Časopis pro pěstování matematiky

Ján Jakubík

К теории частично упорядоченных групп

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 318--330

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117381

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

К ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 24/IV 1960 г.)

В настоящей статье содержится решение некоторых вопросов теории частично упорядоченных групп. Дело касается вопросов, находящихся в связи с проблематикой, разработанной в работах [3], [9], [14]. Для частично упорядоченных групп пользуемся обозначениями, принятыми в работе [5], гл. 14.

1. Пусть M — непустое множество. Пусть для каждого $i \in M$ G_i является l-группой. Множество всех функций f, определенных на M так, что для $i \in M$ $f(i) \in G_i$, обозначим через $\overline{G}$. Для $f, g \in \overline{G}$ положим $f_0\, g = h$, где $h(i) = f(i)_0\, g(i)$ для каждого $i \in M$, причем $_0$ означает любую из операций $+, \cap, \cup$. Тогда $\overline{G}$ является l-группой. Если G' означает l-подгруппу в $\overline{G}$, то через $G'(i)$ обозначим множество всех $x \in G_i$, к которым можно найти $f \in G'$ так, что $f(i) = x$. Мы скажем, что G' является полупрямым произведением l-групп G_i $(i \in M)$, если для каждого $i \in M$ $G'(i) = G_i$. (Сравни [5], стр. 91). В отделах $1-7$ предполагаем, что G' является полупрямым произведением упорядоченных групп G_i, $i \in M$. Если будет $\emptyset \neq N \subset M$, то через G'_N обозначим множество всех $f \in G'$, для которых из соотношения $i \in M - N$ следует $f(i) = 0$. В работе [14] ввел Ф. Шик следующие понятия, касающиеся полупрямых произведений: G' есть полупрямое произведение типа α, если для каждого $i \in M$

$$G'_{\{i\}} \neq \{0\}\,. \tag{1}$$

G' есть типа β, если ни для какого i не имеет места (1). G' является полупрямым произведением типа α, соотв. β, по составляющей G_i, если для данного i имеет, соотв. не имеет, место соотношение (1). G' является вполне полупрямым произведением, если для каждого i и для каждого $x \in G_i$ выполняется следующее: существует $f \in G'_{\{i\}}$ так, что $f(i) = x$. G' является приведенным полупрямым произведением, если из соотношения $i, j \in M$, $i \neq j$ вытекает существование элемента $f \in G'$, для которого $f(i) < 0 < f(j)$. Если l-группа G изоморфна G', то мы скажем, что G' является для G реализацией. (Выражение „реализация" встречается в работах [8], [12], [14].). Если G' есть типа α, то мы говорим о реализации типа α; аналогично о других понятиях, касающихся G'.

Напомним, далее, следующие понятия: Пусть G является l-группой, пусть $x, a \in G$. Элемент x называется острием, если $x > 0$ и если x невозможно представить в виде $x = y \cup z$, $y \cap z = 0$, $y > 0$, $z > 0$. Если x является острием и если при этом $x \cap (a - x) = 0$, то мы говорим, что x является острием элемента a. (Сравни [13].) Элемент x называется собственным острием, если $x > 0$ и если интервал $\langle 0, x \rangle$ является цепью. (Сравни [10].) Каждое собственное острие является острием. Если x является собственным острием и одновременно острием элемента a, то мы говорим, что x есть собственное острие элемента a.

Ф. Шик [14] поставил несколько вопросов, касающихся полупрямых произведений выше описанных типов и сформулированных в виде гипотетических утверждений; эти утверждения приводим ниже как высказывания (A)–(E).

2. Высказывание (A) гласит: *l-группа G имеет реализацию типа α тогда и только тогда, если справедливо следующее:*

(1′) *каждый элемент $a \in G$, $a > 0$ имеет острие; если $x, y \in G$, $x > y > 0$ и если x есть острие, то также и y есть острие.*[1])

Исследуем следующий пример (основная идея его построения схожа с мыслью в примере, имеющемся в работе [10]):

Пусть M – интервал действительных чисел, $M = \langle 0, 1 \rangle$. Пусть для $i \in M$, $i \neq 1$ G_i есть l-группа, элементами которой являются пары вида (m, n), причем m, n – целые числа и соотношение $(m_1, n_1) < (m_2, n_2)$ выполняется только тогда, когда $m_1 < m_2$ или $m_1 = m_2$ и одновременно $n_1 < n_2$. Операцию $+$ в G_i производим по составляющим. Пусть, далее, G_1 является группой, о которой идет речь в [5] стр. 216, пример 6. G_1 является, следовательно, группой с тремя генераторами a, b, c, каждый из которых имеет бесконечный порядок, причем G_1 определена следующими соотношениями между a, b, c: $a + b = c + a$, $a + c = b + a$, $b + c = c + b$. Из этих соотношений вытекает, что каждый элемент $x \in G_1$ можно однозначно представить в виде $x = na + mb + m'c$, где n, m, m' – целые числа. Если предыдущее равенство выполнено, то будем писать $x = (n, m, m')$. Множество G_i^+ определено следующим образом: если $x = (n, m, m')$, то $x \in G_i^+$ тогда и только тогда, если $n > 0$, или $n = 0$ и одновременно $m \geqq 0$, $m' \geqq 0$.

