Ilja Černý

Elementární zavedení indexu bodu vzhledem k ploše

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 7--31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117358`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

ELEMENTÁRNÍ ZAVEDENÍ INDEXU BODU VZHLEDEM K PLOŠE

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 30. dubna 1959)

V článku se elementárním způsobem zavádí index bodu vzhledem k ploše a odvozují se některé jeho základní vlastnosti.

1. Buďte i, j, k celá čísla; označíme

$$A(i, j, k) = \tag{1}$$
$$= \mathsf{E}[x = (x_1, x_2, x_3) \in E_3;\ i - 1 \leqq x_1 \leqq i,\ j - 1 \leqq x_2 \leqq j,\ k - 1 \leqq x_3 \leqq k]\,.$$

Buď $\mathfrak{A}$ libovolný neprázdný konečný systém krychlí $A(i, j, k)$; označme krátce $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\kappa}$. Buď $\mathfrak{B} = \{B_j\}_{j=1}^{\sigma}$ systém všech stěn krychlí $A_i \in \mathfrak{A}$, které jsou stěnou jen jedné krychle z $\mathfrak{A}$. Označíme-li $A = \bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{\sigma} B_j$, je B hranicí A.

Dvě stěny B_j, $B_k \in \mathfrak{B}$ nazveme *sousední*, je-li jejich průnik úsečka (společná strana čtverců B_j, B_k). V dalším budeme všude předpokládat, že systém $\mathfrak{A}$ má tu vlastnost, že

(2) každá strana každé stěny z $\mathfrak{B}$ leží právě ve dvou různých stěnách z $\mathfrak{B}$.

Potom ke každé stěně $B_j \in \mathfrak{B}$ existují právě 4 různé sousední stěny $B_k \in \mathfrak{B}$ (jejichž průniky s B_j jsou právě jednotlivé strany B_j).

Poznámka. Skládá-li se $\mathfrak{A}$ jen z jediné krychle, je B (v topologickém smyslu) povrch koule. Skládá-li se $\mathfrak{A}$ z krychlí $A(i, j, k)$, pro něž je

buď $1 \leqq i \leqq 3;\ 1 \leqq j \leqq 2n - 1;\ k = 1$,
nebo $i = 1, 3;\ j = 2m - 1$, kde $1 \leqq m \leqq n;\ k = 2$,
nebo $1 \leqq i \leqq 3;\ j = 2m - 1$, kde $1 \leqq m \leqq n;\ k = 3$,

kde n je přirozené číslo, je B povrch „koule s n uchy". Patří-li do $\mathfrak{A}$ krychle $A(i, j, k)$, kde $1 \leqq i \leqq 3$, $1 \leqq j \leqq 3$, $1 \leqq k \leqq 3$, $(i, j, k) \neq (2, 2, 2)$, je B (v topologickém smyslu) sjednocením dvou disjunktních kulových ploch, atd.

Poznamenejme k tomu ještě, že lze dokázat, že každé kontinuum $C \subset E_3$, lokálně homeomorfní s E_2, je homeomorfní s povrchem některé „koule s n uchy" ($n \geqq 0$ celé). V dalším budeme studovat spojitá zobrazení množiny B do E_3; B je přitom vytvořena pomocí systémů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, přičemž platí (2).

2. Buď $\tau = \{a, b, c\}$ uspořádaná trojice bodů z E_3; budeme ztotožňovat trojice $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$ a $\{c, a, b\}$. Každou takovou trojici τ nazveme *orientovaným trojúhelníkem*. Každému orientovanému trojúhelníku $\tau = \{a, b, c\}$ přiřadíme tři uspořádané dvojice $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ a $\{c, a\}$, které nazveme *orientovanými stranami* τ.

Konvexní obal $T(\tau) = T(a, b, c)$ množiny, jejímiž prvky jsou body a, b, c, nazveme *trojúhelníkem o vrcholech* a, b, c; konvexní obaly množin, obsahujících po řadě body a, b; b, c; a, c, nazveme *stranami* $T(\tau)$ a označíme $S(a, b)$, $S(b, c)$, $S(a, c)$. (Těchto názvů budeme užívat i v případě, že některé prvky trojice τ jsou totožné; nastane-li to, budeme říkat, že τ a $T(\tau)$ jsou *degenerované*.)

Je-li dáno nějaké lineární zobrazení F trojúhelníka $T(\tau)$ do E_3, označíme $F(\tau) = \{F(a), F(b), F(c)\}$ (uspořádaná trojice), $F(\{a, b\}) = \{F(a), F(b)\}$ atd. (uspořádaná dvojice).

3. Buď $\mathfrak{B} = \{B_j\}_{j=1}^{\sigma}$ jako v 1. odstavci; každému j přiřaďme vektor $\gamma_j = \beta_j - \alpha_i$, kde β_j je střed B_j, α_i střed krychle $A_i \in \mathfrak{A}$, jejíž stěnou je B_j.

Trojúhelníkem na $\mathfrak{B}$ budeme rozumět libovolnou uspořádanou trojici $\tau = \{a, b, c\}$ bodů s těmito vlastnostmi:

(3) $\quad a, b, c$ jsou body, ležící na určité stěně $B_j \in \mathfrak{B}$;

(4) $\quad$ vnější součin $[\gamma_j, b - a, c - a] > 0$.

Z podmínky (4) plyne, že každý trojúhelník na $\mathfrak{B}$ je (podle definice) nedegenerovaný.

4. *Triangulací množiny* $\mathfrak{B}$ nazveme každý systém $\mathfrak{V} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ trojúhelníků $\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$ na $\mathfrak{B}$, který má tyto vlastnosti:

(5) $\quad$ označíme-li $T_n = T(\tau_n)$, je $B = \bigcup_{n=1}^{p} T_n$,

(6) $\quad$ je-li $1 \leqq m < n \leqq p$, je průnik $T_m \cap T_n$ buď $\emptyset$ nebo společný vrchol nebo společná strana obou trojúhelníků .

Body a_n, b_n, c_n $(1 \leqq n \leqq p)$ nazveme *vrcholy triangulace* $\mathfrak{V}$; množinu všech vrcholů $\mathfrak{V}$ označme $V(\mathfrak{V})$.

Poznámka 1. Protože každá strana každého $T(\tau_n)$ je stranou ještě právě jednoho $T(\tau_m)$ $(m \neq n)$, mají trojúhelníky $T(\tau_n)$ $(n = 1, \ldots, p)$ dohromady $\frac{3p}{2}$ různých stran. Z toho je patrné, že p *(počet trojúhelníků triangulace) je vždy sudé číslo.*

Je-li $T_m \cap T_n$ společná strana obou trojúhelníků, řekneme, že τ_m a τ_n jsou *sousední.*

Poznámka 2. Je patrné, že ke každému τ_n existují právě tři různé sousední trojúhelníky τ_m. Snadno se dokáže, že platí: *nechť má společná strana* T_m, T_n *např. vrcholy* a_m, b_m *resp.* a_n, b_n; *pak je* $a_m = b_n$, $b_m = a_n$. (Tedy: $\{a_n, b_n\}$ je orientovanou stranou τ_n, $\{b_n, a_n\}$ orientovanou stranou τ_m.)

Buď $\mathfrak{V}' = \{\tau'_m\}_{m=1}^{q}$, kde $\tau'_m = \{a'_m, b'_m, c'_m\}$, další triangulace $\mathfrak{B}$; označme $T'_m = T(\tau'_m)$. Je-li každé T'_m obsaženo v některém T_n, řekneme, že $\mathfrak{V}'$ je *zjemněním* $\mathfrak{V}$.

Poznámka 3. Snadno se ukáže, že *každé dvě triangulace mají společné zjemnění.*

Zaveďme konečně ještě toto označení:

$$(7) \qquad \nu(\mathfrak{B}) = \text{maximum průměrů všech } T_n\,.$$

Úmluva. Abychom se vyhnuli opakování, ponechme v celém článku tato označení: Pokud nebude řečeno nic jiného, bude triangulace $\mathfrak{B}$ složena z trojúhelníků $\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$, kde $1 \leqq n \leqq p$, $T_n = T(\tau_n)$, pro zjemnění $\mathfrak{B}'$ triangulace $\mathfrak{B}$ užívejme označení z tohoto odstavce, atd.

5. Buď $w \in E_3$, ρ jednotkový vektor; v celém článku bude

$$(8) \qquad P(w, \rho) = \mathsf{E}[x \in E_3;\; x = w + t\rho,\; t \geqq 0]\,.$$

Buď ještě $\tau = \{a, b, c\}$ orientovaný trojúhelník. Položme

$$(9) \qquad \eta(\tau; w, \rho) =$$

$= 0$, je-li buď $P(w, \rho) \cap T(\tau) = \emptyset$ nebo je-li τ degenerovaný nebo prochází-li $P(w, \rho)$ vrcholem $T(\tau)$;

$= \frac{1}{2}\operatorname{sgn}[\rho, b - a, c - a]$, prochází-li $P(w, \rho)$ některou stranou $T(\tau)$, nikoli však vrcholem ;

$= \operatorname{sgn}[\rho, b - a, c - a]$, je-li $P(w, \rho) \cap T(\tau) \neq \emptyset$, ale $P(w, \rho)$ neprochází žádnou stranou $T(\tau)$.

Označení. Je-li $\mathfrak{B}$ triangulace $\mathfrak{B}$, F zobrazení množiny B (viz 1. odstavec) do E_3, které je lineární na každém T_n, pišme $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$.

Je-li $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$, $w \in E_3$, ρ jednotkový vektor, označme

$$(10) \qquad \iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho) = \sum_{n=1}^{p} \eta(F(\tau_n); w, \rho)\,.$$

Poznámka. Znamená-li Φ posunutí souřadného systému v E_3, je zřejmě

$$(11) \qquad \eta(\Phi(\tau); \Phi(w), \rho) = \eta(\tau; w, \rho)\,,$$

$$(12) \qquad \iota(\mathfrak{B}, \Phi * F; \Phi(w), \rho) = \iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho)$$

($\Phi * F$ je přitom složené zobrazení). Je-li Φ lineární homogenní transformace souřadnic v E_3 s determinantem D, je

$$(13) \qquad \eta(\Phi(\tau); \Phi(w), \Phi(\rho)) = \operatorname{sgn} D \,.\, \eta(\tau; w, \rho)\,,$$

$$(14) \qquad \iota(\mathfrak{B}, \Phi * F; \Phi(w), \Phi(\rho)) = \operatorname{sgn} D \,.\, \iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho)\,.$$

6. Základní důležitost má pro nás toto tvrzení:

Věta. *Buď $\mathfrak{B}$ triangulace $\mathfrak{B}$, $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$, $w \in E_3 - F(B)$. Buďte ρ_1, ρ_2 dva jednotkové vektory, pro něž je*

$$(15) \qquad (P(w, \rho_1) \cup P(w, \rho_2)) \cap F(V(\mathfrak{B})) = \emptyset\,.$$

Pak je

$$(16) \qquad \iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho_1) = \iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho_2)\,.$$

Důkaz. Označme S jednotkovou sféru v E_3, tj. buď

$$S = \mathsf{E}[\rho \in E_3;\ \|\rho\| = 1] \tag{17}$$

(kde $\|\rho\|$ je norma vektoru ρ). Buď dále

$$R = \mathsf{E}[\rho \in S;\ P(w, \rho) \cap F(V(\mathfrak{B})) = \emptyset]\,. \tag{18}$$

Množina R vznikne tedy z S vynecháním konečného počtu bodů a je v důsledku toho souvislá a otevřená v S. Máme dokázat, že funkce $\iota(\rho) = \iota(\mathfrak{B}, F;\ w, \rho)$ je konstantní v R; k tomu stačí ukázat, že $\iota(\rho)$ je v R lokálně konstantní.

