Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 4, 482--491

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117385

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

RECENSE

Otakar Borůvka: GRUNDLAGEN DER GRUPPOID- UND GRUPPENTHEORIE. Hochschulbücher für Mathematik, Band 46, vydal VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960, XII + 198 stran, cena 62,20 Kčs.

Teorie ekvivalencí, založená před zhruba dvaceti lety pracemi P. DUBREILE, O. BORŮVKY, Ö. ORA a M. L. DUBREIL-JACOTINOVÉ, se od té doby velmi rychle rozvinula díky své základní důležitosti ve všech odvětvích vědy. Můžeme v ní rozlišiti dva základní směry bádání: 1. *analytickou* teorii ekvivalencí (neboli teorii rozkladů v množině), jejímž autorem je O. Borůvka a jež je charakterisována tím, že prvky (= body) základní množiny v ní hrají prvořadou úlohu; 2. *synthetickou* teorii ekvivalencí ostatních tří autorů, ve které prvořadou úlohu hrají samy ekvivalence, zatím co prvky základní množiny hrají jen podružnou úlohu, a kde algebraické metody teorie svazů se lépe uplatňují jako takové. Je ostatně samozřejmé, že toto rozlišování analytické a synthetické teorie ekvivalencí, čemuž odpovídá rozlišování „lokální" a „globální" teorie ve smyslu Borůvkově, nelze bráti zcela absolutně, neboť na jedné straně existují v Borůvkově teorii četné „svazově-teoretické" konstrukce a na druhé straně četné vlastnosti svazu ekvivalencí závisí podstatně na vlastnostech rozkladů, jež určují v (na) základní množině.

Recensovaná kniha Borůvkova obsahuje velmi jasný a úplný výklad těchto vztahů z hlediska analytické teorie ekvivalencí, s aplikacemi na teorii grupoidů. Opírá se o dvě starší česká vydání *Úvodu do teorie grup* téhož autora a je rozdělena do tří kapitol: I. *Množiny*, II. *Grupoidy*, III. *Grupy*, jejichž přehled nyní uvedeme.

První kapitola obsahuje výklad základů analytické teorie ekvivalencí. Nejprve jest ukázáno, že množina $\mathfrak{T}$ všech rozkladů na základní množině E tvoří svaz vzhledem k relaci částečného uspořádání $\overline{A} \geqq \overline{B}$ definované vztahem „$\overline{B}$ je jemnější než $\overline{A}$", tj. kdy ke každému $\overline{a} \in \overline{A}$ existují $\overline{b} \in \overline{B}$ tak, že $\overline{a} = \bigcup \overline{b}$, kde $\bigcup$ je sjednocení ve smyslu teorie množin. Dále se definují různé třídy rozkladů jako např. rozklady *polospřažené* a *spřažené*, *adjungované*, *modulární* a konečně rozklady *doplňkové*, kterýžto pojem souvisí s pojmem permutovatelných ekvivalencí. Dokazuje se mj. následující základní vlastnost: *Jestliže rozklady* $\overline{A}$, $\overline{B} \in \mathfrak{T}$ *jsou doplňkové, pak* $\overline{B}$ *je modulární vzhledem k rozkladům* $\overline{X}$, $\overline{A} \in \mathfrak{T}$, *kde* $\overline{X} \geqq \overline{A}$; to znamená, že v tomto případě máme $\overline{A} \vee (\overline{B} \wedge \overline{X}) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \wedge \overline{X}$, kde $\vee$ a $\wedge$ jsou operace spojení a průseku (neboli nejmenší společný zákryt a největší společné zjemnění) svazu $\mathfrak{T}$. Šestý paragraf první kapitoly je věnován teorii zobrazení jedné množiny do druhé; jsou definovány hlavní druhy zobrazení a jsou uvedeny jejich základní vlastnosti (asociativní zákon o skládání zobrazení, věty o ekvivalenci jistých rozkladů, atd.). Toto vše je aplikováno na zobrazení rozkladů množin a je udáno mj. velmi jednoduché a velmi elegantní kritérium pro to, aby v zobrazení φ množiny E na E^* byl obrazem $\varphi\overline{A}$ rozkladu $\overline{A}$ na E opět rozklad na E^*: *K tomu je totiž nutné a stačí, aby rozklad* $\overline{A}$ *a rozklad* $\overline{E}$ *množiny* E, *určený „vzory" prvků* E^* *byly doplňkové.* Osmý paragraf obsahuje elementy klasické teorie permutací, kdežto devátý paragraf přináší v podstatě některé údaje o binárních reflexivních a transitivních vztazích (relace *kvasi-uspořádání*), které autor nazývá kongruencemi. Poslední paragraf této kapitoly (§ 10) je věnován teorii řad rozkladů a jejich Zassenhausových zjemnění, zvláště v souvislosti s vlastnostmi polospřaženosti a spřaženosti, modularity a komplementarity. Údaje o aplikacích těchto teorií na teorii vědeckých klasifikací viz J. ŠKRÁŠEK: *Application de méthodes mathématiques à la théorie des classifications*, Spisy přírodověd. fak. Mas. univ., č. 316 (1949), 39 stran.

