O. M. Fomenko
Обобщение функции Жордана

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 86 (1961), No. 3, 360--366

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117369

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

# ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ ЖОРДАНА

О. М. ФОМЕНКО, Краснодар (СССР)

(Поступило в редакцию 19/VII 1960 г.)

Вводится теоретико-числовая функция $J_h(n, k)$, обобщающая известную функцию Жордана, и изучаются ее свойства.

Жордан ввел в теорию чисел функцию $J_h(n)$, обобщающую функцию Эйлера $\varphi(n)$,

$$J_h(n) = n^h \prod_{p \backslash n} \left(1 - \frac{1}{p^h}\right) \tag{1}$$

(здесь и далее буквы обычно означают целые положительные числа; $p$ — простое; случаи, когда буквы означают не обязательно целые положительные числа ясны непосредственно или оговариваются особо). Нетрудно показать, что определение (1) функции $J_h(n)$ можно заменить менее формальным определением. Пусть $(a, b, c, \ldots, d)$ означает общий наибольший делитель чисел $a, b, c, \ldots, d$. Рассмотрим систему $n^h$ чисел

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{h \text{ чисел}}, n), \quad (\underbrace{2, 1, \ldots, 1}_{h \text{ чисел}}, n), \ldots, \quad (\underbrace{n, n, \ldots, n}_{h \text{ чисел}}, n)\,. \tag{2}$$

Определим функцию $J_h(n)$ как число чисел в системе (2), равных 1. Ясно, что при $h = 1$ имеем

$$J_1(n) = \varphi(n)\,.$$

Мы не будем сейчас доказывать эквивалентность двух определений функции Жордана, ибо эта эквивалентность следует из рассматриваемых ниже результатов. В. А. Голубев обобщил функцию $\varphi(n)$ в другом направлении. Пусть $(k, l) = 1$, $0 < l \leqq k$. Тогда функция В. А. Голубева $\varphi(n, k)$ определяется как число натуральных чисел, меньших $kn$, с $n$ взаимно простых и находящихся в арифметической прогрессии $kx + l$. С $\varphi(n, k)$ тесно связана функция В. А. Голубева $\mu(n, k)$, обобщающая функцию Мёбиуса $\mu(n)$,

$$\mu(n, k) = \begin{cases} 0, \text{ если } (n, k) > 1\,; \\ \mu(n), \text{ если } (n, k) = 1\,, \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что $\varphi(n, 1) = \varphi(n)$, $\mu(n, 1) = \mu(n)$. В настоящей работе мы вводим функцию $J_h(n, k)$, являющуюся обобщением как функции Жордана $J_h(n)$, так и функции В. А. Голубева $\varphi(n, k)$. Рассмотрим систему $n^h$ чисел (подчеркнем, что $k$ — фиксированное натуральное число и $(k, l) = 1$)

$$(4)\qquad (\underbrace{l, l, \ldots, l}_{h\ \text{чисел}}, n), \quad (\underbrace{k + l, l, \ldots, l}_{h\ \text{чисел}}, n), \ldots,$$

$$(\underbrace{k(n-1) + l, k(n-1) + l, \ldots, k(n-1) + l}_{h\ \text{чисел}}, n).$$

Определим функцию $J_h(n, k)$ как число чисел в системе (4), равных 1. Ясно, что $J_1(n, k) = \varphi(n, k)$, $J_h(n, 1) = J_h(n)$. Дадим для $J_h(n, k)$ выражение, подобное (1). Нам понадобятся две леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $\Theta(m)$ — мультипликативная функция. Тогда*

$$(5)\qquad \sum_{d \backslash m} \mu(d, k)\, \Theta(d) = \prod_{p \backslash m,\, p \nmid k} (1 - \Theta(p))$$

(*если $m$ делится лишь на простые числа, делящие $k$, а также если $m = 1$, то правая часть этого равенства считается равной* 1).

Доказательство очевидно, если воспользоваться мультипликативностью функции $\mu(m, k)$.

