Časopis pro pěstování matematiky

I. D. Čerkasov

Пример диффузионного процесса, однородного по абсциссе и времени

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 367--371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117370

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

ПРИМЕР ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА, ОДНОРОДНОГО ПО АБСЦИССЕ И ВРЕМЕНИ

И. Д. ЧЕРКАСОВ, Мурманск (СССР)

(Поступило в редакцию 12/X 1960 г.)

В заметке исследуется возможность преобразовать в процесс Винера диффузионные процессы, инфинитезимальный оператор которых имеет вид (3).

1. Введение и формулировка задачи. В заметке рассматривается однородный по времени непрерывный марковский процесс $\boldsymbol{X}_t$ на числовой прямой E. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех открытых множеств E, а $\Gamma \in \mathfrak{M}$. Предположим, что

$$\mathscr{P}(\tau - t, x, \Gamma) = \mathscr{P}\{\boldsymbol{X}_\tau \in \Gamma / \boldsymbol{X}_t = x\} \tag{1}$$

есть условная вероятность того, что случайная величина $\boldsymbol{X}_\tau$ в момент времени τ принадлежит множеству Γ при условии, что в момент t $(t < \tau)$ $\boldsymbol{X}_t$ была равна x. Если $f(\tau - t, x, y)$ – есть плотность распределения вероятностей, соответствующая условному распределению $\mathscr{P}$, то, как показано А. Н. Колмогоровым в статье [1], $f(\tau - t, x, y)$ при достаточно общих условиях удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 . \tag{2}$$

При этом коэффициенты a и b при каждом фиксированном значении x конечны и определяются процессом $\boldsymbol{X}_t$.

Мы рассмотрим такой процесс, инфинитезимальный оператор которого (см. определение этого понятия в [2]) имеет вид

$$A_0 = (Cx^2 + Rx + S) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (Ax + B) \frac{\partial}{\partial x} , \tag{3}$$

где C, R, S, A, B – некоторые действительные постоянные.

Определение. Если в некоторой системе координат (t', x') инфинитезимальный оператор процесса $\boldsymbol{X}_t$ имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} , \tag{4}$$

то такой процесс будем называть *однородным по абсциссе и времени непрерывным марковским процессом.*

Мы здесь покажем, что процесс, управляемый оператором (3), является однородным лишь при некоторых определенных условиях, накладываемых на постоянные C, R, S, A и B. При выполнении этих условий можно построить плотность распределения вероятностей перехода для процесса $\mathbf{X}_t$.

На важность решения этой задачи указал А. Н. Колмогоров в [1] (см. конец параграфа 17). Используя общую теорему, доказанную в [3], мы дадим простой способ решения поставленной задачи. Все обозначения здесь будут такими же, как и в работе [3].

2. Условия однородности. Так как из вероятностных соображений ясно, что $a(x) \geqq 0$, то мы в дальнейшем предполагаем, что коэффициенты C, R, S удовлетворяют условиям:

$$C \geqq 0\,, \quad 4CS - R^2 \geqq 0\,, \quad S > 0 \quad \text{при} \quad C = 0\,. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$T = 2(A - C)\,, \quad K = 2B - R\,. \tag{6}$$

Теперь в соответствии с [3] имеем ($\varepsilon = (1 - R)/2C$):

$$\alpha = \sqrt{Cx^2 + Rx + S}\,, \quad \gamma = Tx + K\,,$$

$$\beta = \sqrt{Cx^2 + Rx + S} \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Cy^2 + Ry + S}} \, (\varepsilon = 0 \text{ при } C = 0)\,. \tag{7}$$

Предположим, что рассматриваемый процесс является однородным. Тогда, как показано в [3], (см. формулу (13)),

$$\Delta = 0\,. \tag{8}$$

В этом случае выражение

$$\frac{W}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha, & \gamma \\ \alpha'_x, & \gamma'_x \end{vmatrix}$$

должно быть постоянным числом. Находим:

$$\frac{W}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{Cx^2 + Rx + S}} \begin{vmatrix} \sqrt{Cx^2 + Rx + S}\,, & Tx + K \\ \dfrac{2Cx + R}{2\sqrt{Cx^2 + Rx + S}}\,, & T \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(Cx^2 + Rx + S)} \left[(RT - 2CK)\, x + (2ST - RK)\right].$$

Это выражение при

$$C = 0\,, \quad R = 0 \tag{9}$$

равно постоянному числу T, а при

$$RT - 2CK = 0\,, \quad 2TS - RK = 0 \tag{10}$$

равно нулю.

Легко видеть, что условие (9) достаточно для выполнения тождества (8). Пусть теперь выполнено условие (10). Тогда найдутся такие постоянные M_1 и P_1, что

$$M_1\,\alpha(x) + P_1\,\gamma(x) = 0\,(M_1^2 + P_1^2 \neq 0)\,. \tag{11}$$

Вычисляя теперь определитель Δ, имеем:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0\,,$$

так как элементы первого и третьего столбца пропорциональны на основании (11). Поэтому равенство (8) выполнено.

Объединяя условия (9) и (10), получаем такой результат: для того, чтобы рассматриваемый процесс был однородным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\begin{vmatrix} RT - 2CK\,, & RK - 2ST \\ C(2ST - RK)\,, & RT - 2CK \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

3. Переход к однородной системе координат. Если выполнено условие (9), то формулы перехода к координатам (t', x'), в которых рассматриваемый процесс является однородным, указаны А. Н. Колмогоровым (см. [1], формулы (156) и (157)).