Пусть группа $\bar{G}$ построена из только что описанных l-групп G_i так же, как в отделе 1. Для $f \in \bar{G}$ обозначим через $\bar{f}$ функцию, определенную на M следующим образом: если $i \in M$, $i \neq 1$, $f(i) = (n, m)$, то положим $\bar{f}(i) = n$; если $f(1) = (n, m, m')$, то положим $\bar{f}(1) = n$. Пусть G есть множество всех $f \in \bar{G}$, для которых справедливо утверждение: существует число ε (зависящее от f) $0 < \varepsilon < 1$ так, что на интервале $\langle 1 - \varepsilon, 1 \rangle$ $f = \text{konst}$.

---

[1]) Ф. Шик сообщил мне в письме, что утверждение „только тогда" не правильно (сравни [13], стр. 43, пример V). Поэтому я в дальнейшем занимаюсь только утверждением „тогда".

Пусть $f \in G$, $f > 0$. а) Если существует $i \in M$, $i \neq 1$ так, что $f(i) > 0$, то через h обозначим тот элемент из $\overline{G}$, для которого $h(i) = f(i)$, $h(j) = 0$ при $j \neq i$. Легко можно обнаружить, что h принадлежат G и что h является остриeм элемента f. б) Пусть, далее, $\bar{f}(i) = 0$ для каждого $i \in M$, $i \neq 1$. Тогда $\bar{f}(i) = 0$ для каждого $i \neq 1$, так что $\bar{f}(1) = 0$ и $f(1)$ имеет вид $f(1) = (0, m, m')$, $m \geqq 0$, $m' \geqq 0$, причем по крайней мере один из элементов m, m' является положительным. Если $m > 0$, то через h обозначим тот элемент из G, для которого $h(i) = 0$ для $i \in M$, $i \neq 1$ и $h(1) = (0, m, 0)$. Элемент h является острием элемента f. Аналогично поступаем и в случае $m' > 0$. Итак, каждый элемент $f \in G$, $f > 0$ имеет в G острие.

Пусть f есть острие в G. Известно, что в таком случае f не имеет никакого острия $g \neq f$ (сравни [13]). Построим элемент h, как в предыдущем. Очевидно, что элемент h является собственным острием. Так как h есть острие элемента f, должно быть $h = f$. Так как $\langle 0, h \rangle$ является цепью, то каждый элемент $f_1 \in G$, $0 < f_1 < f$, является острием. Следовательно, G выполняет условия высказывания (A).

Пусть $f \in G$, $f(i) = 0$ для $i \neq 1$, $f(1) = (0, 1, 0) = b$. Обозначим через K' множество всех элементов $f \in G$, для которых $|f'| \cap |f| = 0$. Тогда $f \notin K'$. Рассмотрим, далее, элементы $g, k \in G$, определенные следующим образом: для $i \in M$, $i \neq 1$ $g(i) = (1, 0)$, $k(i) = 0$; $g(1) = (1, 0, 1)$, $k(1) = (0, 0, 1) = c$. Тогда $k \in K'$. Обозначим $g + k - g = s$. Для $i \in M$, $i \neq 1$ будет $s(i) = 0$. Далее, $s(1) = a + c + c - (a + c) = a + c - a = b$ (по определению l-группы G_1), так что $s = f$. Из соотношения $s \notin K'$ вытекает, что K' не является инвариантной подгруппой в G. По теореме 1, [14] l-группа G не имеет совсем никакой реализации. Этим мы доказали:

Высказывание (A) *не верно. Высказывание, которое мы получили бы из* (A), *пропустив слова „типа α“, было бы также неверным.*

3. Исследуем вопрос: какое дальнейшее предположение надо прибавить к предположениям, приведенным в (A), чтобы полученное таким образом утверждение (касающееся „тогда“, сравни сноску[1])) было правильным?

Прежде всего докажем несколько вспомогательных утверждений.

3.1. *Условие „если x есть острие, $0 < y < x$, то также и y есть острие“ равносильно утверждению: каждое острие в G является собственным острием.*

Доказательство. Если x является собственным острием, $0 < y < x$ то y есть также собственное острие. Пусть x не является собственным острием. Тогда существуют несравнимые элементы u, v, $0 < u < x$, $0 < v < x$. Обозначим $u_1 = u - (u \cap v)$, $v_1 = v - (u \cap v)$, $y = u_1 \cup v_1$. Так как $0 < u_1 < y$, $0 < v_1 < y$, $u_1 \cap v_1 = 0$, то элемент y не является острием. Однако очевидно, что $0 < y < x$.

3.2. Из 3.1 непосредственно следует:

Условие (1′) *равносильно условию: каждый элемент* $a \in G$, $a > 0$ *имеет собственное острие.*

3.3. Пусть y — собственное острие в G. Множество A всех элементов $x \in G$, к которым существует натуральное число n так, что $-ny \leqq x \leqq ny$, является выпуклой цепью в G. (Доказательство можно просто произвести на основании [11], отд. 3 и отд. 17.2.) Пусть B является множеством всех элементов $z \in G$, для которых $y \cap |z| = 0$. Пусть C является множеством всех элементов вида $x + z$, $x \in A$, $z \in B$. На основании результатов отдела 4, гл. 14, [5] можно легко доказать: A, B, C суть l-подгруппы в G и $C = A \times B$.