Частные случаи:

а)

$$(6)\qquad \sum_{d \backslash m} \mu(d, k) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ делится на простое, не делящее } k; \\ 1, & \text{если } m \text{ делится лишь на простые, делящие } k, \text{ а также если } m = 1. \end{cases}$$

б)

$$(7)\qquad \sum_{d \backslash m} \frac{\mu(d, k)}{d^h} = \begin{cases} \prod_{p \backslash m,\, p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^h}\right), & \text{если } m \text{ делится на простые, не делящие } k; \\ 1, & \text{если } m \text{ делится лишь на простые, делящие } k, \text{ а также если } m = 1. \end{cases}$$

**Лемма 2.** *Пусть целым положительным $\delta = \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ отвечают любые вещественные или комплексные $f = f_1, f_2, \ldots, f_m$. Тогда, обозначая символом $S'$ сумму значений $f$, отвечающих значениям $\delta$, которые делятся лишь на простые, делящие $k$ (сюда входят и $\delta = 1$), а символом $S_d$ сумму значений $f$, отвечающих значениям $\delta$, кратным $d$, будем иметь*

$$S' = \sum \mu(d, k)\, S_d\,,$$

*где $d$ пробегает все целые положительные числа, делящие хоть одно значение $\delta$.*

Доказательство аналогично доказательству для частного случая $k = 1$ ([1], стр, 29, § 3) и состоит в следующем. Ввиду (6) имеем

$$S' = f_1 \sum_{d \backslash \delta_1} \mu(d, k) + f_2 \sum_{d \backslash \delta_2} \mu(d, k) + \ldots + f_m \sum_{d \backslash \delta_m} \mu(d, k).$$

Собирая вместе члены с одним и тем же $d$ и вынося при этом $\mu(d, k)$ за скобки, в скобках получим $S_d$.

**Теорема 1.**

$$J_h(n, k) = \sum_{d \backslash n} \mu(d, k) \frac{n^h}{d^h}. \tag{8}$$

Доказательство. Применим лемму 2. Определим числа $\delta$ и $f$. Пусть каждое $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ пробегает числа ряда $l, k + l, \ldots, k(n - 1) + l$. Каждой системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_h$ приведем в соответствие число $\delta = (x_1, x_2, \ldots, x_h, n)$ и число $f = 1$. $S'$ обратится в число значений $\delta$, равных 1, то-есть, в $J_h(n, k)$, а $S_d$ обратится в число значений $\delta = (x_1, x_2, \ldots, x_h, n)$, кратных $d$. Но $(x_1, x_2, \ldots, x_h, n)$ кратно $d$, лишь если $d$ — делитель $n$. Пусть $d \backslash n$. $S_d$ тогда есть число чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$, кратных $d$. В силу (3) можно ограничиться случаем $(d, k) = 1$, но тогда $S_d = (n/d)^h$.

**Следствие.**

$$J_h(n, k) = n^h \prod_{p \backslash n, p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^h}\right) \tag{9}$$

(правая часть заменяется $n^h$, если $n$ делится лишь на простые, делящие $k$, а также если $n = 1$).

**Теорема 2.** *Пусть $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. Тогда*

$$\frac{1}{\prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \frac{\zeta(s - h)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_h(n, k)}{n^s}, \quad (\mathrm{Re}\, s > h + 1). \tag{10}$$

Доказательство. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_h(n, k)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{J_h(p, k)}{p^s} + \frac{J_h(p^2, k)}{p^{2s}} + \ldots\right) =$

$$= \prod_{p \backslash k} \frac{1}{1 - p^{h-s}} \prod_{p \nmid k} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{h-s}} = \frac{1}{\prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \frac{\zeta(s - h)}{\zeta(s)}.$$

В случае $h = 1$, $k = 1$ (10) переходит в известную формулу ([2], стр. 11, формула (12)).

Для дальнейшего нам понадобится несколько новых обозначений. Возьмем натуральное число $a$ и его каноническое разложение $\prod_{p \backslash a} p^{\alpha_p}$. Имеем

$$\prod_{p \backslash a} p^{\alpha_p} = \prod_{p \backslash a, p \backslash k} p^{\alpha_p} \cdot \prod_{p \backslash a, p \nmid k} p^{\alpha_p} = a_k \cdot a_k'.$$

Таким образом,

$$a_k = \prod_{p \backslash a,\, p \backslash k} p^{\alpha_p}, \quad a'_k = \prod_{p \backslash a,\, p \nmid k} p^{\alpha_p}.$$

Легко видеть, что $a_k = 1$, если нет таких простых чисел $p$, которые бы одновременно делили $a$ и $k$ (в частности, если $k = 1$). Символ $\sigma_r(a)$ означает сумму $r$-ых степеней делителей числа $a$, где $r$ — вещественное число.