V druhé kapitole je rozvíjena teorie grupoidů, v níž hlavní úlohu hrají pojmy faktoroidu (zavedeného autorem) a homomorfismu (jejž autor nazývá *deformací*). *Grupoid* je prostě neprázdná množina, na níž je definováno (jednoznačné) násobení. Nepožaduje se přitom ani asociativita ani komutativita. Jsou zavedeny pojmy *podgrupoidu* a *ideálu* (*levého* a *pravého*) daného grupoidu, jakož i základní pojem homomorfismu, jehož nejjednodušší vlastnosti jsou pak studovány v paragrafech 12 a 13. To zcela přirozeně vede k pojmu *vytvořujícího rozkladu* grupoidu (§ 14), který je definován též přímo, nezávisle na pojmu homomorfismu. S ním spojené ekvivalence jsou regulárními ekvivalencemi ve smyslu Dubreilově. Pojem vytvořujícího rozkladu je předobrazem pojmu faktoroidu, jenž je definován takto: *Faktoroidem* grupoidu $\mathcal{G}$ je grupoid, jehož prvky jsou prvky $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$, některého vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ grupoidu $\mathcal{G}$ a v němž je (jednoznačné) násobení definováno vztahem: $\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}$ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A})$, přičemž $\overline{ab} \subseteq \bar{c}$, kde součin $\overline{ab}$ je jako obvykle množina všech součinů $xy \in \mathcal{G}$ takových, že $x \in \bar{a}$, $y \in \bar{b}$. Význam pojmu faktoroidu v teorii grupoidů spočívá v tom, že tvoří přirozené a přitom dalekosáhlé zobecnění klasického pojmu faktorgrupy z teorie grup. Autor studuje některé vlastnosti faktoroidů (svaz faktoroidů na $\mathcal{G}$, modulární a doplňkové faktoroidy, atd.) a potom (v § 16) homomorfismy faktoroidů, což ho mj. přivádí k formulování a důkazu tří vět o isomorfismech faktoroidů, jež tvoří zobecnění odpovídajících vět o isomorfismech v teorii grup. Takto pak dochází k pojmu řad faktoroidů (§ 17); jejich teorii rozvíjí autor souběžně s teorií řad rozkladů (kap. I, § 10). Kapitolu uzavírá popis některých velmi důležitých příkladů grupoidů, např. pologrup a svazů.

Třetí kapitola je věnována základům teorie grup, kterou autor rozvíjí na základě své teorie rozkladů množin a grupoidů. Dostává tak velmi výstižný pohled na vzájemné vztahy mezi vlastnostmi (levých a pravých) tříd v grupách, normálních dělitelů, faktorgrup a jejich isomorfismů, atd. Tím dospívá mj. k elegantním zobecněním klasických vět, např. následující autorově větě o isomorfismech:

Buďtež $\{A_i, i \in I\}$ *a* $\{B_i, i \in I\}$ *dvě množiny podgrup v grupě* $\mathcal{G}$ (I je libovolná neprázdná množina indexů), *takové, že pro každé* $i \in I$ *je* B_i *normálním dělitelem* A_i. *Potom položíme-li* $S = \bigcap_{i \in I} A_i$ *a je-li* U *takový normální dělitel* S, *že* $U \supseteq \bigvee_{i \in I} (S \cap B_i)$, *jsou všechny faktorgrupy* $(S \vee B_i)/(U \vee B_i)$, $i \in I$, *navzájem isomorfní.* (Sr v. O. Borůvka: *Teorie rozkladů v množině*, Spisy přírodov. fak. Mas. univ., č. 278 (1946), 1—37.) Věta o pěti grupách je toho speciálním případem.

Kapitola končí paragrafem, kde se pojednává o cyklických grupách.

Četná cvičení, z nichž mnohá obsahují doplňky teorie, a bohatá bibliografie, umožňují čtenáři, aby se přesvědčil, zda všemu dobře porozuměl a rozšířil si získané znalosti. Podrobný obsah, soupis klasických i moderních monografií o teorii grup a abecední rejstřík jmenný i věcný doplňují knihu, jež jako úvod do teorie grup velmi dobře poslouží začátečníkům, k nimž se obrací především, a v níž i odborník, který si chce prohloubit své znalosti analytické teorie ekvivalencí, nalezne mnoho zajímavého.

Michail Benado, Bukurešť

ARCHIVE FOR HISTORY OF EXACT SCIENCES. Edited by C. Truesdell. Volume 1, Number 1, str. 106, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 28. 9. 1960.