3.4. Пусть G — l-группа, $x \in G$, $x > 0$. Пусть $S(x)$ — множество всех l-идеалов в G, не содержащих элемент x. Множество $S(x)$ частично упорядочено при помощи множественного включения. Пусть $\bar{S}(x)$ — множество всех максимальных элементов в $S(x)$. Множество $\bar{S}(x)$ не пусто (сравни рассуждения в доказательстве теоремы 9, гл. 6, [5]). Символом $J(x)$ обозначим произвольный элемент из $\bar{S}(x)$.

3.5. В доказательстве теоремы 1, [14] (часть $3 \Leftrightarrow 1$) доказано утверждение: Пусть $x \in G$, $x > 0$. Если G имеет реализацию, то $G/J(x)$ — упорядоченная группа.

3.6. *Пусть* x, y — *собственные острия в* G, $x \leqq y$. *Тогда* $J(x) \subset J(y)$.

Доказательство. Пусть выполняются условия утверждения. Предположим, что для некоторого $J(x) \in \bar{S}(x)$, $J(y) \in \bar{S}(y)$ $J(x) \not\subset J(y)$. Тогда множество $I = J(x) + J(y)$ является l-идеалом, $J(y) \subset I$, $J(y) \neq I$. Из максимальности $J(y)$ вытекает $y \in I$. Следовательно, существуют $u \in J(x)$, $v \in J(y)$ так, что $y = u + v$. Тогда $0 \leqq y \leqq u^+ + v^+$. Значит, существуют элементы u_1, v_1, так что $0 \leqq u_1 \leqq u^+$, $0 \leqq v_1 \leqq v^+$ и одновременно

$$y = u_1 + v_1 \tag{3.1.}$$

(сравни [5a], стр. 310). Так как y является собственным острием, вытекает из предыдущих неравенств и из соотношения (3.1), что элементы u_1, v_1 сравнимы; согласно (3.1) будет в таком случае либо $y \in J(y)$, либо $y \in J(x)$ (и, следовательно, $x \in J(x)$), что приводит нас к противоречию.

Следствие. *Пусть* x — *собственное острие. Тогда множество* $\bar{S}(x)$ *содержит один единственный элемент.*

3.7. Теперь докажем утверждение:

l-группа G имеет реализацию типа α тогда, когда G имеет реализацию и когда выполняется соотношение (1′).

Доказательство. Пусть G имеет реализацию и пусть для G выполняется условие (1′). Пусть H — множество всех острий в G. Пусть $x \in G$, $x > 0$. Согласно ($1'$) существует $h \in H$, $h \leqq x$. Следовательно, $x \notin J(h)$. Из этого вытекает

$$\bigcap J(h)\,(h \in H) = 0\,. \tag{3.2}$$

Согласно 3.5 l-группы $G_h = G/J(h)$ упорядочены. Из уравнения (3.2) вытекает (сравни [5], гл. VI, § 6, теорема 9), что l-группа G изоморфна полупрямому произведению G^1 упорядоченных групп G_h $(h \in H)$. Этим самым мы получили реализацию для G; из реализации G^1 можно путем процесса, описанного в доказательстве теоремы 7, [14], получить приведенную реализацию G^2 для G. Предположим, что G^2 является полупрямым произведением l-групп G_i $(i \in M)$. Возьмем фиксированное $i \in M$. По доказательству цитированной теоремы i является подмножеством множества H. Возьмем $h \in i$. Пусть в изоморфизме $G \sim G^1$, соотв. $G \sim G^2$, элемент h отобразится на f^1, соотв. на f^2. Так как $h > 0$, и так как $h \notin J(h)$, будет $f^1(h) > 0$, и следовательно, по построению G^2 $f^2(i) \geqq 0$.

Пусть $i' \in M$, $i' \neq i$, $h' \in i'$. По условию ($1'$) и 3.1 элементы h, h' являются собственными остриями в G. Если бы элементы h, h' были сравнимы в G, то, согласно 3.6, один из l-идеалов $J(h)$, $J(h')$ содержался бы в другом, так что согласно доказательству теоремы 7, [14] было бы $i = i'$, что противоречит предположению. Значит, элементы h, h' несравнимы, так что

$$h \cap h' = 0 \tag{3.3}$$

(сравни [13]). Так как $G/J(h)$ является упорядоченной группой и так как $h' \notin J(h')$, то по теореме 1, [14] и по соотношению (3.3) должно быть $h \in J(h')$. Из этого следует $f^1(h') = 0$ и, следовательно, для каждого $i' \neq i$ $f^2(i') = 0$. Если бы одновременно было $f^2(i) = 0$, то мы получили бы противоречие с предположением $h > 0$; итак, должно быть $f^2(i) > 0$. Отсюда вытекает, что реализация G^2 имеет тип α.

3.8. Из 3.7 и 3.2 вытекает:

Пусть G имеет реализацию. G имеет реализацию типа α тогда и только тогда, когда каждый элемент $a \in G$, $a > 0$ имеет собственное острие.