Zvolme pevně $\rho \in R$; pro libovolné $\sigma \in S$ označujme krátce

$$\eta_n(\sigma) = \eta(F(\tau_n);\ w, \sigma)\,,\quad P(\sigma) = P(w, \sigma)\,. \tag{19}$$

Zvolme očíslování trojúhelníků $\tau_n \in \mathfrak{B}$ tak, aby

$$T_1, \ldots, T_q \tag{20}$$

$(0 \leqq q \leqq p)$ byly právě všechny trojúhelníky T_n, pro něž

$$F(T_n) \cap P(\rho) \neq \emptyset\,. \tag{21}$$

Množina $\bigcup_{n=q+1}^{p} F(T_n)$ je kompaktní a nemá společné body s $P(\rho)$. Odtud plyne existence takového okolí $U_1(\rho) \subset R$, že pro $\sigma \in U_1(\rho)$ je $P(\sigma) \cap \bigcup_{n=q+1}^{p} F(T_n) = \emptyset$; tedy:

$$\sum_{n=q+1}^{p} \eta_n(\sigma) = 0 \text{ pro všechna } \sigma \in U_1(\rho)\,. \tag{22}$$

7. Zbývají trojúhelníky τ_n, kde $1 \leqq n \leqq q$. Rozdělme je na tři skupiny:

$$P(\rho) \text{ neprotíná žádnou stranu } F(T_n)\,, \tag{23'}$$

$$P(\rho) \text{ protíná dvě strany } F(T_n)\,, \tag{23''}$$

$$P(\rho) \text{ protíná právě jednu stranu } F(T_n)\,. \tag{23'''}$$

Volme očíslování tak, aby

$$\text{nastalo pro } r < n \leqq q, \text{ kde } 0 \leqq r \leqq q\,, \tag{23'}$$

$$\text{pro } s < n \leqq r, \text{ kde } 0 \leqq s \leqq r\,, \tag{23''}$$

$$\text{pro } 1 \leqq n \leqq s\,. \tag{23'''}$$

Předpokládejme, že platí (23′), tj. že $r < n \leqq q$. Pak se $P(\rho) \cap F(T_n)$ skládá z jediného (a to vnitřního) bodu trojúhelníka $F(T_n)$ a je $\eta_n(\rho) \neq 0$.

Volíme-li okolí $U_2(\rho) \subset R$ tak, že pro $\sigma \in U_2(\rho)$ a $r < n \leqq q$ protíná polopřímka $P(\sigma)$ jen vnitřek $F(T_n)$, bude jistě $\eta_n(\rho) = \eta_n(\sigma)$. Tedy:

$$\text{funkce } \sum_{n=r+1}^{q} \eta_n(\sigma) \text{ je konstantní v } U_2(\rho)\,. \tag{24}$$

8. Budeme vyšetřovat indexy $1 \leqq n \leqq r$. Poznamenejme, že pro taková n je podmínka $\eta_n(\rho) \neq 0$ ekvivalentní s tím, že $P(\rho)$ protíná jen jednu stranu $F(T_n)$ (tj. že

$1 \leqq n \leqq s$); označení stran (pro $1 \leqq n \leqq s$) volme tak, aby $P(\rho)$ protínala stranu $S(F(a_n), F(b_n))$.

Lemma. *Na množině indexů* $1 \leqq n \leqq s$ *lze definovat funkci* ϕ *tak, že platí:*

1. ϕ *je prostá,* 2. $1 \leqq \phi(n) \leqq s$, 3. $\phi(\phi(n)) = n$, 4. *existuje* $\xi \in E_1$ a $\omega < 0$ *tak, že*

$$F(b_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)}) = \omega(F(b_n) - F(a_n)) + \xi\rho\,. \tag{25}$$

Důkaz lemmatu. Buď $1 \leqq n_0 \leqq s$; existuje právě jeden trojúhelník τ_{n_1} ($1 \leqq \leqq n_1 \leqq p$), jehož stranou je $\{b_{n_0}, a_{n_0}\}$. Je ovšem dokonce $1 \leqq n_1 \leqq r$. Je-li $\eta_{n_1}(\rho) \neq 0$, klademe $\phi(n_0) = n_1$ a je $a_{n_1} = b_{n_0}, b_{n_1} = a_{n_0}$. Je-li $\eta_{n_1}(\rho) = 0$, tj. $s < n_1 \leqq r$, označíme $\{a_{n_1}, b_{n_1}\}$ onu stranu τ_{n_1}, pro niž je

$$P(\rho) \cap S(F(a_{n_1}),\ F(b_{n_1})) \neq \emptyset$$

a která je různá od $\{b_{n_0}, a_{n_0}\}$.

Snadno se ověří, že v prvním případě (tj. když $\eta_{n_1}(\rho) \neq 0$) platí (25), položíme-li $\omega = -1$, $\xi = 0$; ve druhém případě je naproti tomu

$$F(b_{n_1}) - F(a_{n_1}) = \omega_1(F(b_{n_0}) - F(a_{n_0})) + \xi_1\rho\,, \tag{26}$$

kde $\xi_1 \in E_1$, $\omega_1 > 0$ jsou vhodná čísla. (Právě vyslovená tvrzení jsou téměř zřejmá, uvědomíme-li si, že je lze geometricky formulovat takto: Buď Z rovina, určená bodem w a vektory $F(b_{n_0}) - F(a_{n_0})$ a ρ; (26) např. znamená, že $F(a_{n_0})$ a $F(a_{n_1})$ leží oba v jedné z polorovin, které v Z určuje přímka $P(\rho) \cup P(-\rho)$.)

V prvním případě jsme již definovali $\phi(n_0)$; ve druhém pokračujme takto: Nechť je již sestrojena prostá posloupnost

$$\tau_{n_0}, \tau_{n_1}, \ldots, \tau_{n_j} \quad (j \geqq 1)\,, \tag{27}$$

přičemž pro $1 \leqq i \leqq j$ je $s < n_i \leqq r$, $\{b_{n_{i-1}}, a_{n_{i-1}}\}$ je stranou τ_{n_i} a $\{a_{n_i}, b_{n_i}\} \neq \{b_{n_{i-1}}, a_{n_{i-1}}\}$ je ona strana τ_{n_i}, pro niž

$$P(\rho) \cap S(F(a_{n_i}),\ F(b_{n_i})) \neq \emptyset\,,$$

a

$$F(b_{n_i}) - F(a_{n_i}) = \omega_i(F(b_{n_0}) - F(a_{n_0})) + \xi_i\rho\,, \tag{28}$$

kde $\xi_i \in E_1$ a $\omega_i > 0$ jsou vhodná čísla.

Existuje právě jeden trojúhelník $\tau_{n_{j+1}}$, jehož stranou je $\{b_{n_j}, a_{n_j}\}$; přitom ovšem $1 \leqq n_{j+1} \leqq r$. Je-li $\eta_{n_{j+1}}(\rho) \neq 0$, položme $\phi(n_0) = n_{j+1}$; je $b_{n_{j+1}} = a_{n_j}$, $a_{n_{j+1}} = b_{n_j}$, takže podle (28) platí (25). Je-li $\eta_{n_{j+1}}(\rho) = 0$, buď $\{a_{n_{j+1}}, b_{n_{j+1}}\} \neq \{b_{n_j}, a_{n_j}\}$ ona strana $\tau_{n_{j+1}}$, pro niž je

$$P(\rho) \cap S(F(a_{n_{j+1}}),\ \ F(b_{n_{j+1}})) \neq \emptyset\,.$$

Snadno se ukáže, že pak platí (28) i pro $i = j + 1$.

Tvrdím, že v obou případech ($\eta \neq 0$ a $\eta = 0$) je posloupnost

$$\tau_{n_0}, \tau_{n_1}, \ldots, \tau_{n_j}, \tau_{n_{j+1}} \tag{29}$$

prostá. Je-li $\eta_{n_{j+1}}(\rho) \neq 0$, je $\tau_{n_{j+1}} = \tau_{\phi(n)} \neq \tau_{n_0}$ podle (25) a také $\tau_{n_{j+1}} \neq \tau_{n_i}$ pro $1 \leqq i \leqq j$, neboť $\eta_{n_i}(\rho) = 0$ pro tato i. Je-li $\eta_{n_{j+1}}(\rho) = 0$, je $\tau_{n_{j+1}} \neq \tau_{n_0}$ (neboť $\eta_{n_0}(\rho) \neq$

$\neq 0$); kdyby (29) nebyla prostá posloupnost, existovalo by vzhledem k prostotě (27) i tak, že $1 \leqq i \leqq j$, $\tau_{n_{j+1}} = \tau_{n_i}$. Trojúhelníky $\tau_{n_{i-1}}, \tau_{n_{i+1}}, \tau_{n_j}$ by byly sousední k τ_{n_i}. Kdyby $n_j = n_{i+1}$, měl by trojúhelník T_{n_i} s T_{n_j} společné dvě strany, což je spor. Jsou tedy (vzhledem k prostotě (27)) $\tau_{n_{i-1}}, \tau_{n_{i+1}}, \tau_{n_j}$ od sebe různé. $P(\rho)$ však protíná společnou stranu $F(T_{n_i} \cap T_{n_{i-1}})$, společnou stranu $F(T_{n_i} \cap T_{n_{i+1}})$ a společnou stranu $F(T_{n_i} \cap T_{n_j})$, tj. protíná všechny 3 strany $F(T_{n_i})$, což je spor.

Z podmínky, že posloupnost (27) je prostá pro každé j, pro něž ji lze sestrojit, (a z podmínky $1 \leqq n_i \leqq r$) plyne ihned, že konstrukce musí skončit u některého j, pro něž $\eta_{n_j}(\rho) \neq 0$, načež jsme hotovi (klademe $\phi(n_0) = n_j$).

Z konstrukce je patrné, že ϕ má všechny žádané vlastnosti. Tím je důkaz lemmatu dokončen; vraťme se k důkazu věty z odst. 6.

9. Snadno se zjistí, že

$$\text{funkce } \sum_{n=s+1}^{r} \eta_n(\sigma) \text{ je konstantní (rovna 0) v celém } S\,, \tag{30}$$

neboť $P(\sigma)$ buď neprotíná $F(T_n)$ nebo protíná dvě jeho strany.

Buď $1 \leqq n \leqq s$; definujme zobrazení h množiny $E_3 - \{w\}$ na S vztahem

$$h(u) = \frac{u - w}{\|u - w\|} \tag{31}$$

(kde $\|u - w\|$ je vzdálenost bodů u a w). Označme

$$D' = h(F(T_n))\,, \quad D'' = h(F(T_{\phi(n)}))\,, \tag{32}$$

$$C = h(S(F(a_n), F(b_n))) \cap h(S(F(a_{\phi(n)}), F(b_{\phi(n)})))\,; \tag{33}$$

D', D'' jsou pak sférické trojúhelníky, C oblouk na S, obsahující bod ρ uvnitř (tj. ne jako krajní bod).

