ 3p/p \to q$, $q/q \to Rq$,
$r/R(p \to q) - O\ 44 - 45$.

45. $p \to \{(q \to Rq) \to [(p \to q) \to R(p \to q)]\}$,
$2q/(q \to Rq) \to [(p \to q) \to R(p \to q)]$,
$r/Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)] \times O\ 6p/q$, q/Rq,
$r/(p \to q) \to R(p \to q) \times O\ 45 - 46$.

46. $p \to \{Rq \to [(p \to q) \to R(p \to q)]\}$,
$40 \times O\ 46 - 47$.

47. $p \to [Rq \to R(p \to (p \to q))]$,
$2q/Rq \to R(p \to (p \to q))$,
$r/Rq \to [Rq \to R(p \to (p \to q))] \times O\ 8p/Rq \to R(p \to (p \to q))$,
$q/Rq - O\ 47 - 48$.

48. $p \to \{Rq \to \{Rq \to R(p \to (p \to q))\}\}$,
$8p/48$, $q/p \times O\ 48 - 49$.

49. $p \to \{p \to \{Rq \to [Rq \to R(p \to (p \to q))]\}\}$,
$3p/R(p \to (p \to q))$, $q/R(p \to q)$, $r/q \times O\ \mathrm{II}\ q/p \to q$, $r/q - 50$.

50. $R(p \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]$,
$2q/R(p \to q)$, $r/R(p \to (p \to q)) \to q$, $p/Rq \to q \times O\ 50 - 51$.

51. $[(Rq \to q) \to R(p \to q)] \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}$,
$2q/(Rq \to q) \to R(p \to q)$, $r/(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]$,
$p/q \to Rq \times O\ 51 - 52$.

52. $\{(q \to Rq) \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)]\} \to \{(q \to Rq) \to \{(Rq \to q) \to$
$\to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}\}$,
$2q/(q \to Rq) \to [(Rq \to q) \to R(p \to q)]$,
$r/(q \to Rq) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\} \times O\ 52 - O\ \mathrm{III} - 53$.

53. $p \to \{(q \to Rq) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}\}$,
$1p/R(p \to q)$, $q/(p \to q) \to r$, $r/q \to r \times O\ 24p/p \to q$, $q/r - O\ 6 - 54$.

54. $R(p \to q) \to (q \to r)$,
$1p/R(p \to (p \to q))$, $q/(p \to q) \to r$, $r/q \to r \times O\ 54\ q/p \to q - O\ 6 - 55$.

55. $R(p \to (p \to q)) \to (q \to r)$,
$1p/R(p \to q)$, $q/(p \to q) \to p$, $r/p \times O\ 24p/p \to q$, $q/p - O\ 9 - 56$.

56. $R(p \to q) \to p$,
$1p/R(p \to (p \to q))$, q/p,
$r/(q \to Rq) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q] \times O\ 56q/p \to q - O\ 53 - 57$.

57. $R(p \to (p \to q)) \to \{(q \to Rq) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}\}$,
$3p/R(p \to (p \to q))$, $q/q \to Rq$,
$r/(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q] \times O\ 57 - 58$.

58. $(q \to Rq) \to \{R(p \to (p \to q)) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}\}$,
$1p/R(p \to (p \to q))$, $q/q \to Rq$,
$r/R(p \to (p \to q)) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\} \times O\ 55r/Rq -$
$- O\ 58 - 59$.

59. $R(p \to (p \to q)) \to \{R(p \to (p \to q)) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}\}$,
$5p/R(p \to (p \to q))$, $q/(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q] \times O\ 59 - 60$.

60. $R(p \to (p \to q)) \to \{(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]\}$,
$2q/(Rq \to q) \to [R(p \to (p \to q)) \to q]$, $r/R(p \to (p \to q)) \to [(Rq \to q) \to q]$,
$p/R(p \to (p \to q)) \times O\ 3p/Rq \to q$, $q/R(p \to (p \to q))$, $r/q - O\ 60 - 61$.