Dějiny matematicko-fysikálních věd jsou jednou z nejvíce rozpracovaných oblastí z dějin věd. Přece však všechny dosavadní pokusy o speciální periodickou publikaci z tohoto oboru neměly trvalého výsledku. V současné době má nejdelší tradici sovětský sborník „Историко-математические исследования", vycházející pravidelně od r. 1948; neklade si však nikterak za úkol představovat mezinárodní orgán, ačkoli v posledních letech se zde množí články autorů z lidově-demokratických zemí. Za této situace je nutno uvítat prvé číslo nové periodické publikace, věnované dějinám exaktních věd. Nová publikace má několik zajímavých rysů. Především chce být skutečně mezinárodním orgánem. O reálnosti tohoto úsilí svědčí již samo složení redakční rady. Podařilo se v ní soustředit skutečně čelné představitele dějin matematicko-fysikálních oborů z různých zemí.

Mezi jejími členy nalezneme B. L. van der Waerdena, D. J. Struika, V. Ronchiho, A. Koyré, W. Hardtnera aj. Málo početně jsou však zastoupeny socialistické země; přece však členství A. P. Juškeviče v redakční radě dává tušit, že vydavatelé mají zájem na skutečné mezinárodní spolupráci. Články mohou vycházet anglicky, francouzsky, italsky, latinsky a španělsky. O ruštině není ani zmínky. Zdá se, že redakční rada nebude pracovat jako orgán, nýbrž autoři mohou stať zaslat libovolnému členu redakční rady, který podle svého názoru může ji doporučit k otištění hlavnímu redaktoru. Tuto funkci zastává v Archivu C. Truesdell, badatel zabývající se dějinami mechaniky v 18. století a podílející se na komentářích především hydrodynamických statí v sebraných spisech Eulerových. Vlastní péči o vydavatelskou práci převzalo nakladatelství Springer. Prozatím není známo, v jakých lhůtách budou vycházet jednotlivá čísla. V nakladatelských informacích je jen poznamenáno, že vždy pět sešitů bude vytvářet svazek.

V prvém čísle časopisu jsou zahrnuty pouze dvě stati dosti odlišné thematiky a charakteru. V prvé (str. 3—36) se redaktor časopisu Truesdell snaží objasnit problematiku, jejíž zpracování umožní podat hlubší obraz vývoje teoretické mechaniky v době ohraničené vydáním Newtonových Principií (1687) a Lagrangeovou Méchanique analytique (1788). Zdůrazňuje přitom zejména ty otázky, které byly podnětněji rozpracovány v historických studiích v nedávné době; mezi ně patří především zpracování mechaniky systému hmotných bodů, jak se rozvíjela v 18. století a která většinou navazovala na thematiku, stojící na okraji vlastního díla Newtonova a souvisící s objasňováním pojmu „pevné těleso", se zájmem o mechaniku kapalin atd. V této souvislosti věnuje také pozornost podnětům pro vývoj matematického aparátu mechaniky, aniž by jej však podrobil podrobnějšímu rozboru. Přehledný článek Truesdellův je bezesporu podnětný, a jak upozorňuje redakční poznámka, je prvním ze série článků různých autorů, které budou ukazovat současný stav bádání v různých oblastech dějin věd. I když je možné vůči jednotlivým Truesdellovým tvrzením vyslovit řadu pochybností (např. opomíjení významu experimentální práce 18. stol. pro rozvoj těch partií mechaniky, které jsou málo dotčeny Newtonovým spisem), je ho nutno jen uvítat. Jeho vliv na další rozvoj bádání by však možná byl větší, kdyby alespoň v poznámkách ukázal na současnou historickou literaturu a hodnotil její přínos; tím by sice byl poněkud narušen čtivý, esejistický styl práce, ale pomohlo by to čtenáři v další orientaci v problematice.

V druhém článku (str. 36—106) maďarský historik A. Szabó se zabývá vznikem eukleidovského axiomatického systému. Tato práce je jednou z řady studií, kterou Szabó v posledních letech v nejrůznějších časopisech uveřejnil z této thematiky. Snažil se v nich z různých hledisek dokázat thesi, že deduktivní metoda starořecké matematiky vznikla pod přímým vlivem nebo dokonce jako důsledek eleatské filosofie; odmítá tedy v historicko-matematické literatuře opakované tvrzení o rozhodujícím vlivu Platóna či Aristotela. Ve studii uveřejněné v Archivu postupuje A. Szabó převážně metodou dosud málo obvyklou v dějinách věd; snaží se totiž svoji thesi dokreslit podrobným linguistickým rozborem a vyvodit eukleidovskou terminologii z dřívějších řeckých textů. Hlavní pozornost věnuje problematice spojené se vznikem termínu a pojmu „hypotheseis" a „axioma". Zdá se, že rozbor, který je v článku prováděn velmi podrobně a důkladně, leží mimo pochybnosti. Problematickou je spíše sama metoda, neboť není přesvědčivě ukázáno, jak může lingvistický rozbor potvrdit více než existenci jisté terminologické příbuznosti, při níž — kromě jiných momentů — zůstává neurčen i směr vzájemného ovlivnění. Proto správnost či nesprávnost Szabóových závěrů může být diskutována jen na základě ostatních statí autora, které zde neshrnuje, nýbrž doplňuje rozborem jedné stránky materiálu.