4. Высказывание (B) гласит:

Пусть l-группа G имеет реализацию. G имеет приведенную реализацию типа β тогда и только тогда, когда G не имеет острия.

Утверждение „тогда“ доказано в работе [14]. *Утверждение „только тогда“ не верно.* Пример: Пусть G — множество всех непрерывных действительных функций, определенных на интервале $\langle 0, 1 \rangle$. Операции $+$, $\cap$, $\cup$ определены в G обычным способом. Тогда G имеет приведеннюу реализацию типа β (этой реализацией является сама l-группа G). Пусть $f \in G$, $f(i) = 1$ для каждого $i \in \langle 0, 1 \rangle$. Тогда f есть острие в G.

Однако справедливо утверждение:

Пусть l-группа G имеет реализацию. Если G имеет приведенную реализацию типа β, то G не имеет собственного острия. Если G не имеет собственного острия, то каждая реализация l-группы G является реализацией типа β.

Доказательство. Пусть G имеет приведенную реализацию G' типа β. Пусть h — собственное острие в G. Пусть в изоморфизме $G \sim G'$ элементу h соответствует элемент $f \in G'$. Пусть M_0 означает множество всех $i \in M$, для которых $f(i) > 0$. Так как $h > 0$, то множество M_0 не пусто. Так как G' — реализация типа β, то множество M_0 должно содержать больше одного элемента. Возьмем $i_1, i_2 \in M_0$, $i_1 \neq i_2$. Так как G' является приведенной реализацией, существуют элементы $f_1, f_2 \in G'$ такие, что $f_1(i_1) > 0$, $f_1(i_2) < 0$, $f_2(i_1) < 0$, $f_2(i_2) > 0$. Обозначим $(f_i \cup 0) \cap f = g_i$, $i = 1, 2$. Тогда $g_1(i_1) > 0$, $g_1(i_2) = 0$, $g_2(i_1) = 0$, $g_2(i_2) > 0$. Следовательно, элементы g_1, g_2 не сравнимы и лежат в интервале $\langle 0, f \rangle$, так что этот интервал неявляется цепью, и f не является собственным острием. Это противоречит предположению.

Если для G существует реализация G', не являющаяся реализацией типа β, то существует $i \in M$ и $f \in G'_{\{i\}}$, $f \neq 0$. Пусть в изоморфизме $G \sim G'$ элемент f служит образом элемента x. Так как $\langle 0, f \rangle$ есть цепь, то x является собственным острием.

Из доказанного вытекает:

Пусть l-группа G имеет реализацию. Каждая реализация l-группы G является реализацией типа β тогда и только тогда, когда G не имеет собственного острия.

5. Рассмотрим, далее, высказывания:

(C) *Если l-группа G имеет реализацию типа α, то каждая приведенная реализация l-группы G является реализацией типа α.*

(D) *Если l-группа G имеет полную реализацию, то каждая приведенная реализация l-группы G является полной.*

Высказывания (C), (D) *не правильны*. Пример: пусть $\overline{G}$ — множество всех действительных функций, определенных на интервале $\langle 0, 2 \rangle = M$. Пусть G — множество тех функций из $\overline{G}$, которые непрерывны в точке 1. Обозначим $N = M - \{1\}$. Каждой функции $f \in G$ поставим в соответствие функцию f', определенную на N так, что при $i \in N$ будет $f(i) = f'(i)$. Множество всех f' образует, очевидно, l-группу G', изоморфную l-группе G. Значит, l-группа G имеет приведенную и полную реализацию (а именно G'); тем более эта реализация является реализацией типа α; одновременно G имеет приведенную реализацию, которая не является реализацией типа α и, следовательно, она не полна (этой реализацией служит G).

6. Высказывание (E) гласит:

Если G_1 и G_2 — полупрямые произведения той же системы упорядоченных групп, и если G_1, G_2 взаимно изоморфны, то $G_1 = G_2$.

(К высказыванию (E) дается в работе [14] следующее знамечание: доказать эту гипотезу хотя бы при некоторых дополнительных условиях: предположение о типе упомянутых полупрямых произведений, приведенность, G_1 является нормальной, полувыпуклой или выпуклой в $\overline{G}$ и т. п.)

Это высказывание неправильно. Пример: пусть символ G имеет то же значение, как в отделе 5. Пусть G_1, соотв., G_2, является множеством всех $f \in \overline{G}$ которые только в конечном числе точек интервала $\langle 0, 1 \rangle$, соотв. $\langle 1, 2 \rangle$, отличны от нуля. Тогда $G_1 \sim G_2$, $G_1 \neq G_2$. (При этом G_1, G_2 суть полупрямые произведения упорядоченных групп, выпуклые и нормальные в $\overline{G}$.)

Другой пример: пусть $\overline{G}$ имеет то же значение, как в предыдущем примере. Пусть G_1, соотв. G_2 — множество всех $f \in \overline{G}$, непрерывных в точках 0, 2 и непрерывных слева, соотв. справа, в каждой точке $x \in (0, 2)$. (G_1, G_2 имеют при этом тип β и являются нормальными подгруппами в $\overline{G}$.)