**Теорема 3.**

$$\sum_{d \backslash a} J_h(d, k) = \sigma_{-h}(a_k)\, a^h. \tag{11}$$

Доказательство. $\sum_{d \backslash a} J_h(d, k) = \prod_{p \backslash a,\, p \backslash k} (1 + J_h(p, k) + \ldots + J_h(p^{\alpha_p}, k))\,\cdot$

$$\cdot \prod_{p \backslash a,\, p \nmid k} (1 + J_h(p, k) + \ldots + J_h(p^{\alpha_p}, k)) = \sigma_h(a_k)\,(a'_k)^h = \frac{\sigma_h(a_k)\, a^h}{(a_k)^h} = \sigma_{-h}(a_k)\, a^h.$$

В частном случае $k = 1$, $h = 1$ получим известную формулу ([1], стр. 30, $d$).

Сформулируем теперь лемму, доказательство которой можно найти хотя бы в [3] (задача 33, отдел VIII).

**Лемма 3.** *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *произвольны и*

$$A_\nu = \sum_{d \backslash \nu} a_d \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

*Тогда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & \ldots A_1 \\ A_1 & A_2 & A_1 & A_2 & \ldots A_{(2,n)} \\ A_1 & A_1 & A_3 & A_1 & \ldots A_{(3,n)} \\ A_1 & A_2 & A_1 & A_4 & \ldots A_{(4,n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 & A_{(n,2)} & A_{(n,3)} & A_{(n,4)} & \ldots A_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{12}$$

В этом определителе общий элемент $c_{ij} = A_\nu$, где $\nu = (i, j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

**Теорема 4.**

$$\begin{vmatrix} \sigma_{-h}((1,1)_k)\,(1,1)^h & \sigma_{-h}((1,2)_k)\,(1,2)^h & \ldots & \sigma_{-h}((1,n)_k)\,(1,n)^h \\ \sigma_{-h}((2,1)_k)\,(2,1)^h & \sigma_{-h}((2,2)_k)\,(2,2)^h & \ldots & \sigma_{-h}((2,n)_k)\,(2,n)^h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{-h}((n,1)_k)\,(n,1)^h & \sigma_{-h}((n,2)_k)\,(n,2)^h & \ldots & \sigma_{-h}((n,n)_k)\,(n,n)^h \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$= J_h(1, k)\, J_h(2, k) \ldots J_h(n, k).$$

Доказательство. Применим лемму 3 и теорему 3, причем

$$a_d = J_h(d, k), \quad A_{(i,j)} = \sigma_{-h}((i, j)_k)\,(i, j)^h.$$

При $k = 1$ тождество (13) переходит в тождество, полученное в работе [4], при $k = 1$, $h = 1$ — в знаменитое тождество Смита.

**Теорема 5.** *Пусть $h \geqq 2$. Тогда*

$$(14)\qquad \sum_{m=1}^{n} J_h(m, k) = \frac{1}{\prod_{p \backslash k}\left(1 - \frac{1}{p^{h+1}}\right)} \frac{n^{h+1}}{(h+1)\,\zeta(h+1)} + C_n n^h,$$

*причем при $n > n_0$, где $n_0$ достаточно велико,*

$$1 - \tfrac{1}{2}\zeta(h) < |C_n| < \tfrac{1}{2}\zeta(h).$$

Доказательство.

$$\sum_{m=1}^{n} J_h(m, k) = \sum_{m=1}^{n} m^h \sum_{d \backslash m} \frac{\mu(d, k)}{d^h} = \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k)\left(1^h + 2^h + \ldots + \left[\frac{n}{d}\right]^h\right) =$$

$$= \frac{1}{h+1} \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k) \sum_{i=0}^{h} \binom{h+1}{i} B_i \left[\frac{n}{d}\right]^{h+1-i} =$$

$$= \frac{1}{h+1} \sum_{i=0}^{h} \binom{h+1}{i} B_i \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k) \left[\frac{n}{d}\right]^{h+1-i},$$

где $B_0 = 1$, $B_i$ — $i$-ое число Бернулли, $\binom{h+1}{i}$ — биномиальный коэффициент, причем мы воспользовались известным соотношением

$$1^h + 2^h + \ldots + n^h = \frac{1}{h+1} \sum_{i=0}^{h} \binom{h+1}{i} B_i n^{h+1-i}.$$

Символ $[\alpha]$ означает наибольшее целое, не превосходящее $\alpha$, $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Ясно теперь, что (напомним равенство $B_1 = \frac{1}{2}$)

$$\sum_{m=1}^{n} J_h(m, k) = \frac{1}{h+1} \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k) \left[\frac{n}{d}\right]^{h+1} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k) \left[\frac{n}{d}\right]^{h} + O(n^{h-1} \ln n) =$$

$$= \frac{1}{h+1} \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k)\left(\frac{n}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right)^{h+1} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d, k)\left(\frac{n}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right)^{h} + O(n^{h-1} \ln n) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{p \backslash k}\left(1 - \frac{1}{p^{h+1}}\right)} \frac{n^{h+1}}{(h+1)\,\zeta(h+1)} + n^h \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d, k)\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right)}{d^h} + O(n^{h-1} \ln n).$$

Имеем

$$\tfrac{1}{2}\zeta(h) > \left| \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d, k)\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right)}{d^h} \right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{d=2}^{n} \frac{1}{d^h} > 1 - \tfrac{1}{2}\zeta(h).$$

Теорема доказана.