Bylo by jistě předčasné soudit o celkovém charakteru tohoto časopisu. Přichází v příhodnou dobu, kdy ve světě vzrůstá zájem o dějiny věd, který vede k zakládání celé řady odborných časopisů (např. italská *Physis*, německý *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik u. Medizin*). Kromě hospodářských otázek, které budou pro nakladatelství Springer jistě rozhodující (ostatní časopisy pro dějiny věd jsou vydávány většinou různými společnostmi), bude závažný především směr, který hlavní redaktor časopisu vtiskne. Složení redakční rady mu může práci jistě usnadnit.

Luboš Nový, Praha

Oskar Perron: IRRATIONALZAHLEN. Berlin 1960, nakl. Walter de Gruyter et Co. (Göschen's Lehrbücherei, Band 1), 4. vydání, str. 6 + 202, cena neudána.

Perronova kniha je určena především studujícím matematiky. O její hodnotě a oblíbenosti svědčí to, že vychází už ve čtvrtém rozšířeném vydání (jednotlivá vydání vyšla v létech 1921, 1939 a 1947). Obsah knihy je rozdělen do šesti kapitol.

V první kapitole shrnuje autor nejprve známé vlastnosti racionálních čísel, tj. uspořádání, čtyři základní početní operace a Archimédovu větu (zákony I—XXI) a glosuje tyto zákony řadou poznámek. Hned pak zavádí pojem Dedekindova řezu v množině racionálních čísel, rozděluje řezy na řezy prvního, druhého a třetího druhu a na příkladech ilustruje jejich existenci. Vyloučí z dalších úvah řezy druhého druhu a pro zbývající řezy prvního a třetího druhu definuje opět uspořádání a čtyři základní početní operace. Ukazuje, že pro aritmetiku řezů platí rovněž zákony I—XXI, tj. aritmetika racionálních čísel, takže řezem třetího druhu může definovat iracionální číslo. Nyní už jen zavádí v nově vzniklé množině reálných čísel pojem absolutní hodnoty. V závěru první kapitoly autor precizně geometrisuje některé z probraných pojmů zavedením číselné osy, na na níž ukazuje zejména uspořádání čísel a měření úseček. Škoda jen, že tato důležitá a mnoha autory, bohužel, často opomíjená část, není doplněna alespoň několika názornými ilustracemi.

Druhou kapitolu uvádí autor definicemi omezené resp. shora omezené resp. zdola omezené číselné množiny a dokazuje pro tyto množiny větu o infimu a o supremu. Uvádí základní dvě vlastnosti infima a suprema a jejich pomocí dokazuje, že v množině reálných čísel neexistuje řez třetího druhu. Množinu reálných čísel tedy nelze rozšířit způsobem, jakým byla rozšířena množina čísel racionálních, takže množina reálných čísel tvoří kontinuum. Dále definuje pojem hromadného bodu množiny (důsledně zde používá termínu „Häufungszahl" resp. „Häufungspunkt" pro číselné resp. bodové množiny) a dokazuje Weierstrassovu větu o hromadných bodech nekonečných omezených množin. V další části této kapitoly se autor odchyluje od tradičně metodického postupu a zavádí pro číselné posloupnosti nejprve pojmy limes superior a limes inferior (včetně nevlastních veličin), ukazuje některé vlastnosti těchto čísel (věty 14 až 16) a teprve pak zavádí pojem limity posloupnosti jako speciální případ, kdy $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. V dalších úvahách pak seznamuje čtenáře s počítáním s posloupnostmi a jejich limitami. Studium posloupností uzavírá Bolzano-Cauchy-Cantorovým kritériem pro konvergenci posloupností a přechází k nekonečným součtům a součinům, pro něž definuje pojem konvergence a divergence, a tyto pojmy ilustruje řadou příkladů. Druhou kapitolu uzavírá velmi cenným historickým přehledem (k prvním dvěma kapitolám), kde porovnává některé přednosti i nevýhody jednotlivých způsobů zavedení iracionálních čísel: Dedekindovou teorií řezů, Bachmannovou teorií dvojic posloupností racionálních čísel

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \end{pmatrix},$$

kde posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, posloupnost $\{b_n\}$ klesající, $b_n - a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, a konečně Cantorovou teorií fundamentálních posloupností.

Třetí kapitola, nazvaná mocnina a logaritmus, se liší od obvyklého kursovního zpracování této látky pouze v tom, že obsahuje popis metody užívané při tabelování přirozených logaritmů (§ 24) a rozvoj exponenciální funkce v nekonečnou mocninnou řadu s odhadem chyby pro libovolné reálné číslo x (§ 26).

Čtvrtá kapitola má název různá vyjádření iracionálních čísel. Úvodní část této kapitoly věnuje autor systematickým zlomkům.