Jsou možné dva případy:

$$\rho \text{ leží na hranici } D' \cup D''\,, \tag{34}$$

$$\rho \text{ leží uvnitř množiny } D' \cup D''\,. \tag{35}$$

V případě (34) (resp. (35)) leží vrcholy $F(c_n)$, $F(c_{\phi(n)})$ v témže poloprostoru určeném v E_3 rovinou procházející body w, $F(a_n)$, $F(b_n)$ (resp. v různých poloprostorech). Z toho plyne podle (25), že v případě (34) je

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}[\rho, F(b_n) - F(a_n), F(c_n) - F(a_n)] = \\ &= -\operatorname{sgn}[\rho, F(b_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)}), F(c_n) - F(a_n)] = \\ &= -\operatorname{sgn}[\rho, F(b_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)}), F(c_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)})]\,, \end{aligned} \tag{36}$$

kdežto v případě (35) bude

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}[\rho, F(b_n) - F(a_n), F(c_n) - F(a_n)] = \\ &= \operatorname{sgn}[\rho, F(b_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)}), F(c_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)})]\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Z toho plyne, že

$$\tag{38} \begin{aligned} &\eta_n(\rho) + \eta_{\phi(n)}(\rho) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}[\rho, F(b_n) - F(a_n), F(c_n) - F(a_n)] + \\ &+ \operatorname{sgn}[\rho, F(b_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)}), F(c_{\phi(n)}) - F(a_{\phi(n)})]) = \\ &= \begin{cases} 0 \text{ v případě (34)}, \\ \pm 1 \text{ v případě (35)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Platí-li (34), zvolme okolí $U(\rho) \subset R$ tak, aby

$$\tag{39} U(\rho) \cap (D' \cup D'') = U(\rho) \cap D' \cap D'' ;$$

dokážeme, že pro $\sigma \in U(\rho)$ je

$$\tag{40} \eta_n(\sigma) + \eta_{\phi(n)}(\sigma) = 0 .$$

Je-li $\sigma \in C$, je (40) správné ze stejných příčin jako pro ρ. Není-li $\sigma \in C$, pak $P(\rho)$ buď neprotíná ani $F(T_n)$ ani $F(T_{\phi(n)})$, nebo protíná oba tyto trojúhelníky (ve vnitřních bodech); v prvním případě je (40) zřejmé, ve druhém je

$$\eta_n(\sigma) = 2\eta_n(\rho) , \quad \eta_{\phi(n)}(\sigma) = 2\eta_{\phi(n)}(\rho) ,$$

takže (40) opět platí.

Platí-li (35), zvolme okolí $U(\rho) \subset R$ tak, aby $U(\rho)$ leželo uvnitř $D' \cup D''$. Pro $\sigma \in U(\rho)$ je pak

$$\tag{41} \eta_n(\sigma) + \eta_{\phi(n)}(\sigma) = \eta_n(\rho) + \eta_{\phi(n)}(\rho) = 2\eta_n(\rho) \quad (= \pm 1) .$$

Je-li totiž $\sigma \in C$, je (41) zřejmé. Je-li $\sigma \notin C$, protíná $P(\sigma)$ právě jeden z trojúhelníků $F(T_n)$, $F(T_{\phi(n)})$ (a to ve vnitřním bodě). Je-li např. $F(T_n) \cap P(\sigma) \neq \emptyset$, je

$$\eta_n(\sigma) = 2\eta_n(\rho) , \quad \eta_{\phi(n)}(\sigma) = 0 ,$$

takže (41) platí.

Z toho, co jsme dokázali v odst. 9 a v lemmatu odst. 8, plyne existence $U_3(\rho)$, pro něž platí:

$$\tag{42} \text{funkce } \sum_{n=1}^{s} \eta_n(\sigma) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{s} (\eta_n(\sigma) + \eta_{\phi(n)}(\sigma)) \text{ je konstantní v } U_3(\rho) .$$

Výsledky, shrnuté v (22), (24), (30) a (42), dokazují větu, vyslovenou v odstavci 6.

10. Vzhledem k platnosti věty z odst. 6 lze zavést tuto definici:

Buď $\{\mathfrak{V}, F\} \in \mathfrak{P}$, $w \in E_3 - F(B)$; *definujme*

$$\tag{43} \operatorname{ind}(\mathfrak{V}, F; w) = \iota(\mathfrak{V}, F; w, \rho) ,$$

kde ρ *je libovolný jednotkový vektor, pro nějž*

$$\tag{44} P(w, \rho) \cap F(V(\mathfrak{V})) = \emptyset .$$

Poznámka 1. Vektor ρ lze volit vždy tak, aby $P(w, \rho)$ neprotínala žádnou stranu žádného $F(T_n)$, takže každé $\eta(F(\tau_n); w, \rho)$ je celé číslo (± 1 nebo 0). Z toho plyne, že $\operatorname{ind}(\mathfrak{V}, F; w)$ je též celé číslo.

Poznámka 2. Z poznámky v odst. 5 ihned plyne, že $\operatorname{ind}(\mathfrak{V}, F; w)$ je invariantní vzhledem k posunutí souřadného systému v E_3 i vzhledem k lineární homogenní transformaci souřadnic v E_3 s kladným determinantem (při transformaci se záporným determinantem mění ind $(\mathfrak{B}, F; w)$ znaménko).

Dokažme ještě tuto větu:

Věta. *Je-li $\mathfrak{B}'$ zjemnění $\mathfrak{B}$, je*

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{B}', F; w) = \operatorname{ind}(\mathfrak{B}, F; w) \tag{45}$$

pro každé $w \in E_3 - F(B)$.

Důkaz. Ponechme (jak jsme se již umluvili) pro $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$ označení z odst. 4. Zvolme ρ tak, že

$$P(w, \rho) \text{ neprotíná žádnou stranu žádného } F(T'_m)\,; \tag{46}$$

zvolme označení tak, aby $F(T'_m) \cap P(w, \rho) \neq \emptyset$ právě tehdy, je-li $1 \leqq m \leqq r$ (kde $r \geqq 0$). Podle (46) pak ovšem platí:

$$1 \leqq m \leqq r \Rightarrow \eta(F(\tau'_m); w, \rho) \neq 0\,. \tag{47}$$

Definujme funkci ϕ na množině indexů $1 \leqq m \leqq r$ takto: $\phi(m)$ je onen index, pro který $T_{\phi(m)} \supset T'_m$. Snadno se ověří, že zobrazení ϕ je prosté (neboť v důsledku linearity F na $T_{\phi(m)}$ a vztahu (46) neprotíná $P(w, \rho)$ více než jeden z trojúhelníků $F(T'_{m_1})$, pro něž $T'_{m_1} \subset T_{\phi(m)}$) a že pro každý index n $(1 \leqq n \leqq p)$, pro nějž $F(T_n) \cap P(w, \rho) \neq \emptyset$, existuje m $(1 \leqq m \leqq r)$ tak, že $n = \phi(m)$.

Je tedy

$$\iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho) = \sum_{n=1}^{p} \eta(F(\tau_n); w, \rho) = \sum_{m=1}^{r} \eta(F(\tau_{\phi(m)}); w, \rho)\,, \tag{48}$$

$$\iota(\mathfrak{B}', F; w, \rho) = \sum_{m=1}^{q} \eta(F(\tau'_m); w, \rho) = \sum_{m=1}^{r} \eta(F(\tau'_m); w, \rho)\,, \tag{49}$$

a stačí dokázat, že

$$\eta(F(\tau_{\phi(m)}); w, \rho) = \eta(F(\tau'_m); w, \rho) \tag{50}$$

pro $1 \leqq m \leqq r$. Zvolme pevně takové m; protože F je prosté v $T_{\phi(m)}$ (jinak by $F(T_{\phi(m)})$ byl degenerovaný), existuje prosté lineární zobrazení G prostoru E_3 na E_3, které na $T_{\phi(m)}$ splývá s F. Buď ještě $\Phi = G - G(0)$.

Z toho, jak jsme definovali orientaci trojúhelníků na $\mathfrak{B}$, plyne, že base (v rovině, která obsahuje onu stěnu $B_j \in \mathfrak{B}$, na níž leží T'_m), složené z vektorů $b'_m - a'_m$, $c'_m - a'_m$ resp. $b_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}$, $c_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}$ jsou souhlasně orientované. Je tedy

$$\operatorname{sgn}\left[\Phi_{-1}(\rho), b'_m - a'_m, c'_m - a'_m\right] = \operatorname{sgn}\left[\Phi_{-1}(\rho), b_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}, c_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}\right]\,, \tag{51}$$

takže — označíme-li D determinant transformace Φ —

$$\begin{aligned} \eta(F(\tau'_m); w, \rho) &= \operatorname{sgn}\left[\rho, F(b'_m) - F(a'_m), F(c'_m) - F(a'_m)\right] = \\ &= \operatorname{sgn} D \,.\, \operatorname{sgn}\left[\Phi_{-1}(\rho), b'_m - a'_m, c'_m - a'_m\right] = \\ &= \operatorname{sgn} D \,.\, \operatorname{sgn}\left[\Phi_{-1}(\rho), b_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}, c_{\phi(m)} - a_{\phi(m)}\right] = \\ &= \operatorname{sgn}\left[\rho, F(b_{\phi(m)}) - F(a_{\phi(m)}), F(c_{\phi(m)}) - F(a_{\phi(m)})\right] = \eta(F(\tau_{\phi(m)}); w, \rho)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

11. Věta. *Funkce* ind $(\mathfrak{B}, F; w)$ *(proměnné* w*) je konstantní v každé komponentě množiny* $E_3 - F(B)$*. V neomezené komponentě této množiny je rovna* 0.

Důkaz. Buď $w_0 \in E_3 - F(B)$; zvolme ρ tak, aby $P(w_0, \rho)$ neprotínala žádnou stranu žádného $F(T_n)$. Pak jsou všechny funkce $\eta(\tau_n; w, \rho)$ (proměnné w; ρ nechť je pevné) konstantní v jistém okolí bodu w_0, a totéž platí tedy i o $\iota(\mathfrak{B}, F; w, \rho) = $ $=$ ind $(\mathfrak{B}, F; w)$. Z lokální konstantnosti v otevřené množině $E_3 - F(B)$ plyne konstantnost v každé komponentě.

V neomezené komponentě $E_3 - F(B)$ existují body w tak, že při vhodné volbě ρ je

$$P(w, \rho) \cap F(B) = \emptyset ,$$

takže ind $(\mathfrak{B}, F; w) = 0$.

12. Zaveďme tato označení: Je-li $w \in E_3$, $\emptyset \neq M \subset E_3$, buď

$$d(M, w) = \inf_{x \in M} \|x - w\| . \tag{53}$$

Jsou-li F, G dvě spojitá zobrazení B do E_3, označme

$$\|F - G\| = \max_{\xi \in B} \|F(\xi) - G(\xi)\| . \tag{54}$$

Věta. *Buď* $w \in E_3$, $\delta > 0$, $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$, $\{\mathfrak{W}, G\} \in \mathfrak{P}$. *Je-li*

$$d(F(B), w) > \delta \tag{55}$$

a

$$\|F - G\| < \delta , \tag{56}$$

je

$$\text{ind}\,(\mathfrak{B}, F; w) = \text{ind}\,(\mathfrak{W}, G; w) . \tag{57}$$

Důkaz. Protože podle věty z odst. 10 lze bez podstatných změn situace přejít ke společnému zjemnění $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{W}$, můžeme předpokládat, že $\mathfrak{W} = \mathfrak{B}$.