7. Понятия „тип α" и „тип β" позволяют нам произвести определенную классификацию полупрямых произведений упорядоченных групп. Легко можно обнаружить, что эти понятия носят топологический характер и что они связаны с топологией на M, введенной аналогичным способом тому, который хорошо известен из теории колец (сравни, например, [7], гл. IX). Было бы интересным исследовать более подробно и глубоко связь между строением топологического пространства M и строением l-группы G'. Несколько простых результатов, касающихся этой проблемы, приведено в следующих замечаниях.

7.1. Пусть символы $\overline{G}$, G', M имеют то же значение, как в отделе 1. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $G_i \neq \{0\}$ для каждого $i \in M$. Для $A \subset M$ обозначим через $\overline{A}$ множество всех $x \in M$, для которых справедливо следующее: если $f \in G'$, $f(i) = 0$ для каждого $i \in A$, то $f(x) = 0$. Очевидно, что

$$A \subset \overline{A} . \tag{7.1}$$

Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, пусть $f \in G'$, $f(i) = 0$ для каждого $i \in A$. Тогда для каждого $y \in \overline{A}$ $f(y) = 0$, следовательно, будет $f(x) = 0$. Отсюда вытекает $x \in \overline{A}$, так что

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} . \tag{7.2}$$

Пусть $x \in M$, $A, B \subset M$, $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Из соотношения $x \notin \overline{A}$ вытекает, что существует $f_1 \in G'$, так что $f_1(i) = 0$ для каждого $i \in A$, $f_1(x) \neq 0$. Не умаляя общности, можем полагать $f_1(x) > 0$ (в противном случае мы рассматривали бы элемент $-f_1$). Аналогичным приемом найдем элемент $f_2 \in G'$, который обладает подобным свойством по отношению к множеству B. Обозначим $g = (f_1 \cup 0) \cap (f_2 \cup 0)$. Для каждого $i \in A \cup B$ будет $g(i) = 0$ и одновременно $g(x) > 0$. Итак, $x \notin \overline{A \cup B}$. Этим мы доказали соотношение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Из определения $\overline{A}$ непосредственно вытекает: если $A \subset B \subset M$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$. Из этого соотношения получаем $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, так что

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} . \tag{7.3}$$

Далее, очевидно,

$$\bar{\emptyset} = \emptyset . \tag{7.4}$$

Из (7.1)–(7.4) вытекает, что множество M можно считать топологическим пространством, в котором замыканием множества $A \subset M$ является $\bar{A}$. (Сравни, например, [1], стр. 290.)

Приводя классификацию реализации G' как целого и исследуя „локальные" свойства, относящиеся к фиксированной составляющей этой реализации, можем теперь пользоваться топологическими понятиями. Однако, уместно здесь заметить следующее: если заданы составляющие G_i и топология M, относящаяся к G', то этим еще не определено однозначно полупрямое произведение G'. (Сравни пример в отделе 7.4.)

7.2. Из определения топологии M непосредственно вытекает: *реализация G' является реализацией типа α, соотв. β, в составляющей G_i тогда и только тогда, если множество $M - \{i\}$ является, соотв. не является, замкнутым.* Далее:

Реализация G' является приведенной тогда и только тогда, если для каждой точки $i \in M$ выполнено условие: множество $\{i\}$ замкнуто.

Доказательство. Пусть реализация G' является приведенной, i_1, $i_2 \in M$, $i_1 \neq i_2$. Тогда существует $f \in G'$, $f(i_1) < 0 < f(i_2)$. Обозначим $g = f \cup 0$. Тогда $g(i_1) = 0 \neq g(i_2)$, так что $i_2 \notin \overline{\{i_1\}}$ и $\{i_1\}$ является замкнутым множеством.

Пусть, наоборот, каждое одноточечное множество из M замкнуто. Если $i_1, i_2 \in M$, $i_1 \neq i_2$, то по предложению существует $f_1, f_2 \in G'$ так, что $f_1(i_1) \neq 0 = f_1(i_2), f_2(i_1) = 0 \neq f_2(i_2)$. Не умаляя общности, можем предполагать, что $f_1(i_1) < 0 < f_2(i_2)$. Для $g = f_1 + f_2$ тогда будет $g(i_1) < 0 < g(i_2)$, так что G' является приведенной реализацией.

7.3. *Пусть G' можно нетривиальным способом разложить в прямое произведение. Тогда топологическое пространство M несвязно.*

Доказательство. Пусть $G' = U \times V$, $U \neq \{0\} \neq V$. Пусть A, соотв. B, — множество всех $i \in M$, для которых существует $f \in U^+$, соотв. $f \in V^+$ так, что $f(i) \neq 0$. Докажем, что справедливо следующее:

$$\bar{A} = A\,, \quad \bar{B} = B\,, \quad A \cap B = \emptyset\,, \quad A \cup B = M\,, \quad A \neq \emptyset \neq B\,. \tag{7.5}$$

Так как для $f \in U^+$, $g \in V^+$ имеет место равенство $f \cup g = 0$, то должно быть $A \cap B = \emptyset$. Для каждого $i \in A$, $j \in B$, $f \in U$, $g \in V$ будет, следовательно, $f(j) = 0 = g(i)$. Пусть $i \in M$. Существует $f \in (G')^+$ так, что $f(i) > 0$. По предположению можно f представить в виде $f = f_1 + f_2, f_1 \in U^+, f_2 \in V^+$. Значит, должно быть либо $f_1(i) > 0$, либо $f_2(i) > 0$, так что $A \cup B = M$. Пусть $j \in B$. Существует $g \in G'$ такое, что $g(j) \neq 0$. По предположению $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in U$, $g_2 \in V$.