Budiž $p > 1$ přirozené číslo. Potom každé reálné číslo γ_0 lze právě jedním způsobem vyjádřit ve tvaru p-adického zlomku

$$\gamma_0 = c_0 + 0, c_1 c_2 c_3 \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu p^{-\nu} . \tag{1}$$

Celá čísla $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ dostaneme pomocí p-adického algoritmu, přičemž platí

$$0 \leqq c_\nu \leqq p - 1 \quad \text{pro} \quad \nu \geqq 1$$

a

$$c_\nu \leqq p - 2 \text{ pro nekonečně mnoho hodnot } \nu .$$

Naopak každý p-adický zlomek (1) *představuje jisté reálné číslo.*

Zmíněný p-adický algoritmus je speciálním případem algoritmu Cantorova, který bude popsán dále.

Další způsob vyjádření reálného čísla je pomocí řetězového zlomku. V obvyklé symbolice značí

$$[b_0] = b_0 , \quad [b_0, b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1} , \quad [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n] = b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, \ldots, b_n]} ,$$

tj.

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}} .$$

K numerickému vyčíslení řetězového zlomku je vhodné užít pomocných veličin A_ν a B_ν definovaných vztahy

$$A_{-2} = 0 , \quad A_{-1} = 1 , \quad B_{-2} = 1 , \quad B_{-1} = 0 ,$$
$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2} , \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 0) .$$

Pro $(n + 1)$-členný řetězec pak platí $[b_0, b_1, \ldots, b_n] = A_\nu / B_\nu$. Na základě tohoto vztahu dokazuje autor větu:

Je-li pro $\nu \geqq 1$ $b_\nu \geqq 1$, nekonečný řetězový zlomek $[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$ konverguje.

V dalším pak užívá už jen řetězových zlomků s celými b_ν a pomocí Euklidova algoritmu konstruuje k libovolnému reálnému číslu ξ_0 řetězový zlomek. Je-li b_0 největší celé číslo nepřevyšující ξ_0, definuje pro necelá ξ_0 číslo ξ_1 rovností $\xi_0 = b_0 + 1/\xi_1$. Obecně, není-li ξ_ν celé číslo a je-li b_ν rovno celé části čísla ξ_ν, definuje $\xi_{\nu+1}$ vztahem $\xi_\nu = b_\nu + 1/\xi_{\nu+1}$; je-li naopak ξ_ν celé, řetězec končí číslem $b_\nu = \xi_\nu$. Pro $\nu \geqq 1$ je zřejmě $\xi_\nu > 1$ a $b_\nu \geqq 1$. Dojdeme tak buďto ke konečnému řetězci ($b_n = \xi_n, b_\nu = \xi_\nu = 0$ pro $\nu > n$), nebo lze s uvedeným algoritmem pokračovat bez omezení a dospíváme k nekonečnému řetězci. Takové řetězové zlomky se nazývají pravidelné. Platí pak věta:

Každé necelé reálné číslo ξ_0 se dá vyjádřit jediným způsobem jako pravidelný konečný (*nejméně dvoučlenný*) *nebo nekonečný řetězový zlomek za předpokladu, že v případě konečného řetězce* $[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n]$ *je* $b_n \geqq 2$. *Naopak každý takový řetězový zlomek představuje reálné číslo, které je racionální právě tehdy, je-li řetězec konečný.*

V další části této kapitoly vyšetřuje autor nekonečné periodické řetězové zlomky, tj. zlomky tvaru

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}] =$$
$$= [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, \ldots]$$

a dokazuje, že každý periodický řetězový zlomek představuje kvadratickou iracionalitu (tj. iracionální kořen kvadratické rovnice s racionálními koeficienty) a naopak, každé takové číslo se dá vyjádřit nekonečným periodickým řetězovým zlomkem. Jako další příklad na užití řetězových zlomků uvádí rozvoj čísla e v nekonečný řetězec,

(2) $$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots] = = [2, \overline{1, 2\lambda, 1}]_{\lambda=1}^{\infty} .$$

Jiný způsob vyjádření reálného čísla je pomocí tzv. Cantorovy řady: *Je-li* $\{p_\nu\}$ *libovolně daná posloupnost přirozených čísel* $p_\nu \geqq 2$, *lze každé reálné číslo* γ_0 *psát právě jedním způsobem ve tvaru*

(3) $$\gamma_0 = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{p_1 p_2 \ldots p_\nu},$$

kde c_ν $(\nu \geqq 0)$ *jsou celá čísla vyhovující nerovnostem* $0 \leqq c_\nu \leqq p_\nu - 1$ *pro* $\nu \geqq 1$ *a* $c_\nu \leqq p_\nu - 2$ *pro nekonečně mnoho hodnot* ν. *Naopak, každá taková řada konverguje a její součet představuje reálné číslo.*

Koeficienty c_ν dostaneme pomocí tzv. Cantorova algoritmu: c_0 je celá část čísla γ_0; definujme pak číslo γ_1 rovností $\gamma_0 = c_0 + \gamma_1/p_1$. Pro $\nu \geqq 1$ bude obecně c_ν celou částí čísla γ_ν a pro $\gamma_{\nu+1}$ platí $\gamma_\nu = c_\nu + \gamma_{\nu+1}/p_{\nu+1}$, tj. $0 \leqq c_\nu < p_\nu$ pro $\nu \geqq 1$.