Označme vrcholy krychle $A_0 = A(1, 1, 1)$ takto:

$$\begin{gathered} \lambda_1 = (1, 0, 0) , \quad \lambda_2 = (1, 1, 0) , \quad \lambda_3 = (0, 1, 0) , \quad \lambda_4 = (0, 0, 0) , \\ \lambda_5 = (1, 0, 1) , \quad \lambda_6 = (1, 1, 1) , \quad \lambda_7 = (0, 1, 1) , \quad \lambda_8 = (0, 0, 1) . \end{gathered} \tag{58}$$

Triangulace $\mathfrak{S}$ množiny $\mathfrak{B}_0$, složené ze šesti stěn A_0, nechť se skládá z trojúhelníků

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_6\} , & \chi_2 &= \{\lambda_1, \lambda_6, \lambda_5\} , \\ \chi_3 &= \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_7\} , & \chi_4 &= \{\lambda_2, \lambda_7, \lambda_6\} , \\ \chi_5 &= \{\lambda_3, \lambda_4, \lambda_8\} , & \chi_6 &= \{\lambda_3, \lambda_8, \lambda_7\} , \\ \chi_7 &= \{\lambda_4, \lambda_1, \lambda_5\} , & \chi_8 &= \{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_8\} , \\ \chi_9 &= \{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\} , & \chi_{10} &= \{\lambda_5, \lambda_7, \lambda_8\} , \\ \chi_{11} &= \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2\} , & \chi_{12} &= \{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_4\} . \end{aligned} \tag{59}$$

Pro $1 \leqq n \leqq p$ definujme zobrazení F_n těmito podmínkami:

$$\begin{gathered} F_n(\lambda_1) = F_n(\lambda_4) = G(a_n) , \quad F_n(\lambda_2) = G(b_n) , \quad F_n(\lambda_3) = G(c_n) , \\ F_n(\lambda_5) = F_n(\lambda_8) = F(a_n) , \quad F_n(\lambda_6) = F(b_n) , \quad F_n(\lambda_7) = F(c_n) , \end{gathered} \tag{60}$$

(61) $$\{\mathfrak{S}, F_n\} \in \mathfrak{P}\,.$$

Vzhledem k podmínkám (55) a (56) existuje pro každé n poloprostor, obsahující bod w na hranici, v němž leží celá množina $F_n(B_0)$, kde B_0 je povrch A_0. Z toho plyne podle věty z odst. 11, že

(62) $$\operatorname{ind}(\mathfrak{S}, F_n; w) = 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq n \leqq p\,.$$

Zvolme ρ tak, že $P(w, \rho) \cap F_n(V(\mathfrak{S})) = \emptyset$ pro $1 \leqq n \leqq p$. Jest

(63) $$\eta(F_n(\chi_j); w, \rho) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 7, 8, 10, 12\,,$$

neboť $F_n(\chi_j)$ je pro tato j degenerovaný; odtud plyne, že

(64) $$0 = \sum_{n=1}^{p} \operatorname{ind}(\mathfrak{S}, F_n; w) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=1}^{12} \eta(F_n(\chi_j); w, \rho) =$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=9,11} + \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=7,8,10,12} + \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=1}^{6} =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{p} \eta(F(\tau_n); w, \rho) - \sum_{n=1}^{p} \eta(G(\tau_n); w, \rho)\right) + \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=1}^{6} \eta(F_n(\chi_j); w, \rho) =$$
$$= \operatorname{ind}(\mathfrak{B}, F; w) - \operatorname{ind}(\mathfrak{B}, G; w) + \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=1}^{6} \eta(F_n(\chi_j); w, \rho)\,.$$

Naše věta bude dokázána, ukážeme-li, že

(65) $$\sum_{n=1}^{p} \sum_{j=1}^{6} \eta(F_n(\chi_j); w, \rho) = 0\,.$$

Zvolme některou stranu některého trojúhelníka τ_n $(1 \leqq n \leqq p)$, např. $\{a_n, b_n\}$; pak je $\{b_n, a_n\}$ stranou právě jednoho trojúhelníka $\tau_m \in \mathfrak{B}$. Budeme předpokládat, že je to strana $\{a_m, b_m\}$ (takže $a_m = b_n$, $b_m = a_n$). V ostatních případech lze postupovat analogicky.

Dále je

(66) $$\begin{aligned} F_n(\chi_1) &= \{G(a_n), G(b_n), F(b_n)\}\,, \\ F_n(\chi_2) &= \{G(a_n), F(b_n), F(a_n)\}\,, \\ F_m(\chi_1) &= \{G(a_m), G(b_m), F(b_m)\} = \{G(b_n), G(a_n), F(a_n)\}\,, \\ F_m(\chi_2) &= \{G(a_m), F(b_m), F(a_m)\} = \{G(b_n), F(a_n), F(b_n)\}\,. \end{aligned}$$

Definujeme-li zobrazení Φ podmínkami $\{\mathfrak{S}, \Phi\} \in \mathfrak{P}$,

(67) $$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1) &= \Phi(\lambda_8) = F(a_n)\,, & \Phi(\lambda_2) &= \Phi(\lambda_5) = G(a_n)\,, \\ \Phi(\lambda_3) &= \Phi(\lambda_6) = G(b_n)\,, & \Phi(\lambda_4) &= \Phi(\lambda_7) = F(b_n)\,, \end{aligned}$$

je podle podmínek (55) a (56), z nichž plyne, že $\Phi(B_0)$ leží v určitém poloprostoru obsahujícím bod w na hranici,

(68) $$\operatorname{ind}(\mathfrak{S}, \Phi; w) = 0\,.$$

Snadno se ověří, že pro $i = 1, 2, 3, 4$ vznikne trojúhelník $\Phi(\chi_{2i-1})$ z trojúhelníka $\Phi(\chi_{2i})$ lichou permutací, takže

$$\sum_{i=1}^{8} \eta(\Phi(\chi_i); w, \rho) = 0 ; \tag{69}$$

dále je

$$\sum_{i=9}^{12} \eta(\Phi(\chi_i); w, \rho) = \sum_{\substack{j=1,2 \\ k=m,n}} \eta(F_k(\chi_j); w, \rho) . \tag{70}$$

Z (68) a (69) plyne, že součet vpravo v (70) se rovná 0. Odtud je dále patrné, že všechny členy vlevo v (65) se (po čtyřech) ruší. Tím je důkaz věty dokončen.

13. Buď Φ spojité zobrazení B do E_3, buďte $\mathfrak{B}_k = \{\tau_n^k\}_{n=1}^{p_k}$ triangulace $\mathfrak{B}$, pro něž $v(\mathfrak{B}_k) \to 0$ ($v(\mathfrak{B})$ je definováno v (7)). Každému $\mathfrak{B}_k$ přiřaďme zobrazení F_k tak, že $\{\mathfrak{B}_k, F_k\} \in \mathfrak{P}$ a že

$$F_k(\xi) = \Phi(\xi) \quad \text{pro} \quad \xi \in V(\mathfrak{B}_k) . \tag{71}$$

Pak je v důsledku stejnoměrné spojitosti Φ na B

$$\|\Phi - F_k\| \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty , \tag{72}$$

takže také

$$\|F_k - F_l\| \to 0 \quad \text{pro} \quad k, l \to \infty . \tag{73}$$

Podle věty z odst. 12 odtud plyne, že ke každému $w \in E_3 - \Phi(B)$ existuje index $k(w)$ tak, že

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{B}_k, F_k; w) = \operatorname{ind}(\mathfrak{B}_{k(w)}, F_{k(w)}; w) \quad \text{pro} \quad k \geqq k(w) ; \tag{74}$$

tím spíše existuje tedy i

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{ind}(\mathfrak{B}_k, F_k; w) . \tag{75}$$

Tato limita nezávisí ovšem na volbě posloupnosti $\{\mathfrak{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ (pro niž je $v(\mathfrak{B}_k) \to 0$), takže lze definovat:

$$\operatorname{ind}_\Phi w = \lim_{k \to \infty} \operatorname{ind}(\mathfrak{B}_k, F_k; w) , \tag{76}$$

kde $\{\mathfrak{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost triangulací $\mathfrak{B}$, pro niž je $v(\mathfrak{B}_k) \to 0$, F_k jsou definována jako nahoře, $w \in E_3 - \Phi(B)$.

Je-li $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$ a je-li $\{\mathfrak{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost zjemnění triangulace $\mathfrak{B}$, přičemž $v(\mathfrak{B}_k) \to 0$, je podle věty z odst. 10

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{B}, F; w) = \operatorname{ind}(\mathfrak{B}_k, F; w)$$

pro všechna k (a všechna $w \in E_3 - F(B)$. Odtud plyne, že pro $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$ je

$$\operatorname{ind}_F w = \operatorname{ind}(\mathfrak{B}, F; w) . \tag{77}$$

Označení. Buď Φ spojité zobrazení B do E_3, $\mathfrak{B}$ triangulace $\mathfrak{B}$. Budeme psát

$$\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}(\Phi)\,, \tag{78}$$

je-li F definováno podmínkami: $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}$ a $F(\xi) = \Phi(\xi)$ pro všechna $\xi \in V(\mathfrak{B})$.

14. Věta. A) *Buď* $w \in E_3$, $\delta > 0$; *buďte* Φ, Ψ *dvě spojitá zobrazení* B *do* E_3, *pro něž platí:*

$$d(\Phi(B), w) > \delta\,, \tag{79}$$

$$\|\Phi - \Psi\| < \delta\,. \tag{80}$$

Pak je

$$\mathrm{ind}_\Phi\, w = \mathrm{ind}_\Psi\, w\,. \tag{81}$$

B) *Buď* Φ *spojité zobrazení* B *do* E_3; *pak je* $\mathrm{ind}_\Phi\, w$ *konstantní v každé komponentě množiny* $E_3 - \Phi(B)$. *V neomezené komponentě uvedené množiny je* $\mathrm{ind}_\Phi\, w = 0$.

Důkaz. A) Označme

$$\Delta = \min\,(d(\Phi(B), w) - \delta, \delta - \|\Phi - \Psi\|) > 0\,; \tag{82}$$

zvolme triangulace $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{W}$ množiny $\mathfrak{B}$ tak, aby pro $\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}(\Phi)$, $\{\mathfrak{W}, G\} \in \mathfrak{P}(\Phi)$ platilo:

$$\mathrm{ind}_F\, w = \mathrm{ind}_\Phi\, w\,, \quad \mathrm{ind}_G\, w = \mathrm{ind}_\Psi\, w \tag{83}$$

(což lze podle (76) a (77)), a

$$\|F - \Phi\| < \frac{\Delta}{2}\,, \quad \|G - \Psi\| < \frac{\Delta}{2}\,. \tag{84}$$

Snadno se zjistí, že jsou splněny podmínky (55) a (56) z věty odst. 12, odkud podle (57), (77) a (83) plyne (81).

B) Buď $w_0 \in E_3 - F(B)$ a položme $\delta = \frac{1}{2}d(w_0, \Phi(B))$. Sestrojme dále $\{\mathfrak{B}, F\} \in \in \mathfrak{P}(\Phi)$ tak, aby

$$\|F - \Phi\| < \delta\,. \tag{85}$$

Okolí $U(w_0, \delta)$ je disjunktní s $F(B)$, takže je obsaženo v jedné komponentě množiny $F(B)$. Podle věty z odst. 11 je $\mathrm{ind}_F\, w$ konstantní v $U(w_0, \delta)$; podle A) je $\mathrm{ind}_\Phi\, w = = \mathrm{ind}_F\, w$ v $U(w_0, \delta)$. Je tedy $\mathrm{ind}_\Phi\, w$ lokálně konstantní v $E_3 - \Phi(B)$, tedy konstantní v každé komponentě $E_3 - \Phi(B)$.