Согласно выше приведенному $g_1(j) = 0$, следовательно, $g_2(j) \neq 0$. Для каждого $i \in A$ $g_2(i) = 0$. Следовательно, $j \notin \overline{A}$ так что $\overline{A} \subset A$. Последнее соотношение, приведенное в (7.5), очевидно.

7.4. Пусть в топологическом пространстве M, относящемся к реализации G', существуют подмножества A, B, выполняющие соотношения (7.5). Пусть U, соотв. V, — множество всех элементов $f \in G'$, выполняющих соотношение $f(i) = 0$ для каждого $i \in B$, соотв. для каждого $i \in A$. Вообще не должно быть $G' = U \times V$.

Пример. Пусть $\overline{G}$ — множество всех действительных функций, определенных на квадрате M, заданном неравенствами $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$. Частичное упорядочение и операция $+$ определены в $\overline{G}$ обычным способом. Пусть G' — множество всех $f \in \overline{G}$, для которых выполнено условие: множество точек, в которых f не является непрерывной, конечно. Топология на M, определенная l-группой G', дискретна (т. е. для каждого $A \subset M$ $\overline{A} = A$). Пусть A, соотв. B, — подмножества в M, определенные неравенствами $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y \leqq 2$, соотв. $1 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$. Тогда для A, B выполняются соотношения (7.5), но для соответствующих подмножеств $U, V \subset G'$ не будет $G' = U \times V$. (Элемент $f \in G'$, удовлетворяющий равенству $f(i) = 1$ для каждого $i \in M$, нельзя представить в виде $f = u + v$, $u \in U$, $v \in V$.) Припомним еще, что топология на M, определенная l-группой G', тождественна топологии, определенной l-группой $\overline{G}$.

8. М. Бенадо доказал следующую теорему (соответствующая работа до сих пор не опубликована):

(F_1) *Пусть G — частично упорядоченная группа, $a, b, d, m, x \in G$. Пусть выполнены следующие условия*:

1. $m = a \cap b$, $d = a \cup b$, $d = a - m + b$, $m \leqq x \leqq d$,

2. *существуют элементы* $a \cap x$, $b \cap x$.

Тогда $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x$.

Замечание. Если G — частично упорядоченная группа, $a, b, c \in G$, то уравнением $a \cap b = c$ выражаем то обстоятельство, что в частично упорядоченном множестве G существует элемент $\inf(a, b)$ и что он равен c. Аналогично обстоит дело с символом $\cup$.

Пусть G — частично упорядоченная группа. Для $a, b \in G$ обозначим через $H(a, b)$ множество всех $x \in G$, для которых $a \leqq x$, $b \leqq x$. Множество всех минимальных элементов частично упорядоченного множества $H(a, b)$ обозначим $a \vee b$. Если $v \in H(a, b)$, то пусть $(a \vee b)_v$ означает множество всех элементов x, которые принадлежат $a \vee b$ и для которых $x \leqq v$. Двойственно определим множества $a \wedge b$, $(a \wedge b)_u$ (для $u \leqq a$, $u \leqq b$). В общем случае может быть некоторое из множеств вида $(a \vee b)_v$ пустым множеством. Если для любых $a, b \in G$ имеем $H(a, b) \neq \emptyset$ и если для каждого $v \in H(a, b)$ одновременно будет $(a \vee b)_v \neq \emptyset$, то группу G назовем направленной мультиструктурной группой (сравни [2].)

В связи с теоремой (F_1) М. Бенадо поставил вопрос, справедливо ли или нет следующее высказывание (сравни [3], § 7, а также [4], 6.1.1):

(F) *Пусть G — направленная мультиструктурная группа. Для всех элементов $a, b, d, m \in G$ таких, что $m \in a \wedge b$, $d \in a \vee b$, $a + b = d + m$ для каждого $x \in G$, удовлетворяющего неравенству $m \leqq x \leqq d$, существуют элементы $a', b' \in G$ так, что справедливо следующее*:

$$(8.1.) \quad a' \in (a \wedge x)_m\,, \quad b' \in (b \wedge x)_m\,, \quad x \in a' \vee b'\,, \quad a' + b' = x + m\,.$$

Высказывание (F) *не правильно*. Пример: пусть G — множество всех пар (x, y), где x, y — целые числа. Операцию $+$ определим обычным способом (по составляющим), а частичное упорядочение — следующим образом: $(x_1, y_1) < < (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $y_1 < y_2$. В таком случае G представляет направленную мультиструктурную группу. Положим $a = (0, 1)$, $b = (2, 1)$, $d = (2, 2)$, $m = (0, 0)$, $x = (1, 1)$. Предположения высказывания (F) выполнены. При этом $(a \wedge x)_m = (b \wedge x)_m = \{m\}$. Так как $m + m = m \neq x + m$, $m \vee m = = \{m\}$, не существуют элементы a', b', удовлетворяющее соотношеням (8.1).