Cantorovy řady představují zobecnění p-adických zlomků. Je-li totiž $p_\nu = p \geqq 2$ pro všechna $\nu \geqq 1$, přechází Cantorova řada (3) v p-adický zlomek (1).

Budiž nyní dána libovolná posloupnost přirozených čísel $\{r_\nu\}$ a nechť γ je libovolné reálné číslo. Zvolme celé číslo c tak, aby platilo $c < \gamma \leqq c + 1$, a položme $\gamma = c + 1/\alpha_1$. Zřejmě bude $\alpha_1 \geqq 1$; nechť q_1 je celé číslo vyhovující nerovnostem $q_1 - 1 \leqq \alpha_1 < q_1$ (tedy $q_1 > \alpha_1 \geqq 1$, tj. $q_1 \geqq 2$). Definujme nyní číslo α_2 vztahem

$$\alpha_2 = r_1 \frac{\alpha_1}{q_1 - 1} \cdot \frac{1}{q_1 - \alpha_1}.$$

Bude zřejmě $\alpha_2 \geqq r_1$. Pokračujeme-li takto dále, můžeme definovat pro $\nu \geqq 2$ celá čísla q_ν tak, že platí $q_\nu \geqq r_{\nu-1} + 1$, $q_\nu - 1 \leqq \alpha_\nu < q_\nu$; kromě toho položme

$$\alpha_{\nu+1} = r_\nu \frac{\alpha_\nu}{q_\nu - 1} \cdot \frac{1}{q_\nu - \alpha_\nu} \quad (\geqq r_\nu) .$$

Autor dokazuje platnost vztahu

(4) $$\gamma = c + \frac{1}{q_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_1 r_2 \ldots r_\nu}{q_1(q_1 - 1)\, q_2(q_2 - 1) \ldots q_\nu(q_\nu - 1)} \cdot \frac{1}{q_{\nu+1}} .$$

Je-li speciálně $r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu = \ldots = 1$, dostaneme Lürothovu řadu

(5) $$\gamma = c + \frac{1}{q_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_1(q_1 - 1)\, q_2(q_2 - 1) \ldots q_\nu(q_\nu - 1)} \cdot \frac{1}{q_{\nu+1}} .$$

Podobně pro $r_\nu = q_\nu - 1$ dostaneme řadu Engelovu

(6) $$\gamma = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_\nu}$$

a konečně pro $r_\nu = q_\nu(q_\nu - 1)$ řadu Sylvesterovu

(7) $$\gamma = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu} .$$

Dokazuje pak, že platí:

Libovolné reálné číslo γ lze rozvinout právě jedním způsobem v Lürothovu řadu (5), kde c a $q_\nu \geqq 2$ ($\nu \geqq 1$) jsou celá čísla, a naopak, každá taková řada konverguje. Číslo γ je pak racionální tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost $\{q_\nu\}$ periodická.

Podobně *libovolné reálné číslo γ lze rozvinout právě jedním způsobem v Engelovu řadu (6) resp. Sylvesterovu řadu (7), kde c a q_ν ($\nu \geqq 1$) jsou celá čísla a $q_1 \geqq 2$, $q_{\nu+1} \geqq q_\nu$ ($\nu \geqq 1$) resp. $q_1 \geqq 2$, $q_{\nu+1} \geqq q_\nu(q_\nu - 1) + 1$ ($\nu \geqq 1$). Naopak každá řada tvaru (6) resp. (7) konverguje. Číslo γ je pak racionální tehdy a jen tehdy, platí-li pro všechna dostatečně velká ν vztah $q_{\nu+1} = q_\nu$ resp. $q_{\nu+1} = q_\nu(q_\nu - 1) + 1$.*

V závěru této kapitoly se autor zabývá Cantorovými součiny a dokazuje:

Každé reálné číslo $\alpha_0 > 1$ lze právě jedním způsobem rozvinout v nekonečný Cantorův součin

$$\alpha_0 = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{q_\nu}\right), \tag{8}$$

kde q_ν jsou přirozená čísla, která nejsou vesměs rovna jedné a pro něž platí $q_{\nu+1} \geqq q_\nu^2$. Naopak, každý takový součin konverguje. Jeho hodnota je racionální tehdy a jen tehdy, platí-li pro všechna dostatečně velká ν rovnost $q_{\nu+1} = q_\nu^2$.