15. Buď $\mathfrak{B}$ triangulace $\mathfrak{B}$, $\xi \in V(\mathfrak{B})$. *Hvězdou triangulace* $\mathfrak{B}$ *o středu* ξ nazveme uspořádaný systém

$$\mathfrak{H} = \{\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \ldots, \tau_{i_r}\} \tag{86}$$

trojúhelníků z $\mathfrak{B}$, který má tyto vlastnosti:

A) $\mathfrak{H}$ obsahuje všechna $\tau_n \in \mathfrak{B}$, která mají vrchol ξ.

B) Uspořádání $\mathfrak{H}$ je takové, že trojúhelníky τ_{i_j}, $\tau_{i_{j+1}}$ $(j = 1, \ldots, r - 1)$, jakož i τ_{i_r}, τ_{i_1} jsou sousední.

Pro jednoduchost ještě budeme předpokládat, že označení vrcholů τ_{i_j} je zvoleno tak, že

C) $c_{i_j} = \xi$ pro $j = 1, \ldots, r$, takže $b_{i_j} = a_{i_{j+1}}$ pro $j = 1, \ldots, r-1$, $b_{i_r} = a_{i_1}$.

Je patrné, že *systém všech $\tau_n \in \mathfrak{B}$, která mají vrchol ξ, tvoří při vhodném uspořádání (a označení vrcholů) hvězdu.*

Buď (86) hvězda $\mathfrak{B}$ o středu ξ. Položme

$$\lambda(t) = a_{i_j} + (t - j + 1)(b_{i_j} - a_{i_j}) \quad \text{pro} \quad t \in \langle j-1, j \rangle, \tag{87}$$

kde $j = 1, \ldots, r$. Funkce λ je tedy definována v intervalu $\langle 0, r \rangle$ a obraz $|\lambda| = \lambda(\langle 0, r \rangle)$ tohoto intervalu při zobrazení λ je hranicí (vzhledem k množině B) množiny

$$|\mathfrak{H}| = \bigcup_{j=1}^{r} T(\tau_{i_j}) . \tag{88}$$

Tím jsme každé triangulaci $\mathfrak{B}$ a každému jejímu vrcholu ξ přiřadili jistou křivku λ (pro jednoduchost nevyznačujeme závislost λ na $\mathfrak{B}$ a ξ). Systém všech křivek λ – při pevném bodě $\xi \in B$ a proměnném $\mathfrak{B}$ probíhajícím množinu všech triangulací, které mají vrchol ξ – označíme $J(\xi)$.

16. Buď $z \in E_3$; buďte X', X'' lineárně nezávislé vektory v E_3; buď ϕ spojité zobrazení intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ do roviny

$$R = \mathrm{E}[x; x = z + x'X' + x''X'', x', x'' \in E_1], \tag{89}$$

pro něž $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ a $z \notin |\phi| = \phi(\langle t_1, t_2 \rangle)$. Pak je pro každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$$\phi(t) = z + \phi'(t)\, X' + \phi''(t)\, X'' , \tag{90}$$

přičemž ϕ' a ϕ'' jsou spojité (reálné) funkce v $\langle t_1, t_2 \rangle$. Položme $\tilde{\phi} = (\phi', \phi'')$ a definujme

$$\operatorname{ind}(z; X', X''; \phi) = \operatorname{ind}_{\tilde{\phi}} 0 \tag{91}$$

(vpravo je obvyklý index bodu 0 vzhledem ke křivce $\tilde{\phi}$ v E_2).

Je-li $\{Y', Y''\}$ jiná base v R, D determinant přechodu od base $\{X', X''\}$ k basi $\{Y', Y''\}$, je

$$\operatorname{ind}(z; Y', Y''; \phi) = \operatorname{ind}(z; X', X''; \phi) \,.\, \operatorname{sgn} D . \tag{92}$$

Nechť ϕ je speciálně křivka definovaná takto: Buď $\tau = \{a, b, c\}$ nedegenerovaný trojúhelník, přičemž $T = T(\tau) \subset R$ a bod z leží uvnitř T. Označme ϕ zobrazení intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ do R, dané podmínkami

$$\phi(t) = \begin{cases} a + (b-a)\,t & \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle , \\ b + (c-b)(t-1) & \text{pro} \quad t \in \langle 1, 2 \rangle , \\ c + (a-c)(t-2) & \text{pro} \quad t \in \langle 2, 3 \rangle . \end{cases} \tag{93}$$

Pak je (vzhledem k tomu, že $\operatorname{ind}(z; b-a, c-a; \phi) = 1$)

$$\operatorname{ind}(z; X', X''; \phi) = \operatorname{sgn} D , \tag{94}$$

kde D je determinant přechodu od base $\{X', X''\}$ k basi $\{b-a, c-a\}$.

Poznámka. *Buďte* $\{\rho, X', X''\}$, $\{\rho, Y', Y''\}$ *dvě base v* E_3, D *determinant přechodu od první base ke druhé; buď* p *promítání do roviny*

$$R^* = \mathsf{E}[y; y = z + y'Y' + y''Y'',\ y', y'' \in E_1]$$

ve směru ρ. *Pak je*

$$\operatorname{ind}(z; Y', Y''; p * \phi) = \operatorname{sgn} D \,.\, \operatorname{ind}(z; X', X''; \phi)\,.$$

Důkaz. Nechť

$$Y' = \alpha'\rho + \beta'X' + \gamma'X''\,, \quad Y'' = \alpha''\rho + \beta''X' + \gamma''X''\,;$$

pak je $D = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$. Existují funkce α, ψ', ψ'' tak, že (pro všechna $t \in \langle t_1, t_2\rangle$) je

$$p(\phi(t)) = \phi(t) - \alpha(t)\,\rho = z + \psi'(t)\,Y' + \psi''(t)\,Y''\,.$$

Dosazením za $\phi(t)$ podle (90), za Y', Y'' podle předcházejících rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}\phi'X' + \phi''X'' &= (\alpha + \alpha'\psi' + \alpha''\psi'')\,\rho + \\ &+ (\beta'\psi' + \beta''\psi'')\,X' + (\gamma'\psi' + \gamma''\psi'')\,X''\,;\end{aligned}$$

z toho plyne, že

$$\phi' = \beta'\psi' + \beta''\psi''\,, \quad \phi'' = \gamma'\psi' + \gamma''\psi''$$

takže — klademe-li $\tilde{\psi} = (\psi', \psi'')$ — je skutečně

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(z; X', X''; \phi) &= \operatorname{ind}_{\tilde{\phi}} 0 = \operatorname{sgn} D \,.\, \operatorname{ind}_{\tilde{\psi}} 0 = \\ &= \operatorname{sgn} D \,.\, \operatorname{ind}(z; Y', Y''; p * \phi)\,.\end{aligned}$$

17. Buď Φ spojité zobrazení B do E_3, $\xi \in B$, ρ jednotkový vektor, n celé číslo. Řekneme, že Φ má vlastnost $T(n, \xi, \rho)$, existují-li dva vektory X'_ξ, X''_ξ tak, že platí

(95) $$[\rho, X'_\xi, X''_\xi] > 0\,,$$

a označíme-li

(96) $$R = \mathsf{E}[x; x = \Phi(\xi) + x'X'_\xi + x''X'_\xi,\ x', x'' \in E_1]\,,$$

p promítání do R ve směru ρ, existuje okolí $U(\xi) \subset B$ tak, že pro každou křivku $\lambda \in J(\xi)$, pro niž je $|\lambda| \subset U(\xi)$, je

(97) $$\operatorname{ind}(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * \Phi * \lambda) = n\,.$$

Umluvíme se, že index bodu vzhledem ke křivce nebudeme definovat pro body ležící na grafu křivky. Je tedy v předcházející definici mlčky obsažen předpoklad, že $\Phi(\xi) \notin |p * \Phi * \lambda|$.

Z poznámky na konci odst. 16 ihned plyne, že nezáleží na tom, jak zvolíme vektory X'_ξ, X''_ξ (s podmínkou (95)).

Poznámka. Protože $[-\rho, X'_\xi, X''_\xi] = [\rho, X''_\xi, X'_\xi]$, platí: má-li Φ vlastnost $T(n, \xi, \rho)$, má též vlastnost $T(-n, \xi, -\rho)$.

Odvodíme nyní podmínku, postačující k tomu, aby Φ mělo buď vlastnost $T(1, \xi_0, \rho)$ nebo $T(-1, \xi_0, \rho)$. Buď ξ_0 vnitřním bodem některé stěny $B_j \in \mathfrak{B}$. Zvolme tři vrcholy

a, b, c čtverce B_j tak, aby $\{a, b, c\}$ byl trojúhelník na $\mathfrak{B}$ (definici viz odst. 3) a položme $Y' = b - a$, $Y'' = c - a$. Každý bod $\xi \in B_j$ lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$\xi = \xi_0 + \xi' Y' + \xi'' Y'' \quad (\xi', \xi'' \in E_1). \tag{98}$$

Budeme psát $\xi = (\xi', \xi'')$ a na funkce proměnné $\xi \in B_j$ budeme pohlížet též jako na funkce dvou proměnných ξ', ξ''; v souvislosti s tím budeme např. psát $\Phi(\xi) = \Phi(\xi', \xi'')$ apod. (k nedorozumění nemůže dojít).

Za těchto okolností platí toto tvrzení:

Věta. *Má-li $\Phi(\xi', \xi'')$ v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál, přičemž*

$$\Delta = \left[\rho, \frac{\partial \Phi(0,0)}{\partial \xi'}, \frac{\partial \Phi(0,0)}{\partial \xi''}\right] \neq 0, \tag{99}$$

má Φ vlastnost $T(\operatorname{sgn} \Delta, \xi_0, \rho)$.

D ů k a z. Poznámka z tohoto odstavce ukazuje, že větu stačí dokázat pro případ $\Delta > 0$ (je-li $\Delta < 0$, stačí zaměnit ρ za $-\rho$). Položme $X' = \dfrac{\partial \Phi(0,0)}{\partial \xi'}$, $X'' = \dfrac{\partial \Phi(0,0)}{\partial \xi''}$, $\Phi(\xi_0) = \Phi(0, 0) = z_0$, buď

$$R = \mathsf{E}[x; x = z_0 + x'X' + x''X'', x', x'' \in E_1],$$

buď p promítání do R ve směru ρ. Podle předpokladu je

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) - z_0 = \Phi(\xi', \xi'') - \Phi(0, 0) = \\ = \xi' X' + \xi'' X'' + \|\xi - \xi_0\| \cdot \eta(\xi), \end{aligned} \tag{100}$$

kde $\lim_{\xi \to \xi_0, \xi \in B} \eta(\xi) = 0$. Buď na chvíli $\xi = (\xi', \xi'')$ pevné; vzhledem k (99) existují $\alpha, \beta', \beta'' \in E_1$ tak, že

$$p(\Phi(\xi)) = \Phi(\xi) - \alpha\rho = z_0 + \beta' X' + \beta'' X''. \tag{101}$$

Odtud plyne rovnice

$$\Phi(\xi) - z_0 = \alpha\rho + \beta' X' + \beta'' X'', \tag{102}$$

z níž lze vypočítat α, β', β''; je

$$\beta' = \frac{1}{\Delta}[\rho, \Phi(\xi) - z_0, X''], \quad \beta'' = \frac{1}{\Delta}[\rho, X', \Phi(\xi) - z_0]. \tag{103}$$

Podle (101), (103) a (100) je tedy

$$p(\Phi(\xi)) = z_0 + \xi' X' + \xi'' X'' + \frac{\|\xi - \xi_0\|}{\Delta}\left([\rho, \eta(\xi), X''] X' + [\rho, X', \eta(\xi)] X''\right). \tag{104}$$

Označme

$$\Psi(\xi) = z_0 + \xi' X' + \xi'' X''; \tag{105}$$

tvrdím, že existuje okolí $U(\xi_0) \subset B_j$ tak, že platí:

(106) $$\xi_0 \neq \xi \in U(\xi_0) \Rightarrow \|\Psi(\xi) - z_0\| > \|\Psi(\xi) - p(\Phi(\xi))\| .$$

Položme totiž

$$\xi_1 = \xi' \|X'\| , \quad \xi_2 = \xi'' \|X''\| , \quad X_1 = \frac{X'}{\|X'\|} , \quad X_2 = \frac{X''}{\|X''\|} ;$$

pak je

$$\|\xi' X' + \xi'' X''\|^2 = \|\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2\|^2 = \xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 (X_1, X_2) + \xi_2^2 \geqq$$
$$\geqq (\xi_1^2 + \xi_2^2)(1 - |\cos \omega|) ,$$

kde ω je úhel, který svírají vektory X' a X''.