Из этого примера одновременно следует: *если бы мы из высказывания* (F) *выпустили одно из требований $a' + b' = x + m$, $x \in a' \vee b'$, то и возникшее таким образом более слабое утверждение было бы неправильным*. Аналогично, мы могли бы в высказывании (F) выражение „мультиструктурная группа" заменить выражением „частично упорядоченная группа" и прибавить условие

$$(8.2) \qquad (a \wedge x)_m \neq \emptyset\,, \quad (b \wedge x)_m \neq \emptyset\,;$$

мы получили бы опять-таки неправильное высказывание. Теперь напомним следующее:

Пусть G — частично упорядоченная группа, $a, b, m, d, x \in G$. Из соотношений

$$(8.3) \qquad m \in a \wedge b\,, \quad d \in a \vee b\,, \quad a + b = d + m\,, \quad m \leqq x \leqq d$$

не вытекает ни одно из неравенств (8.2). Пример (сравни [6]):

Пусть G — множество всех пар (x, y), причем x, y — действительные числа, разность которых $x - y$ есть рациональное число. Сложение определим по составляющим и соотношение $\leqq$ введем следующим образом: $(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, если $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$. Положим $a = (2, 0)$, $b = (0, 2)$, $m = (0, 0)$, $d = (2, 2)$, $x = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Тогда соотношения (8.3) выполнены (даже $m = a \cap b$, $d = a \cup b$), и притом любое из множеств $(a \wedge x)_m$, $(b \wedge x)_m$ пусто.

9. Частично упорядоченная группа G называется направленной группой, если для любых $a, b \in G$ существует $x \in G$, $a \leqq x$, $b \leqq x$.

Пусть G — произвольная частично упорядоченная группа, $A \subset G^+$. Пусть $K'(A)$ — множество всех элементов $y \in G^+$, для которых из соотношения $x \in A$ вытекает $x \cap y = 0$. (Сравни замечание в отд. 8.) Далее обозначим $K'(K'(A)) = K(A)$.

Легко можно доказать утверждение: Пусть G — частично упорядоченная группа. Если $x, y \in G$ и если в G существует элемент $x \cap y$, то в G имеется и элемент $x \cup y$. Значит, если $A \subset G^+$, $x \in K(A)$, $y \in K'(A)$, то в G существует элемент $x \cup y$. Обратим внимание к следующему условию (P), относящемуся к частично упорядоченной группе G:

(P) *Пусть* $\emptyset \neq A \subset G^+$, $x \in G^+$. *Тогда существуют элементы* $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$ *так, что* $x \leqq y \cup z$.

В работе [9] изучалось строение l-групп, удовлетворяющих условию (P). Одновременно там был поставлен вопрос:

(G) *Можно результаты работы* [9] *распространить на направленные группы?*

Ответ на поставленный вопрос отрицателен. Пусть G — частично упорядоченная группа, приведенная в конце отд. 8. Очевидно, что G является направленной группой. Легко можно обнаружить, что для $A \subset G^+$, $A \neq \emptyset$ множество $\{K(A), K'(A)\}$ совпадает с некоторым из множеств $\{\{0\}, G\}$, $\{U, V\}$, причем U, соотв. V, является множеством всех $(x, y) \in G^+$, для которых $x = 0$, соотв. $y = 0$. Значит, условие (P) выполнено. Для частично упорядоченной группы G однако не имеют места утверждения, подобные теоремам 2—4, доказанным в работе [9].

Литература

[1] *П. С. Александров:* Введение в общую теорию множеств и функций, Москва (1948).

[2] *M. Benado*: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II (Théorie des multistructures). Czechosl. Mat. Jour. *5* (*80*) (1955), 308—344.

[3] *M. Benado*: La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et Géométrie. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae (в печати).

[4] *M. Benado*: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae (в печати).

[5] *G. Birkhoff*: Lattice theory. New York (1948).

[5a] *G. Birkhoff*: Lattice ordered groups, Annals of Math., *43*, 298—331 (1942).

[6] Ky Fan: Partially ordered additive groups of continuous functions. Annals of Math. *51* (1950), 403—427.

[7] *N. Jacobson*: Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, *Vol. XXXVII* (1956).

[8] *P. Jaffard*: Contribution à l'étude des groupes ordonnés. J. Math. Pures Appl. *9* (*22*) (1953), 203—280.

[9] *Я. Якубик:* Об одном классе структурно упорядоченных групп. Čas. pěst. mat. *84* (1959), 150—161.

[10] *Я. Якубик:* Об одном свойстве структурно упорядоченных групп. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 51—59.
[11] *J. Jakubík*: Konvexe Ketten in *l*-Gruppen. Čas. pěst. mat. *84* (1959), 53—63.
[12] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер:* Полуупорядоченные группы и пространства. Успехи математических наук *3* (*43*) (1951), 31—98.
[13] *Ф. Шик:* К теории структурно упорядоченных групп. Чехосл. мат. журнал *6* (*81*) (1956), 1—25.
[14] *F. Šik*: Über subdirekte Summen geordneter Gruppen. Чехосл. мат. журнал *10* (*85*) (1960), 400—424.