Koeficienty q_ν vyhledáme pomocí tohoto algoritmu: q_0 je celé číslo vyhovující nerovnostem

$$q_0 \leqq \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} < q_0 + 1 \quad \text{a} \quad \alpha_1 = \frac{q_0}{q_0 + 1}\alpha_0 \quad (> 1)\,.$$

Obecně q_ν je celé číslo, pro něž je

$$q_\nu \leqq \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu - 1} < q_\nu + 1$$

a

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{q_\nu}{q_\nu + 1}\alpha_\nu \quad (> 1)\,.$$

Pátá kapitola je věnována aproximaci iracionálních čísel čísly racionálními. Autor hned na počátku kapitoly dokazuje, že platí:

Je-li $0 < c \leqq \sqrt{5}$, lze pro libovolné iracionální číslo ξ najít nekonečně mnoho zlomků p/q ($q > 0$), pro něž platí

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}\,. \tag{9}$$

Poněvadž jmenovatel zlomku p/q lze tedy zvolit větší než libovolně předem dané číslo, lze výraz na pravé straně nerovnosti (9) učinit libovolně malý.

Je-li však $c > \sqrt{5}$, existují iracionální čísla ξ taková, že nerovnost (9) má nejvýše konečný počet řešení p/q. Takové číslo je např. $\xi = (\sqrt{5} + 1)/2$.

Je tedy nasnadě, že konstanta c v nerovnosti (9) může být jakousi „mírou" (ovšemže zatím velmi hrubou) pro iracionalitu čísla ξ.

Nyní autor zobecňuje uvedené věty na případ simultánní aproximace několika reálných čísel: *Jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná reálná čísla, existuje nekonečně mnoho systémů*

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}$$

(tj. systémů s libovolně velkým jmenovatelem $q > 0$) tak, že

$$\left| \xi_\nu - \frac{p_\nu}{q} \right| < \frac{1}{q \sqrt[n]{q}} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) . \tag{10}$$

Nyní jde opět o to, zda lze pravé strany nerovností (10) nahradit výrazy $1/(cq \sqrt[n]{q})$, kde $c > 1$, tak, že systém nerovností (10) bude mít řešení pro q větší než libovolné předem dané číslo. Zde se autor omezuje na konstatování, že Minkowski dokázal, že např. může být $c = (n + 1)/n$, a odkazuje na literaturu zabývající se touto otázkou.

Jsou-li čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ racionální, nazývá se číslo $\xi = r_1\xi_1 + r_2\xi_2 + \ldots + r_n\xi_n$ racionálně závislé na $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Existují-li celá čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, která nejsou současně všechna rovna nule, tak, že platí $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n = 0$, nazývají se čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ racionálně závislá. V opačném případě hovoříme o číslech racionálně nezávislých.

Autor se pak všímá simultánní aproximace systému $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, v němž je právě $m \leqq n$ racionálně nezávislých čísel, zostřuje pro tento případ vztah (10) a obrací pak pozornost k homogenním diofantickým aproximacím. Dokazuje, že platí:

Je-li t libovolné přirozené číslo a $\xi_{\nu\mu}$ $(1 \leqq \mu \leqq m; 1 \leqq \nu \leqq n)$ libovolná reálná čísla, existuje vždy alespoň jeden systém celých čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tak, že

$$\left| \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\nu\mu} x_\mu - y_\nu \right| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) ;$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} |x_\mu| > 0 ; \quad |x_\mu| \leqq t^{n/m} \quad (1 \leqq \mu \leqq m) .$$

Pro $m > n$ lze dokonce klást $y_\nu = 0$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ a platí pak věta:

Budiž t libovolné přirozené číslo a nechť $m > n$. Potom existuje kladná konstanta C a alespoň jeden systém celých čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tak, že

$$\left| \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\nu\mu} x_\mu \right| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) ;$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} |x_\mu| > 0 ; \quad |x_\mu| < C t^{n/(m-n)} \quad (1 \leqq \mu \leqq m) .$$

Za konstantu C lze např. zvolit

$$C = \prod_{\nu=1}^{n} (2c_\nu + 1)^{1/(m-n)} ,$$

kde

$$c_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} |\xi_{\nu\mu}| \quad (1 \leqq \nu \leqq n) .$$

V dalším se autor zabývá jednoduchým případem nehomogenní lineární diofantické aproximace, definuje pak pojem řádu racionality lineárních forem a po několika větách pomocného charakteru přechází k obecnému případu lineárních nehomogenních diofantických aproximací. Dokazuje známou Kroneckerovu větu a uvádí dva její speciální případy. Pro další studium knihy je důležitý tento případ (věta 65):

Nechť $1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jsou racionálně nezávislá čísla, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ libovolná reálná čísla. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje systém $n + 1$ celých čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ tak, že platí

$$|\xi_\nu x_{n+1} - x_\nu - \eta_\nu| < \varepsilon \quad (1 \leqq \nu \leqq n) . \tag{11}$$

Jsou-li naopak čísla $1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ racionálně závislá tak, že mezi nimi platí právě $n - r$ vztahů

$$b_k + \sum_{\nu=1}^{n} b_{k\nu} \xi_\nu = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n - r) ,$$

přičemž b_k a $b_{k\nu}$ $(1 \leqq k \leqq n - r)$ jsou celá čísla, je nutnou a postačující podmínkou pro splnění nerovností (11) *(při libovolném kladném ε), aby platilo*

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{k\nu}\eta_\nu = b_k g + \sum_{\nu=1}^{n} b_{k\nu} g_\nu ,$$

kde g a g_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ jsou opět celá čísla.