61. $R(p \to (p \to q)) \to \{R(p \to (p \to q)) \to [(Rq \to q) \to q]\}$,
$5p/R(p \to (p \to q))$, $q/(Rq \to q) \to q \times O\ 61 - 62$.

62. $R(p \to (p \to q)) \to [(Rq \to q) \to q]$,
$1p/R(p \to (p \to q))$, $q/(Rq \to q) \to q$,
$r/(q \to Rq) \to Rq \times O\ 62 - O\ 11p/Rq - 63$.

63. $R(p \to (p \to q)) \to [(q \to Rq) \to Rq]$,
$10p/R(p \to (p \to q))$, $q/q \to Rq$, $r/Rq \times O\ 63 - O\ 55r/Rq - 64$.

64. $R(p \to (p \to q)) \to Rq$,
$4p/R(p \to (p \to q))$, $q/Rq \times O\ 64 - 65$.

65. $R(p \to (p \to q)) \to [R(p \to (p \to q)) \to Rq]$,
$4q/RRp \times O\ \mathrm{IV} - 66$.

66. $p \to (p \to RRp)$,
$4p/RRp,\ q/p \times O\ \mathrm{V} - 67$.

67. $RRp \to (RRp \to p)$,
$3p/R(p \to Rp),\ q/RRp,\ r/Rp \times O\ \mathrm{II}\ q/Rp,\ r/Rp - 68$.

68. $RRp \to [R(p \to Rp) \to Rp]$,
$1q/RRp,\ r/R(p \to Rp) \to Rp \times O\ \mathrm{IV} - O\ 68 - 69$.

69. $p \to [R(p \to Rp) \to Rp]$,
$3q/R(p \to Rp),\ r/Rp \times O\ 69 - 70$.

70. $R(p \to Rp) \to (p \to Rp)$,
$1p/R(p \to Rp),\ q/p \to Rp,\ r/RR(p \to Rp) \times O\ 70 - O\ \mathrm{IV}\ p/p \to Rp - 71$.

71. $R(p \to Rp) \to RR(p \to Rp)$,
$54r/Rq - 72$.

72. $R(p \to q) \to (q \to Rq)$,
$\mathrm{II}\ r/q - 73$.

73. $R(p \to q) \to (Rq \to q)$,
$8p/Rp,\ q/p - 74$.

74. $Rp \to (p \to Rp)$,
$4p/Rp,\ q/p \to Rp \times O\ 74 - 75$.

75. $Rp \to [Rp \to (p \to Rp)]$.

Použijeme-li nyní definic 1 a 2, obdržíme z odvozených formulí 12, 29, 32, 75, 49, 65, 66, 67, 71 devět Słupeckého axiomů pro systém s funktory $\Rightarrow$, N, R.

Pravidlo odloučení P' platné v systému Słupeckého zde můžeme vyjádřit takto:

$$\frac{A,\ A \to (A \to B)}{B}.$$

Toto pravidlo lze velmi snadno dokázat na základě pravidla odloučení, užívaného v našem systému. Předpokládejme, že platí premisy pravidla Słupeckého A a $A \to (A \to B)$. Platné A tedy na základě našeho pravidla P dvakrát odloučíme a dostáváme B. V našem systému lze tedy přejít od premis Słupeckého pravidla k závěru téhož pravidla. Pravidlo ze Słupeckého systému je tedy odvozeným pravidlem v našem systému.

Z toho, že jsou odvoditelné axiomy a dokazatelné pravidlo P' Słupeckého systému je patrné, že z axiomů I – V jsou odvoditelné všechny vždy-pravdivé formule systému s funktory $\Rightarrow$, R, N.

Odvoditelnost všech vždy-pravdivých formulí systému zde zkoumaného ukážeme nyní tím, že dokážeme redukovatelnost těchto formulí na vždy-pravdivé formule Słupeckého systému a tedy na formule, které jsou odvoditelné i v našem systému.

Z formulí III, IV, V, 56, 72, 73 vyplývá platnost ekvivalencí:

E_1: $$R(A \to B) \sim A, B \to RB, RB \to B,$$

E_2: $$RRA \sim A.$$

Platnost těchto ekvivalencí dovoluje redukci všech formulí s funktory $\to$, R na formule, kde R stojí pouze před proměnnými a to pouze jednou.