Výtah

K TEÓRII ČIASTOČNE USPORIADANÝCH GRÚP

JÁN JAKUBÍK, Košice

Článok obsahuje riešenie niektorých otázok z teórie čiastočne usporiadaných grúp. Ide o otázky, súvisiace s problematikou, preberanou v prácach [3], [9], [14].

V odsekoch 1—6 sa vyšetrujú niektoré vlastnosti, vzťahujúce se na „realizáciu" danej l-grupy G (t. j. na vyjadrenie G vo tvare polopriameho súčinu usporiadaných grúp). Používame označenia podľa [14] a [10]. Dokazujú sa tvrdenia:

Existuje l-grupa G, ktorá nemá realizáciu a ktorá splňuje nasledujúcu podmienku: (1') každý prvok $a \in G$, $a > 0$ má v G hrot; ak $x, y \in G$, $x > y > 0$ a ak x je hrot, potom aj y je hrot. Ak pre G platí (1') a ak G má realizáciu, potom každá realizácia l-grupy G je typu α. Existuje l-grupa, ktorá obsahuje hrot a má redukovanú realizáciu typu β. Ak l-grupa G má realizáciu, potom každá jej realizácia je typu β vtedy a len vtedy, keď G nemá vlastný hrot. Existuje l-grupa, ktorá má úplnú realizáciu typu α a zároveň má redukovanú realizáciu, ktorá nie je úplná a nie je typu α. Existujú l-grupy G_1, G_2, ktoré sú polopriamym súčinom toho istého systému usporiadaných grúp, sú izomorfné a nie sú si rovné. (Uvedené výsledky dávajú riešenie niektorých otázok o polopriamych súčinoch l-grúp, vyslovených v [14].)

V ods. 7 sa dokazuje, že pojmy „typ α" a „typ β" majú topologický charakter a že súvisia s topológiou na množine všetkých faktorov vyšetrovaného rozkladu na polopriamy súčin, zavedenou analogicky s postupom, dobre známym z teórie okruhov (porov. [7], kap. IX).

V ods. 8 je riešený problém, ktorý položil M. BENADO ([3], [4]) týkajúci sa č. u. grúp, v ktorých príslušná č. u. množina je usmerneným multisvázom. V ods. 9 je daná odpoveď na otázku, položenú v [9], vzťahujúcu sa na určitú vlastnosť usmernených č. u. grúp.

Zusammenfassung

ZU DER THEORIE DER TEILWEISE GEORDNETEN GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

Die Arbeit enthält die Lösung gewisser Fragen aus der Theorie der teilweise geordneten (t. w. g.) Gruppen (vgl. [3], [9], [14]). In den Abs. 1 – 6 werden Eigenschaften einer gegebenen l-Gruppe G untersucht, welche mit der „Realisation" von G (d. h. mit der Darstellung der l-Gruppe G in der Form eines subdirekten Produktes von geordneten Gruppen) zusammenhängen. Wir benützen die Terminologie von [14] und [10]. Folgende Sätze sind bewiesen:

Es gibt eine l-Gruppe G, die keine Realisation besitzt und welche folgende Bedingung erfüllt: (1′) jedes Element $a \in G$, $a > 0$ hat eine Spitze in G; es gilt $x, y \in G$, $x > y > 0$, und ist x eine Spitze, so ist auch y eine Spitze. Erfüllt die l-Gruppe G die Bedingung (1′) und hat G eine Realisation, so ist jede Realisation von G vom Typus α. Es gibt eine l-Gruppe G, welche eine Spitze enthält und eine reduzierte Realisation vom Typus β besitzt. Besitzt die l-Gruppe G eine Realisation, so ist jede ihre Realisation dann und nur dann vom Typus β, wenn G keine eigentliche Spitze enthält. Es gibt eine l-Gruppe mit einer vollständigen Realisation vom Typus α, welche zugleich eine reduzierte Realisation besitzt, die weder vollständig noch vom Typus α ist. Es gibt l-Gruppen G_1, G_2, welche subdirekte Produkte von demselben System geordneter Gruppen sind, wobei G_1, G_2 isomorph und nicht einander gleich sind. (Die erwähnten Resultate geben die Lösung einiger in der Arbeit [14] gestellten Probleme über die Realisation von l-Gruppen.)

In dem Abs. 7 wird gezeigt, daß die Begriffe „Typus α" und „Typus β" einen topologischen Charakter haben und daß sie mit einer Topologie an der Menge aller Faktoren der untersuchten subdirekten Zerlegung zusammenhängen; die Einführung dieser Topologie ist mit dem aus der Theorie der Ringe bekannten Verfahren analog (vgl. [7], Kap. IX).

In dem Abs. 8 ist ein Problem von M. BENADO ([3], [4]) gelöst (es handelt sich um die t. w. g. Gruppen, welche – als t. w. g. Mengen – gerichtete Vielverbände sind). Im Abs. 9 ist eine in [9] gestellte Frage über die gerichteten t. w. g. Gruppen beantwortet.