Z toho plyne ihned vztah

(107) $$\|\Psi(\xi) - z_0\|^2 \geqq (\xi'^2 \|X'\|^2 + \xi''^2 \|X''\|^2)(1 - |\cos \omega|) \geqq$$
$$\geqq (\xi'^2 + \xi''^2)(1 - |\cos \omega|) \min (\|X'\|^2, \|X''\|^2) .$$

Protože

(108) $$\|\Psi(\xi) - p(\Phi(\xi))\| = \frac{\|\xi - \xi_0\|}{\Delta} \|[\rho, \eta(\xi), X''] X' + [\rho, X', \eta(\xi)] X''\| \leqq$$
$$\leqq \frac{\sqrt{\xi'^2 + \xi''^2}}{\Delta} . 2\|\eta(\xi)\| . \|X'\| . \|X''\| ,$$

stačí zvolit $U(\xi_0)$ tak, aby pro $\xi_0 \neq \xi \in U(\xi_0)$ bylo

$$\|\eta(\xi)\| < \frac{\Delta}{2\|X'\| . \|X''\|} \sqrt{1 - |\cos \omega|} . \min (\|X'\|, \|X''\|) ,$$

což lze vzhledem k podmínce $\lim_{\xi \to \xi_0} \eta(\xi) = 0$.

Buď $\mathfrak{W}$ triangulace $\mathfrak{B}$, pro niž $\xi_0 \in V(\mathfrak{W})$. Hvězda $\mathfrak{H}$ a křivka λ buďte definovány tak, jako v odst. 15. Položíme-li

(109) $$\lambda(t) = \xi_0 + \lambda'(t) Y' + \lambda''(t) Y'' , \quad \tilde{\lambda} = (\lambda', \lambda'') ,$$

je

(110) $$\operatorname{ind} (z_0; X', X''; \Psi * \lambda) = \operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} 0 ,$$

neboť podle definice Ψ je

(111) $$\Psi(\lambda(t)) = z_0 + \lambda'(t) X' + \lambda''(t) X'' .$$

Dokažme, že $\operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} 0 = 1$; protože $\tilde{\lambda}$ je Jordanova křivka, je $\operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} 0 = \operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} \zeta$ pro každé $\zeta \in \operatorname{Int} \tilde{\lambda}$ (z vnitřku $\tilde{\lambda}$). Je ovšem $\overline{\operatorname{Int} \tilde{\lambda}} = |\mathfrak{H}| = \bigcup_{j=1}^{r} T(\tau_{i_j})$. Zvolme ζ např. uvnitř $T(\tau_{i_1})$ a označme (pro $j = 1, \ldots, r$).

(112) $$\mu_j(t) = \begin{cases} a_{i_j} + (b_{i_j} - a_{i_j})\, t & \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle , \\ b_{i_j} + (c_{i_j} - b_{i_j})(t - 1) & \text{pro} \quad t \in \langle 1, 2 \rangle , \\ c_{i_j} + (a_{i_j} - c_{i_j})(t - 2) & \text{pro} \quad t \in \langle 2, 3 \rangle ; \end{cases}$$

analogicky, jako jsme k λ sestrojili $\tilde{\lambda}$, sestrojme k μ_j křivku $\tilde{\mu}_j$.

Podle známých vět o indexu je

$$\operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} \zeta = \sum_{j=1}^{r} \operatorname{ind}_{\tilde{\mu}_j} \zeta = \operatorname{ind}_{\tilde{\mu}_1} \zeta = 1 \,; \tag{113}$$

tím je dokázáno, že $\operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} 0 = \operatorname{ind}_{\tilde{\lambda}} \zeta = 1$, takže též

$$\operatorname{ind} (z_0; X', X''; \Psi * \lambda) = 1 \,. \tag{114}$$

Ze (106) plyne toto tvrzení:

$$[\lambda] \subset U(\xi_0) \Rightarrow \|\Psi(\lambda(t)) - z_0\| > \|\Psi(\lambda(t)) - p(\Phi(\lambda(t)))\| \quad \text{pro všechna } t \in \langle 0, r \rangle \,. \tag{115}$$

Podle (114) a (115) stačí k dokončení důkazu naší věty ukázat, že pro index bodu vzhledem ke křivce (v E_2) platí toto tvrzení:

Lemma. *Buďte ϕ a ψ spojitá zobrazení $\langle t_1, t_2 \rangle$ do E_2, buď $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$; platí-li pro všechna $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ nerovnost*

$$\|\phi(t) - z_0\| > \|\phi(t) - \psi(t)\| \,, \tag{116}$$

je

$$\operatorname{ind}_\phi z_0 = \operatorname{ind}_\psi z_0 \,. \tag{117}$$

Důkaz lemmatu. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $z_0 = 0$; položme

$$\delta = \min_{t \in \langle t_1, t_2 \rangle} \|\phi(t)\| \,; \tag{118}$$

pak je podle (116) $\delta > 0$ (neboť $\phi(t) \neq 0$ všude). Buď $t_1 = t^0 < t^1 < \ldots < t^m = t_2$ takové dělení, že průměr každé množiny $M_k = \phi(\langle t^{k-1}, t^k \rangle)$ $(k = 1, \ldots, m)$ je menší než δ. Pak leží každá M_k v jisté otevřené polorovině R_k, jejíž hranice P_k obsahuje počátek. Označme π_k polopřímku, vycházející z počátku, kolmou k P_k a nemající s R_k společné body. Z našich předpokladů snadno plyne, že

(119)
$$\psi(\langle t^{k-1}, t^k \rangle) \subset \bigcup_{t \in \langle t^{k-1}, t^k \rangle} U(\phi(t), \|\phi(t)\|) = \bigcup_{\zeta \in M_k} U(\zeta, \|\zeta\|) \subset \bigcup_{\zeta \in R_k} U(\zeta, \|\zeta\|) = E_2 - \pi_k$$

a že pro

$$u^k(t) = \phi(t^k) + t(\psi(t^k) - \phi(t^k)) \,, \quad 0 \leqq t \leqq 1 \,, \tag{120}$$

je

$$[u^k] = u^k(\langle 0, 1 \rangle) \subset E_2 - \pi_k \,. \tag{121}$$

Užívejme tohoto označení: Je-li α resp. β zobrazení intervalu $\langle r_1, r_2 \rangle$ resp. $\langle s_1, s_2 \rangle$, položme

$$(\dot{-} \alpha)(t) = \alpha(-t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle -r_2, -r_1 \rangle \,; \tag{122}$$

je-li $\alpha(r_2) = \beta(s_1)$, buď

$$(\alpha \dot{+} \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{pro} \quad t \in \langle r_1, r_2 \rangle \,, \\ \beta(t + s_1 - r_2) & \text{pro} \quad t \in \langle r_2, r_2 + s_2 - s_1 \rangle \,. \end{cases} \tag{123}$$

Místo $\alpha \dotplus (\dot{-} \beta)$ pišme krátce $\alpha \dot{-} \beta$.

Označme ještě ϕ^k resp. ψ^k parciální zobrazení k ϕ resp. ψ, definovaná v $\langle t^{k-1}, t^k \rangle$. Buď

$$v^k = \phi^k \dotplus u^k \dot{-} \psi^k \dot{-} u^{k-1}\,, \tag{124}$$

kde $1 \leqq k \leqq m$. Pak je

$$[v^k] \cap \pi_k = \emptyset\,, \tag{125}$$

odkud plyne, že

$$\mathrm{ind}_{v^k} 0 = 0 \quad (\text{pro } 1 \leqq k \leqq m)\,. \tag{126}$$

Snadno se nahlédne, že

$$\mathrm{ind}_{\phi} 0 - \mathrm{ind}_{\psi} 0 = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_{v^k} 0\,, \tag{127}$$

což je podle (126) rovno 0. Tím jsou lemma a celá věta dokázány.

18. Článek zakončíme větou, která v jednoduchých případech, zejména spolu s větou odst. 17, dovoluje vypočítat index bodu vzhledem k ploše. Je užitečná i v jiných souvislostech, např. v některých otázkách týkajících se Gaussovy věty.

Věta. *Buď Φ spojité zobrazení B do E_3, buď $w \in E_3 - \Phi(B)$ a nechť existuje jednotkový vektor ρ, pro nějž množina*

$$M = \Phi_{-1}(P(w, \rho)) \tag{128}$$

je konečná. Má-li Φ pro každé $\xi \in M$ vlastnost $T(n(\xi), \xi, \rho)$, je

$$\mathrm{ind}_{\Phi} w = \sum_{\xi \in M} n(\xi)\,. \tag{129}$$

Důkaz. Postupujme indukcí podle počtu prvků množiny M; je-li $M = \emptyset$, neprotíná $P(w, \rho)$ množinu $\Phi(B)$ a podle tvrzení B) z odst. 14 je

$$\mathrm{ind}_{\Phi} w = 0\,,$$

takže (129) platí.