Замечание. Для случая $h = 1$ член $C_n n^h$ заменяется остаточным членом $O(n \ln n)$. В отличие от случая $h \geqq 2$ порядок этого остаточного члена, вероятно, может быть несколько улучшен, если воспользоваться результатами А. З. Вальфиша [5] и Н. М. Коробова [6].

*Литература*


[1] *И. М. Виноградов:* Основы теории чисел. Издание шестое, Москва, 1953.

[2] *Е. К. Титчмарш:* Теория дзета-функции Римана. Москва, 1953.

[3] *Г. Полиа, Г. Сеге:* Задачи и теоремы из анализа 2, Москва, 1956.

[4] *B. Gyires*: Über eine Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes. Publs math., *5*, N. 1—2, 1957, 162—171.

[5] *A. Walfisz*: Über die Wirksamkeit einiger Abschätzungen trigonometrischer Summen. Acta arithm., *4*, N. 2, 1958, 108—180.

[6] *Н. М. Коробов:* Оценки тригонометрических сумм и их приложения. Успехи матем. наук, *13*, № 4, 1958, 185—192.


## Výtah

# ZOBECNĚNÍ JORDANOVY FUNKCE


O. M. FOMENKO, Krasnodar (SSSR)



V této práci se zavádí a vyšetřuje teoreticko-číselná funkce $J_h(n, k)$, která je zobecněním známé funkce Jordanovy.

Nechť $k, l, n, h$ jsou přirozená čísla, přičemž $(k, l) = 1$, $0 < l \leqq k$; symbol $(a, b, c, \ldots, d)$, kde jsou $a, b, c, \ldots, d$ přirozená čísla, značí největšího společného dělitele čísel $a, b, c, \ldots, d$. Uvažujme soustavu čísel

$$(\underbrace{l, l, \ldots, l}_{h \text{ čísel}}, n), (\underbrace{k + l, l, \ldots, l}_{h \text{ čísel}}, n), \ldots, (\underbrace{k(n-1) + l, k(n-1) + l, \ldots, k(n+1) + l}_{h \text{ čísel}}, n) .$$

Určíme funkci $J_h(n, k)$ jako počet čísel této soustavy, rovných 1. V práci je dokázáno, že

$$J_h(n, k) = n^h \prod_{p \backslash n,\, p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^h}\right).$$

Funkce Jordanova se dostane z funkce $J_h(n, k)$ pro $k = 1$. V práci se vyšetřují vlastnosti uvedené funkce, zvláště zobecnění známé determinantové identity Smithovy (věta 4) a určení asymptotického chování součtu $\sum_{m=1}^{n} J_h(m, k)$ — (věta 5).

## Résumé

# GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION DE JORDAN

O. M. FOMENKO, Krasnodar (URSS)

Dans ce travail, on introduit et étudie une fonction, $J_h(n, k)$ qui est généralisation de la fonction bien connue de Jordan de la théorie des nombres.

Soient $k, l, n, h$ des nombres naturels avec $(k, l) = 1$, $0 < l \leqq k$, le symbole $(a, b, c, \ldots, d)$ désignant le plus grand commun diviseur des nombres naturels $a, b, c, \ldots, d$. Considérons le système de $n^h$ nombres

$$(\underbrace{l, l, \ldots, l,}_{h \text{ nombres}} n), (\underbrace{k + l, l, \ldots, l,}_{h \text{ nombres}} n), \ldots, (\underbrace{k(n-1) + l, k(n-1) + l, \ldots, k(-1) + l,}_{h \text{ nombres}} n).$$

La fonction $J_h(n, k)$ sera définie par le nombre des nombres de ce système égaux à un. Dans le présent travail, on démontre que

$$J_h(n, k) = n^h \prod_{p \backslash n,\, p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^h}\right).$$

On obtient la fonction de Jordan à partir de la fonction $J_h(n, k)$ en y posant $k = 1$. Dans ce travail, on étudie les propriétés de cette fonction; nous en signalons en particulier une généralisation de l'identité bien connue de Smith (théorème 4) et le comportement asymptotique de la somme $\sum_{m=1}^{n} J_h(m, k)$ (théorème 5).