Na základě formulí 4, 5 a definice 1 platí i ekvivalence

E_3: $$A \Rightarrow B \sim A \to B.$$

Pro formule, v nichž R nestojí před žádnou jinou komponentou formulí kromě proměnných, platí na základě E_3, že smíme implikační znak $\to$ nahradit na libovolném místě implikačním znakem $\Rightarrow$ (v důsledku toho, že jsou odvoditelné všechny „čistě implikační" vždy-pravdivé formule, které platí v dvouhodnotové logice; podrobnější zdůvodnění v [5] str. 18).

Protože všechny formule s funktory $\to$ a R, které jsou vždy-pravdivé na základě matice (tab. 3), lze podle E_1 a E_2 redukovat na vždy-pravdivé formule, v nichž je R pouze před prostými proměnnými, můžeme v těchto formulích všude nahradit funktor $\to$ funktorem $\Rightarrow$. Tím redukujeme všechny vždy-pravdivé formule s funktory $\to$ a R na vždy-pravdivé formule s funktory $\Rightarrow$ a R (tj. část Słupeckého systému). Tyto jsou však všechny odvoditelné na základě axiomů I–V a pravidel. Můžeme tedy usoudit, že jsou odvoditelné i všechny vždy-pravdivé formule s funktory $\to$ a R. Zkoumaný systém axiomů je tedy úplný.

Věta 4. *Množina axiomů* I–V *je nezávislá.*

Důkaz. Použijeme obvyklé metody interpretace maticemi. Pro každý z axiomů udáme tabulkovou interpretaci funktorů $\to$ a R, která vyhovuje pravidlu odloučení P, podle níž budou vždy-pravdivé všechny axiomy kromě toho, jehož nezávislost má být dokázána.

$\to$	1	2	3	4	5	R
1	1	3	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	3
4	1	1	1	1	1	3
5	1	1	1	3	1	3

Tab. 4

Nezávislost axiomu I je dokazována na základě tabulky 4. Pro hodnoty proměnných $p = 5$, $q = 4$, $r = 3$, $s = 1$ nabývá axiom I výsledné hodnoty:

$$[(5 \to 4) \to 3] \to [(3 \to 5) \to (1 \to 5)]$$
$$[3 \to 3] \to [1 \to 2]$$
$$1 \to 3$$
$$2$$

Nezávislost axiomu II je dokazována na základě tabulky 5. Ostatní axiomy zůstávají při této interpretaci vždy-pravdivé; axiom II nabývá pro $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$ hodnoty:

$$\begin{gathered} R(1 \to 2) \to (R2 \to 3) \\ R3 \to (1 \to 3) \\ 1 \to 2 \\ 3 \end{gathered}$$

Nezávislost axiomu III je dokazována pomocí tabulky 6. Ostatní axiomy jsou při této interpretaci vždy-pravdivé; axiom III nabývá pro $p = 1$, $q = 3$ hodnoty:

$$\begin{aligned} &1 \to \{(3 \to R3) \to [(R3 \to 3) \to R(1 \to 3)]\} \\ &1 \to \{(3 \to 3) \to [(3 \to 3) \to R(3)]\} \\ &1 \to \{1 \to [1 \to 3]\} \\ &1 \to \{1 \to 3\} \\ &1 \to 3 \\ &\ \ 3 \end{aligned}$$

Nezávislost axiomu IV je dokazována pomocí tabulky 7. Zatím co ostatní axiomy zůstávají vždy-pravdivé, nabývá axiom IV pro $p = 1$ hodnoty:

$$\begin{gathered} 1 \to RR1 \\ 1 \to R2 \\ 1 \to 2 \\ 3 \end{gathered}$$

Nezávislost axiomu V je dokazována na základě tabulky 8. Axiom V má pro $p = 2$ hodnotu:

$$\begin{gathered} RR2 \to 2 \\ R3 \to 2 \\ 1 \to 2 \\ 3 \end{gathered}$$

$\to$	1	2	3	R
1	1	3	2	3
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

Tab. 5

$\to$	1	2	3	R
1	1	3	3	2
2	1	1	1	1
3	1	1	1	3

Tab. 6

$\to$	1	2	3	R
1	1	3	2	2
2	1	1	1	2
3	1	1	1	1

Tab. 7

$\to$	1	2	3	R
1	1	3	2	3
2	1	1	1	3
3	1	1	1	1

Tab. 8

Množina axiomů I–V je tedy nezávislá.