Předpokládejme, že dokazovaná věta platí pro všechna spojitá zobrazení Ψ množiny B do E_3, pro něž $\Psi_{-1}(P(w, \rho))$ obsahuje m bodů ($m \geqq 0$); nechť $M = \{\xi, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Položme

$$\Delta = \tfrac{1}{2} d(\Phi(B), w)\,; \tag{130}$$

lze předpokládat, že okolí $U(\xi)$, jehož existenci zaručuje vlastnost $T(n(\xi), \xi, \rho)$, je tak malé, že

$$\overline{U(\xi)} \cap \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} = \emptyset\,, \tag{131}$$

$$\text{průměr } \Phi(U(\xi)) < \Delta\,. \tag{132}$$

Ze stejnoměrné spojitosti Φ na B plyne existence čísla $\vartheta > 0$, pro něž platí:

$$\text{Je-li } N \subset B,\ \text{průměr } N < \vartheta,\ \text{je průměr } \Phi(N) < \Delta\,. \tag{133}$$

Podle A) v odst. 14 pak platí:

(134) $$\nu(\mathfrak{B}) < \vartheta\,, \quad \{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}(\Phi) \Rightarrow \|F - \Phi\| < \Delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathrm{ind}_\Phi\, w = \mathrm{ind}_F\, w\,.$$

Buď $\mathfrak{B}^0 = \{\tau_n^0\}_{n=1}^{p^0}$ triangulace $\mathfrak{B}$ s těmito vlastnostmi:

(135) $$\xi \in V(\mathfrak{B}^0)\,;$$

(136) $$\nu(\mathfrak{B}^0) < \vartheta\,;$$

(137) $$\mathfrak{H}^0 = \{\tau_1^0, \ldots, \tau_{r^0}^0\} \text{ je hvězda } \mathfrak{B}^0 \text{ o středu } \xi\,;$$

(138) $$|\mathfrak{H}^0| = \bigcup_{j=1}^{r^0} T(\tau_j^0) \subset U(\xi)\,.$$

Buď λ^0 funkce sestrojená ke hvězdě $\mathfrak{H}^0$ podle odst. 15. Zvolme vektory X'_ξ, X''_ξ tak, aby $[\rho, X'_\xi, X''_\xi] > 0$, a užívejme označení z odst. 17. Protože Φ má vlastnost $T(n(\xi), \xi, \rho)$, je

(139) $$\mathrm{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * \Phi * \lambda^0) = n(\xi)\,.$$

Buď $\omega \in (0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ úhel, který polopřímka $P(w, \rho)$ svírá s rovinou (96); označme

(140) $$\Delta_1 = \min\,[d(|p * \Phi * \lambda^0|, \Phi(\xi))\,.\,\sin\omega, \Delta, 1]\,.$$

Zobrazení Ω množiny $|\mathfrak{H}^0|$ buď definováno takto: označme

(141) $$\varepsilon = \|\Phi(\xi) - w\| + \frac{1}{\sin\omega}$$

a pro $\xi' \in |\lambda^0|$ nechť

(142) $$\Omega(\xi') = \Phi(\xi')\,,$$

(143) $$\Omega\left(\frac{\xi' + \xi}{2}\right) = p(\Phi(\xi')) - \varepsilon\rho\,,$$

(144) $$\Omega(\xi) = \Phi(\xi) - \varepsilon\rho\,,$$

(145) Ω buď lineární na úsečkách s krajními body ξ', $\dfrac{\xi' + \xi}{2}$ a na úsečkách s krajními body $\dfrac{\xi' + \xi}{2}$, ξ.

Snadno se ověří, že pak je

(146) $$d(\Omega(|\mathfrak{H}^0|), P(w, \rho)) \geqq \Delta_1\,.$$

Existuje $\vartheta_1 > 0$ tak, že platí:

(147) Je-li $N \subset B$, průměr $N < \vartheta_1$, je průměr $\Phi(N) < \frac{1}{2}\Delta_1 \sin\omega$.

Sestrojme triangulaci $\mathfrak{B} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ s těmito vlastnostmi:

(148) $$\mathfrak{B} \text{ je zjemnění } \mathfrak{B}^0\,;$$

(149) $$\mathfrak{H} = \{\tau_1, \ldots, \tau_r\} \text{ je hvězda } \mathfrak{B} \text{ o středu } \xi,\ r \geqq 4\,;$$

(150) $a_1 = a_1^0$, všechna a_n $(n = 1, \dots, r)$ leží na $|\lambda^0|$, takže je-li λ sestrojena k $\mathfrak{B}$ a ξ podle odst. 15, je $|\lambda| = |\lambda^0|$;

(151) průměr každého $T(\tau_n)$ $(n = r + 1, \dots, p)$ je $< \vartheta_1$.

Buď

(152) $$\{\mathfrak{B}, F\} \in \mathfrak{P}(\Phi) ;$$

pak je podle (148), (136) a (134)

(153) $$\mathrm{ind}_\Phi\, w = \mathrm{ind}_F\, w .$$

Položme

(154) $$a_j' = \frac{a_j + \xi}{2}$$

a buď $\mathfrak{W} = \{\chi_j\}_{j=1}^{p+2r}$ triangulace $\mathfrak{B}$, definovaná takto:

(155) $$\chi_j = \{a_j', a_{j+1}', \xi\} \text{ pro } 1 \leqq j \leqq r - 1 , \quad \chi_r = \{a_r', a_1', \xi\} ;$$

(156) $$\chi_j = \tau_j \text{ pro } r < j \leqq p ;$$

(157) $$\chi_{p+j} = \{a_j, a_{j+1}, a_j'\} \text{ pro } 1 \leqq j \leqq r - 1 , \quad \chi_{p+r} = \{a_r, a_1, a_r'\} ;$$

(158) $$\chi_{p+r+j} = \{a_j', a_{j+1}, a_{j+1}'\} \text{ pro } 1 \leqq j \leqq r - 1 , \quad \chi_{p+2r} = \{a_r', a_1, a_1'\} .$$

Definujme G podmínkami:

(159) $$\{\mathfrak{W}, G\} \in \mathfrak{P} ;$$

(160) $$G(\xi') = \Phi(\xi') \text{ pro } \xi' \in V(\mathfrak{B}) , \quad \xi' \neq \xi ;$$

(161) $$\text{pro každé } j = 1, \dots, r \text{ je } G(a_j') = p(\Phi(a_j)) - \varepsilon\rho ;$$

(162) $$G(\xi) = \Phi(\xi) - \varepsilon\rho .$$

Definujme konečně Ψ podmínkami:

(163) $$\Psi(\xi') = \Phi(\xi') \quad \text{pro} \quad \xi' \in \bigcup_{n=r+1}^{p} T(\tau_n) ,$$

(164) $$\Psi(\xi') = \Omega(\xi') \quad \text{pro} \quad \xi' \in |\mathfrak{H}| = |\mathfrak{H}^0| .$$

Pak platí:

(165) $$\Psi_{-1}(P(w, \rho)) = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$$

(plyne ze (131), (163) a (164), uvážíme-li, že podle (146) je $\Omega_{-1}(P(w, \rho)) = \emptyset$).

Vzhledem k indukčnímu předpokladu plyne pak ze (163) a (165), že

(166) $$\mathrm{ind}_\Psi\, w = \sum_{k=1}^{m} n(\xi_k) .$$

Dokažme dále, že je

(167) $$d(\Psi(B), w) \geqq \Delta_1 ,$$

(168) $$\|\Psi - G\| \leqq \tfrac{1}{2}\Delta_1 .$$

Podle (146) a (164) je

$$d(\Psi(|\mathfrak{H}|), w) = d(\Omega(|\mathfrak{H}^0|), w) \geqq \Delta_1 ; \tag{169}$$

podle (130), (163) a (140) je

$$d(\Psi(\bigcup_{n=r+1}^{p} T(\tau_n)), w) \geqq d(\Phi(B), w) = 2\Delta > \Delta_1 . \tag{170}$$

Tím je dokázáno (167); (168) dokážeme takto: pro $\xi' \in \bigcup_{n=r+1}^{p} T(\tau_n) = \bigcup_{n=r+1}^{p} T(\chi_n)$ (viz (156)) je podle (163), (147), (159), (160)

$$\|\Psi(\xi') - G(\xi')\| < \tfrac{1}{2}\Delta_1 . \tag{171}$$

Vzhledem k tomu, že průměr každého $\lambda(\langle j-1, j\rangle)$ ($j = 1, \ldots, r$) je $< \vartheta_1$, je podle (147) průměr $\Phi(\lambda(\langle j-1, j\rangle)) < \frac{1}{2}\Delta_1 \sin \omega$. Vzhledem k (160) je tedy

$$\|\Psi(\xi') - G(\xi')\| = \|\Phi(\xi') - G(\xi')\| < \tfrac{1}{2}\Delta_1 \sin \omega \tag{172}$$

pro všechna $\xi' \in |\lambda|$. Je-li průměr množiny $\Phi(N)$ menší než $\frac{1}{2}\Delta_1 \sin \omega$, je průměr $p(\Phi(N)) < \frac{1}{2}\Delta_1$, takže vzhledem k (161), (143) a (164) je

$$\left\|\Psi\left(\frac{\xi' + \xi}{2}\right) - G\left(\frac{\xi' + \xi}{2}\right)\right\| < \tfrac{1}{2}\Delta_1 \quad (\text{pro } \zeta' \in |\lambda|) . \tag{173}$$

Z linearity Ψ a G a ze (172), (173) plyne snadno nerovnost (171) i pro $\xi' \in \bigcup_{j=p+1}^{p+2r} T(\chi_j)$. Zbývá ještě dokázat (171) pro $\xi' \in \bigcup_{j=1}^{r} T(\chi_j)$; důkaz je analogický právě uvedenému, ale je o to jednodušší, že $\Psi(\xi) = G(\xi)$.

Ze (167) a (168) plyne podle tvrzení A) z odst. 14, že

$$\operatorname{ind}_{\Psi} w = \operatorname{ind}_G w . \tag{174}$$

Položme (podle (149) je $r \geqq 4$)

$$\begin{aligned} \mu_0 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) , \quad \nu_0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1) , \\ \mu_j &= \left(1, \frac{j-1}{r-3}, 0\right) , \quad \nu_j = \left(1, \frac{j-1}{r-3}, 1\right) \quad \text{pro } j = 1, \ldots, r-2 , \\ \mu_{r-1} &= (0, 1, 0) , \quad \nu_{r-1} = (0, 1, 1) , \\ \mu_r &= (0, 0, 0) , \quad \nu_r = (0, 0, 1) , \\ \mu_{r+1} &= \mu_1 , \quad \nu_{r+1} = \nu_1 ; \end{aligned} \tag{175}$$

buď dále pro $j = 1, \ldots, r$

$$\begin{aligned} \omega_j &= \{\mu_0, \mu_{j+1}, \mu_j\} , & \omega_{r+j} &= \{\mu_j, \nu_{j+1}, \nu_j\} , \\ \omega_{2r+j} &= \{\mu_j, \mu_{j+1}, \nu_{j+1}\} , & \omega_{3r+j} &= \{\nu_0, \nu_j, \nu_{j+1}\} . \end{aligned} \tag{176}$$

Pak je $\mathfrak{S} = \{\omega_j\}_{j=1}^{4r}$ triangulace množiny $\mathfrak{B}_0$, jejímiž prvky jsou stěny krychle $A_0 = A(1, 1, 1)$; označme B_0 povrch A_0. Definujme zobrazení H (množiny B_0 do E_3) podmínkami:

$$\{\mathfrak{S}, H\} \in \mathfrak{P} ; \tag{177}$$

$$(178)\qquad \begin{aligned} &H(\mu_0) = G(\xi)\,, \quad H(\mu_j) = G(a'_j) \qquad (j = 1, \ldots, r)\,,\\ &H(\nu_0) = F(\xi)\,, \quad H(\nu_j) = F(a_j) = G(a_j) \quad (j = 1, \ldots, r)\,. \end{aligned}$$

Dokážeme rovnost

$$(179)\qquad \operatorname{ind}_F w = \operatorname{ind}_G w + \operatorname{ind}_H w\,.$$

Je-li σ libovolný jednotkový vektor, pro nějž $P(w, \sigma)$ neprotíná stranu žádného z trojúhelníků

$$T(F(\tau_n))\,, \quad T(G(\chi_n))\,, \quad T(H(\omega_n))\,,$$

je

$$(180)\qquad \operatorname{ind}_F w = \sum_{n=1}^{p} \eta(F(\tau_n))\,,$$

$$(181)\qquad \operatorname{ind}_G w = \sum_{n=1}^{p+2r} \eta(G(\chi_n))\,,$$

$$(182)\qquad \operatorname{ind}_H w = \sum_{n=1}^{4r} \eta(H(\omega_n))\,,$$

kde pro krátkost píšeme $\eta(F(\tau_n)) = \eta(F(\tau_n); w, \sigma)$ atd.