Эти формулы в случае постоянных A, B и S будут таковы ($S \neq 0$; если $A = 0$, то берем предельные формулы при $A \to 0$):

$$\varphi(t) = \frac{S}{2A}\,(1 - e^{-2At})\,, \quad \Psi(t, y) = e^{-At}y + \frac{B(e^{-At} - 1)}{A}\,, \tag{13}$$

причем постоянные слагаемые могут быть отброшены, как не влияющие на результат преобразования координат.

Применим к этому случаю формулы (14) работы [3]. Имеем:

$$\alpha = \sqrt{S}\,, \quad \beta = x\,, \quad \gamma = 2Ax + 2B\,, \quad W = 2A\sqrt{S}\,, \quad P = -2B\,.$$

Поэтому после интегрирования получим:

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-2At}}{2A}\,, \quad \Psi(t, x) = \frac{xe^{-At}}{\sqrt{S}} + \frac{B}{A\sqrt{S}}\,(e^{-At} - 1)\,. \tag{14}$$

Можно показать, что замена координат как по формулам (13), так и по формулам (14), преобразует оператор (3) к виду (4).

Предположим теперь, что выполнено условие (10) ($C > 0$). Согласно обозначений (12) работы [3] имеем:

$$(15)\qquad W = 0\,,$$

$$P = \begin{vmatrix} \sqrt{Cx^2 + Rx + S}\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Cy^2 + Ry + S}} & , Tx + K \\ 1 + \dfrac{2Cx + R}{2\sqrt{Cx^2 + Rx + S}}\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Cy^2 + Ry + S}} & , T \end{vmatrix} = -\gamma\,.$$

Искомое преобразование на основании формул (14) той же работы будет таким:

$$\varphi(t) = t\,,$$
$$\psi(t, x) = \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Cy^2 + Ry + S}} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Так как P/α является постоянным числом, то в результате интегрирований (см. примечание в конце заметки) получаем:

$$(16)\qquad \varphi(t) = t,\ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{2Cx + R}{\sqrt{4CS - R^2}}\,,$$

если $4CS - R^2 > 0$. Если же $4CS - R^2 = 0$, то ($x > -R/2C$)

$$(17)\qquad \varphi(t) = t\,,\quad \psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\ln|2Cx + R| - \frac{Tx + K}{\sqrt{Cx^2 + Rx + S}}\,\frac{t}{2}\,.$$

Например, если $a(x) = 4x^2 + 2x + 0{,}5$; $b(x) = 4x + 1$, то $T = K = 0$, $4CS - R^2 = 4 > 0$, $\gamma = 0$. Поэтому заключаем, что

$$\varphi(t) = t\,,\quad \psi(x) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arsh}\,(4x + 1)\,.$$

Построение плотности распределения вероятностей перехода маркосвкого процесса, соответствующего оператору (3) производится способом заметки [3]. Формула плотности в частном случае $C = 1$, $A = B = R = S = 0$ приведена А. Н. Колмогоровым в работе [1] (см. параграф 17).

Примечание. Если выполнено условие (10), то можно доказать, что имеется лишь две возможности:

1. или $T = K = 0$, то есть $\gamma = 0$,
2. или $4CS - R^2 = 0$.

Поэтому в (16) получим $\psi(t, x)$ не зависящий от t ($\gamma = 0$), а в (17) выражение

$$\frac{Tx + K}{\sqrt{Cx^2 + Rx + S}} = \frac{Tx + K}{\sqrt{C}\left(x + \frac{R}{2C}\right)} = \left[T\left(x + \frac{K}{T}\right)\right] : \left[\sqrt{C}\left(x + \frac{R}{2C}\right)\right] = \frac{T}{\sqrt{C}},$$

т. е. не зависит от x ($K : T = R : (2C)$ в силу (10)).

Литература

[1] *А. Н. Колмогоров:* Об аналитических методах в теории вероятностей. Умн., вып. *5* (1938), 5–41.

[2] *Е. Б. Дынкин:* Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятностей и ее применения, т. *1*, вып. *1* (1956), 38—59.

[3] *И. Д. Черкасов:* О преобразовании диффузионного процесса в винеровский. Теория вероятностей и ее применения, т. *2*, вып. *3* (1957), 384—388.

Výtah

PŘÍKLAD DIFUSNÍHO PROCESU HOMOGENNÍHO V PROSTORU A V ČASE

I. D. ČERKASOV, Murmaňsk (SSSR)

V práci je studován spojitý markovský proces, jehož infinitesimální operátor je tvaru (3). Je dokázáno, že tento proces je homogenní v čase i v prostoru, jestliže koeficienty A, B, C, R, S vyhovují podmínce (12). Na základě toho je pak ukázána metoda určení hustoty pravděpodobnosti přechodu pro proces odpovídající operátoru (3).

Résumé

EXEMPLE D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION HOMOGÈNE DANS L'ESPACE ET DANS LE TEMPS

I. D. ČERKASOV, Mourmansk (URSS)

Dans cette Note, on étudie le processus continu de Markov dont l'opérateur infinitésimal est de la forme (3). On démontre que si les coefficients A, B, C, R, S satisfont à la condition (12), le processus considéré est homogène dans l'espace et dans le temps. A l'aide de cela, on montre ensuite une méthode pour établir la densité de probabilité de passage du processus correspondant à l'opérateur (3).