P o z n á m k a. Axiom II obsahuje tři různé proměnné. Je možné dosáhnout toho, aby všechny axiomy kromě prvního obsahovaly pouze dvě proměnné, nahradíme-li axiom II dvěma axiomy:

$$R(p \to q) \to (Rq \to q) \quad \text{a} \quad Rp \to (p \to q)\,.$$

Literatura

[1] *E. L. Post*: Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. American Journal of Mathematics, vol. *43* (1921), 163—185.

[2] *J. Łukasiewicz*: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Comptes rendus des séances de la Socièté des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol. *23* (1930), 51—77.

[3] *J. Słupecki*: Der volle dreiwertige Aussagenkalkül. Comptes rendus des séances de la Socièté des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol. *29* (1936), 9—11.

[4] *J. Słupecki*: Pełny trójwartościowy rachunek zdań. Annales Univ. M. Curie-Skłodowska (Lublin), vol. *1*, no. 3, Sect. F (1946), 193—209.

[5] *M. Mleziva*: Die mittelbare Axiomatisierung der die Implikation enthaltenden Systeme des zweiwertigen Aussagenkalküls. Rozpravy ČSAV, řada společenských věd, 1959, seš. *12*.

[6] *J. Łukasiewicz*: The Shortest Axiom of the Implicational Calculus of Propositions. Proc. of the Royal Irish Acad., Vol. *52*, Sect. A, No. 3, 25—33.

Резюме

К АКСИОМАТИЗАЦИИ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

МИРОСЛАВ МЛЕЗИВА (Miroslav Mleziva), Прага

В этой статье рассматривается система трехзначной логики высказываний, которая определена матрицей

$\rightarrow$	1	2	3	R
1	1	3	2	2
2	1	1	1	1
3	1	1	1	3

Прежде всего показано, что эта система функционально полна. Известная аксиоматизация двух систем Слупецкого содержит три примитивных функтора. Наша система содержит только функтор импликации и функтор R. Аксиомы этой системы следующие:

$$\begin{aligned} \text{I:}\ & [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)]\,, \\ \text{II:}\ & R(p \rightarrow q) \rightarrow (Rq \rightarrow r)\,, \\ \text{III:}\ & p \rightarrow \{(q \rightarrow Rq) \rightarrow [(Rq \rightarrow q) \rightarrow R(p \rightarrow q)]\}\,, \\ \text{IV:}\ & p \rightarrow RRp\,, \\ \text{V:}\ & RRp \rightarrow p\,. \end{aligned}$$

В статье дается доказательство непротиворечивости, полноты и независимости аксиом.

Summary

ON THE AXIOMATIZATION OF THREE-VALUED PROPOSITIONAL LOGIC

MIROSLAV MLEZIVA, Praha

In this paper is investigated a system of three-valued propositional logic defined by the matrix

$\rightarrow$	1	2	3	R
1	1	3	2	2
2	1	1	1	1
3	1	1	1	3

This system is proved to be functionally complete. There are known two axiomatisations of systems containing three primitive functors (Słupecki). Our system contains only two functors, $\rightarrow$ and R. The axioms of this system are as follows:

$$\text{I: } [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)],$$
$$\text{II: } R(p \rightarrow q) \rightarrow (Rq \rightarrow r),$$
$$\text{III: } p \rightarrow \{(q \rightarrow Rq) \rightarrow [(Rq \rightarrow q) \rightarrow R(p \rightarrow q)]\},$$
$$\text{IV: } p \rightarrow RRp,$$
$$\text{V: } RRp \rightarrow p.$$

A proof is given of the consistency, completeness and independence of these axioms.