Snadno se ověří, že pro $n = 1, \ldots, r$ je

$$(183)\qquad \begin{aligned} \eta(H(\omega_n)) &= -\,\eta(G(\chi_n))\,,\\ \eta(H(\omega_{r+n})) &= -\,\eta(G(\chi_{p+n}))\,,\\ \eta(H(\omega_{2r+n})) &= -\,\eta(G(\chi_{p+r+n}))\,,\\ \eta(H(\omega_{3r+n})) &= \eta(F(\tau_n))\,, \end{aligned}$$

a že pro $n = r + 1, \ldots, p$ je

$$(184)\qquad \eta(G(\chi_n)) = \eta(F(\tau_n))\,.$$

Ze (183) a (184) ihned plyne (179).

Uvážíme-li, že platí (153), (179), (174) a (166), vidíme, že důkaz věty vyslovené v tomto odstavci bude dokončen, dokážeme-li ještě, že

$$(185)\qquad \operatorname{ind}_H w = n(\xi)\,.$$

Protože $w \notin H(B_0)$, existuje sférické okolí $U(w)$ o průměru $< \frac{1}{2}\Delta_1$, disjunktní s $H(B_0)$. Zvolíme-li $w' \in U(w)$ tak, aby w' leželo v rovině rovnoběžné s R a procházející bodem w, a tak, aby $P(w', -\rho)$ neprotínala žádnou stranu $S(G(a'_j), G(\xi))$, bude

$$(186)\qquad \operatorname{ind}_H w = \operatorname{ind}_H w'$$

(podle B) z odst. 14). Položíme-li $a_0 = a_r$, bude

$$(187)\qquad \operatorname{ind}_H w' = \sum_{n=1}^{r} \eta(H(\omega_n); w', -\rho) = \\ = \sum_{j=0}^{r-1} \eta(\{\Phi(\xi), p(\Phi(a_j)), p(\Phi(a_{j+1}))\}; w', \rho)\,.$$

Označme pro $j = 0, \ldots, r - 1$ znakem ϕ_j zobrazení intervalu $\langle 0, 3\rangle$ do R, definované takto:

$$(188)\qquad \phi_j(t) = \begin{cases} \Phi(\xi) + (p(\Phi(a_j)) - \Phi(\xi))\, t & \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1\rangle\,,\\ p(\Phi(a_j)) + (p(\Phi(a_{j+1})) - p(\Phi(a_j)))(t-1) & \text{pro} \quad t \in \langle 1, 2\rangle\,,\\ p(\Phi(a_{j+1})) + (\Phi(\xi) - p(\Phi(a_{j+1})))(t-2) & \text{pro} \quad t \in \langle 2, 3\rangle\,. \end{cases}$$

Polopřímka $P(w', \rho)$ buď neprotíná (podle volby w') trojúhelník $\{\Phi(\xi), p(\Phi(a_j)), p(\Phi(a_{j+1}))\}$ nebo jej protíná ve vnitřním bodě z (stejném pro všechny trojúhelníky).

Ze (139) plyne, že

$$(189) \qquad n(\xi) = \text{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * \Phi * \lambda^0) = \\ = \text{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * \Phi * \lambda),$$

neboť křivka $p * \Phi * \lambda$ vznikne z $p * \Phi * \lambda^0$ rostoucí po částech lineární transformací parametru t.

Podle (151) a (147) je

$$(190) \qquad \|F(\xi') - \Phi(\xi')\| < \tfrac{1}{2}\Delta_1 \sin\omega \quad \text{pro} \quad \xi' \in |\lambda|,$$

takže

$$(191) \qquad \|p(F(\xi')) - p(\Phi(\xi'))\| < \tfrac{1}{2}\Delta_1 \quad \text{pro} \quad \xi' \in |\lambda|.$$

Podle definice Δ_1 (viz (140)) a podle lemmatu z odst. 17 je tedy

$$(192) \qquad \text{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * \Phi * \lambda) = \\ = \text{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * F * \lambda);$$

kromě toho je

$$(193) \qquad d(|p * F * \lambda|, \Phi(\xi)) \geqq \tfrac{1}{2}\Delta_1,$$

takže podle volby průměru okolí $U(w)$ leží z a $\Phi(\xi)$ v téže komponentě množiny $R - |p * F * \lambda|$.

Podle známých vět o indexu bodu vzhledem ke křivce je

$$(194) \qquad \text{ind}\,(\Phi(\xi); X'_\xi, X''_\xi; p * F * \lambda) = \text{ind}\,(z; X'_\xi, X''_\xi; p * F * \lambda) = \\ = \sum_{j=0}^{r-1} \text{ind}\,(z; X'_\xi, X''_\xi; \phi_j),$$

takže (podle (189), (192) a (194))

$$(195) \qquad \sum_{j=0}^{r-1} \text{ind}\,(z; X'_\xi, X''_\xi; \phi_j) = n(\xi).$$

Pro ta j, pro něž z není uvnitř trojúhelníka $|\phi_j|$, je $\text{ind}\,(z; X'_\xi, X''_\xi; \phi_j) = 0$ a také příslušné η ve (187) je 0. Pro zbývající j je příslušné η rovno

$$\text{sgn}\,[\rho, \phi_j(1) - \phi_j(0), \phi_j(2) - \phi_j(0)],$$

což se dále rovná znaménku determinantu přechodu od base $\{\rho, X'_\xi, X''_\xi\}$ k basi $\{\rho, \phi_j(1) - \phi_j(0), \phi_j(2) - \phi_j(0)\}$ (v E_3), tedy také znaménku determinantu přechodu od base $\{X'_\xi, X''_\xi\}$ k basi $\{\phi_j(1) - \phi_j(0), \phi_j(2) - \phi_j(0)\}$ (v R), a tedy podle (94) také

$$\text{ind}\,(z; X'_\xi, X''_\xi; \phi_j).$$

Sečteme-li přes všechna j, pro něž je z uvnitř $|\phi_j|$, dostaneme podle (186), (187) a (195), že

$$\text{ind}_H\, w = n(\xi),$$

což je hledaný vztah (185).

Резюме

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ ИНДЕКСА ТОЧКИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПОВЕРХНОСТИ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага

Пусть $A(i, j, k)$ (где i, j, k — целые числа) обозначает куб, определенный соотношением (1), пусть $\mathfrak{A}$ — какая-либо непустая конечная система кубов $A(i, j, k)$, A — сумма всех кубов из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — система всех граней кубов из $\mathfrak{A}$, лежащих на границе A, B — их сумма (т. е. граница A). Пусть $\mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что каждая сторона каждой грани из $\mathfrak{B}$ лежит в точности в двух различных гранях из $\mathfrak{B}$.

В статье элементарным способом вводится индекс точки w по отношению к любому непрерывному отображению Φ множества B (определенным способом ориентированного) в пространство E_3. Определение индекса для столь общих отображений Φ основано на определении и свойствах индекса точки по отношению к „кусочно линейному отображению B в E_3“ (т. е. по отношению к „полиэдральной поверхности“), равно как и на аппроксимации общего отображения кусочно линейными отображениями (п. 5—12).

В п. 13 вводится общее определение индекса, а в дальнейших параграфах (14—18) исследуются его свойства: если Φ, Ψ — непрерывные отображения B в E_3 и если расстояние $\Phi(B)$ от w меньше, чем $\min_{\xi \in B} \|\Phi(\xi) - \Psi(\xi)\|$, то $\operatorname{ind}_\Phi w = \operatorname{ind}_\Psi w$. Индекс является в каждом слагаемом множества $E_3 - \Phi(B)$ постоянной величиной, в неограниченном же слагаемом он равен нулю.

Для того, чтобы иметь возможность вычислить индекс точки по отношению к поверхности (т. е. к непрерывному отображению B в E_3) и для применений (в особенности у теоремы Гаусса), вводится свойство $T(n, \xi, \rho)$, и доказывается связь свойства $T(\pm 1, \xi, \rho)$ с существованием касательной плоскости, а также важная теорема п. 18.

Геометрическое значение свойства $T(n, \xi, \rho)$ можно выразить в общих чертах так: Каждая достаточно малая кривая Жордана на поверхности B, содержащая точку ξ „внутри“, имеет то свойство, что ее образ при отображении Φ обойдет $|n|$-раз полупрямую $P(w, \rho)$ с начальной точкой w и с направлением ρ. Притом знак n связан с ориентацией поверхности. Если в точке, соответствующей точке ξ, существует к $\Phi(B)$ касательная плоскость, то $n = \pm 1$.

Теорема из п. 18 показывает, каким образом можно найти $\operatorname{ind}_\Phi w$ в случае, если существует $P(w, \rho)$ так, что $M = \Phi_{-1}(P(w, \rho))$ — конечное множество и что Φ обладает в каждой точке $\xi \in M$ свойством $T(n(\xi), \xi, \rho)$.

Summary

AN ELEMENTARY DEFINITION OF THE INDEX OF A POINT WITH RESPECT TO A SURFACE

ILJA ČERNÝ, Praha

Let $A(i, j, k)$ (where i, j, k are integers) be the cube defined by the relation (1), let $\mathfrak{A}$ be a nonempty finite system of cubes $A(i, j, k)$, A the union of all cubes from $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ the system of all the faces of cubes from $\mathfrak{A}$ which lie on the boundary of A, let B be their union (*i. e.* the boundary of A). Let us suppose that $\mathfrak{A}$ has the following property: each side of each face from $\mathfrak{B}$ lies in exactly two different faces from $\mathfrak{B}$.

In the present paper the index of a point w with respect to an arbitrary continuous mapping Φ of the set B (appropriately oriented) into E_3 is defined in an elementary manner. The definition of the index for such general mapping Φ is based on the definition and properties of the index of a point with respect to a "quasilinear" mapping of B into E_3 (i. e. with respect to a "polyhedral surface") and on the approximation of the general mapping by "quasilinear" mappings (§§ 5–12).

In § 13 a general definition of the index is given and in the following paragraphs (14–18) its properties are studied: If Φ, Ψ are continuous mappings of B into E_3 and if the distance of $\Phi(B)$ from w is smaller than $\min_{\xi \in B} \|\Phi(\xi) - \Psi(\xi)\|$, then $\operatorname{ind}_\Phi w = \operatorname{ind}_\Psi w$. The index is constant in each component of the set $E_3 - \Phi(B)$; it is equal to 0 in the unbounded component.

In order to make possible a calculation of the index of a point with respect to a surface (i. e. with respect to a continuous mapping of B into E_3) and also with view to applications (especially in connection with Gauss' theorem), the property $T(n, \xi, \rho)$ is introduced, the connection between the property $T(\pm 1, \xi, \rho)$ and the existence of the tangent plane is examined, and the important theorem of § 18 is proved.

Roughly speaking, the property $T(n, \xi, \rho)$ has the following meaning: Each sufficiently small Jordan curve on the surface B containing the point ξ in its interior has the property that its image under the mapping Φ runs $|n|$-times around the half-line $P(w, \rho)$ with origin w and direction ρ. The sign of n is connected with the orientation of the surface. If the tangent plane to $\Phi(B)$ in the point corresponding to ξ exists, then $n = \pm 1$.

The theorem of § 18 shows how to find $\operatorname{ind}_\Phi w$ in the case that there exists a $P(w, \rho)$ such that $M = \Phi_{-1}(P(w, \rho))$ is a finite set and Φ has the property $T(n(\xi), \xi, \rho)$ at each point $\xi \in M$.