Závěr páté kapitoly je věnován otázkám stejnoměrného rozložení v n-rozměrném prostoru.

Buďte $1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ racionálně nezávislá čísla, $\alpha_\nu \geqq 0$ a η_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ libovolná reálná čísla a t libovolné přirozené číslo. Nechť $N(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t)$ značí počet systémů celých čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ (tj. mřížových bodů v $(n+1)$-rozměrném prostoru) splňujících nerovnosti

$$0 < x_{n+1} \leqq t\,; \quad \eta_\nu \leqq \xi_\nu x_{n+1} - x_\nu < \eta_\nu + \alpha_\nu \quad (1 \leqq \nu \leqq n)\,.$$

Potom platí

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} N(\eta_1, \ldots, \eta_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) = \prod_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\,.$$

V poslední, šesté kapitole, se autor zabývá některými základními otázkami, které se týkají algebraických a transcendentních čísel.

Číslo ξ se nazývá *algebraické*, existuje-li přirozené číslo n tak, že čísla $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n$ jsou racionálně závislá. Nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností pak udává stupeň algebraického čísla ξ. Číslo, které není algebraické, se nazývá transcendentní.

Pak platí: *Je-li $n > 1$ a ξ algebraické číslo n-tého stupně, existuje pouze konečný počet racionálních čísel g/h $(h > 0)$ splňujících nerovnost $|\xi - g/h| < 1/h^{n+1}$.*

Iracionální *číslo ξ* se nazývá *Liouvilleovo*, existuje-li ke každému přirozenému číslu λ racionální číslo g_λ/h_λ tak, že platí

$$h_\lambda > 1 \quad \text{a} \quad \left|\xi - \frac{g_\lambda}{h_\lambda}\right| < \frac{1}{h_\lambda^\lambda}\,.$$

Snadno se dokáže, že *Liouvilleova čísla jsou transcendentní.*

Jsou-li p_ν a q_ν $(0 \leqq \nu \leqq m)$ celá čísla a je-li

$$\eta = \frac{p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2 + \ldots + p_m\xi^m}{q_0 + q_1\xi + q_2\xi^2 + \ldots + q_m\xi^m}\,,$$

platí: Je-li ξ algebraické resp. transcendentní resp. Liouvilleovo číslo, je i η algebraické resp. transcendentní resp. Liouvilleovo.

Poslední dva paragrafy této kapitoly jsou věnovány důkazu transcendentnosti čísla e a π.

Závěrem lze říci, že tematika knihy je velmi bohatá a její obsah dobře poslouží nejenom studentu, ale i matematikovi, jehož pracovní obor je teorii iracionálních čísel vzdálen.

Alois Apfelbeck, Praha

Jiří Sedláček: NEBOJTE SE MATEMATIKY. Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960, 172 stran, 68 obrázků, cena 5,50 Kčs.

Tato knížka vyšla jako 17. svazek I. řady Polytechnické knižnice Čs. společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí. Je určena žákům středních všeobecně vzdělávacích škol a odborných škol, jakož i široké veřejnosti. Náplní této knížky je tzv. rekreační matematika. Čtenář se zde setkává s řadou rozřešených jednoduchých hříček, které jednak mu mají zpříjemnit volný čas, jednak ho mají přivést k vážnějšímu zájmu o matematiku. Knížka totiž velmi pěkně ukazuje, že mnohé hříčky s rekreační tématikou nejsou samoúčelné, ale že vedou k vážným problémům důležitým v aplikacích matematiky.

Vladimír Doležal, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Adolf Vacek: DÍLENSKÉ A POČETNÍ TABULKY. Sv. 1, Kurs technických znalostí. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1961. Stran 104, tabulek 27, obr. 73, cena brož. výt. Kčs 5,—.

Tato knížka obsahuje stručný výběr základních početních a technických tabulek a norem ČSN pro pracující v kovoprůmyslu. Je určena pro učně, dělníky, mistry, dílenské techniky a studenty odborných škol.

*

Imre Pál: DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA VIDENÁ PRIESTOROVE. Z maďarštiny přeložila *Jelena Frecerová*, vydalo Slovenské vydavateľstvo technickej literatury, Bratislava-Budapest 1960, 200 stran, 284 + 235 obrázků, 2 tabulky, cena váz. výtisku Kčs 19,—.

Kniha obsahuje obvyklé partie deskriptivně geometrické, probírané jednak na středních školách, jednak v různých odborných kursech technického směru. Obrazy prostorových útvarů jsou v celé knize doprovázeny anaglyfy. Kniha je určena především pro studenty uvedených škol a kursů, ale také pro zájemce, kteří studují deskriptivní geometrii individuálně nebo dálkově. Zevrubnou recensi maďarského originálu knihy najde čtenář v našem časopise, roč. 85 (1960), str. 373—375.

Redakce