Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Dlab

O jednom vztahu mezi vektorovými prostory a primárními Abelovými grupami s omezenými řády

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 112--113

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117355`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

REFERÁTY

O JEDNOM VZTAHU MEZI VEKTOROVÝMI PROSTORY A PRIMÁRNÍMI ABELOVÝMI GRUPAMI S OMEZENÝMI ŘÁDY[1])

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA, přednesené v Matematické obci pražské dne 1. června 1960

V úvodu osvětlil přednášející problematiku přednášky a připomněl některé definice a základní výsledky teorie grup (grupou se dále rozumí vždy aditivně psaná Abelova grupa). Zvláště připomněl následující klasifikaci systémů generátorů (dále s. g.) grup: S. g. $\mathfrak{G}$ grupy G nazveme *ireducibilní* (ired.), jestliže žádná vlastní podmnožina systému $\mathfrak{G}$ není už s. g. grupy G; v opačném případě mluvíme o *reducibilním* (red.) s. g. Řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *silně reducibilní* (sil. red.) s. g. grupy G, jestliže vynecháním libovolného prvku z $\mathfrak{G}$ dostaneme opět s. g. celé grupy G. Jestliže $\mathfrak{G}$ je red. s. g. grupy G s vlastností, že každá jeho podmnožina, která je s. g. grupy G, je též red., řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *dědičně reducibilní* (děd. red.). Ve stejném smyslu mluvíme o *dědičně silně reducibilním* (děd. sil. red.) s. g. S. g. grupy G, který je zároveň D-nezávislý, nazveme *bází* grupy G (viz autorovy práce „Заметка к теории абелевых групп", Чех. мат. журнал, *8* (1958), 54–61 a „Некоторие соотношения между системами образующих абелевых групп", Чех мат. журнал, *9* (1959), 161–171). Je zřejmé, že v případě vektorových prostorů pojem ired. s. g. a báze splývá.

Je známo, že každý s. g. vektorového prostoru obsahuje ired. s. g. (tj. bázi). To plyne bezprostředně z následujících dvou vlastností vektorových prostorů:

(i) *každý s. g. obsahuje maximální nezávislou množinu* (*celého prostoru*);

(ii) *každá maximální nezávislá množina je s. g.* (*celého prostoru*).

V grupách obecně (i) ani (ii) neplatí. Nicméně, je snadné určit grupy takové, že každý jejich s. g. obsahuje bázi (viz L. FUCHS, Abelian Groups, Budapest 1958, str. 55). Na druhé straně bude asi třeba jemnějších metod k vyšetření grup s následující vlastností (P):

Řekneme, že grupa má vlastnost (P), *jestliže každý její s. g. obsahuje ired. s. g.*

Má tedy grupa vlastnost (P) právě tehdy, nemá-li žádný děd. red. s. g. Hlavním výsledkem přednášky bylo vyšetření všech primárních grup s vlastností (P):

[1]) Přednášku s týmž tématem proslovil autor během svého pohybu v Holandsku dne 28. dubna 1960 v Matematickém ústavě amsterdamské university.

Primární grupa má vlastnost (P) *tehdy a jen tehdy, je-li grupou s omezenými řády.*[2])

V důkazu tvrzení „*Primární grupa s omezenými řády má vlastnost* (P)“ využil přednášející odpovídající vlastnosti vektorových prostorů. Zároveň naznačil jiný důkaz, který ukazuje příbuznost tohoto výsledku s 1. Prüferovou větou (viz I. KAPLANSKY, Infinite Abelian Groups, Ann. Arbor 1954, Theorem 5). Z uvedené věty vyplývá též velmi snadno Fuchsův výsledek, zmíněný v úvodu.

Důkaz opačného tvrzení „*Primární grupa s neomezenými řády nemá vlastnost* (P)“ spočíval v konstrukci děd. red. s. g. takové grupy. Konstrukce zmíněného s. g. se opírala podstatně o vlastnosti bazické podgrupy B dané grupy G[3]) a 3 technická lemmata, jež zaručovala přechod od děd. red. s. g. faktorové grupy G/B k děd. red. s. g. grupy G.

Přednášející pak vyšetřil primární grupy splňující podmínku (i) (bezprostředně lze nahlédnout, že vlastnost (ii) mají právě elementární grupy, tj. direktní součty cyklických grup prvočíselného řádu):

Primární grupa má vlastnost (i), *tj. každý její s. g. obsahuje maximální D-nezávislou množinu, právě tehdy, je-li buď Prüferovou grupou typu p^∞ nebo direktním součtem cyklických grup téhož řádu.*

V závěru přednášející připomněl klasifikaci grup na základě toho, jaké typy s. g. připouštějí. Podle této klasifikace se všechny grupy (s výjimkou nulové grupy a cyklické grupy řádu 2) rozpadají do 6 tříd; jednu z těchto tříd tvoří nenulové divizibilní grupy (totiž třídu grup, jež mají pouze děd. sil. red. s. g.). V třídě, jež tvoří grupy, mající pouze ired. s. g., red. s. g., které nejsou ani děd. red. ani sil. red. a sil. red. s. g., které nejsou děd. red., leží např. všechny grupy s konečným počtem generátorů, ale též grupy libovolné mohutnosti (např. direktní součty cyklických grup téhož prvočíselného řádu). Hlavní výsledek přednášky charakterizuje primární grupy této třídy: Jsou to právě grupy s omezenými řády (ovšem, s výjimkou nulové grupy a grupy řádu 2). Otázkou je, zda platí stejná charakterizace pro torsní grupy, náležející do této třídy, tj. zda platí: *Torsní grupa má vlastnost* (P) *právě tehdy, je-li grupou s omezenými řády.* Tato otázka se dá redukovat na tento problém:

Nechť torsní grupa má pouze konečný počet primárních komponent, jež jsou elementárními grupami. Potom nemá děd. red. s. g.

Plné znění tvrzení a důkazů bude publikováno v časopise The Journal of The London Mathematical Society.

Vlastimil Dlab, Chartúm (Sudan)

---

[2]) Řekneme, že G je grupou s omezenými řády, jestliže G je torsní grupa taková, že řády jejich prvků jsou stejnoměrně omezeny.

[3]) Podgrupa B primární grupy G se nazývá bazická, jestliže 1. B je ryzí (servantní) v G, 2. B je direktním součtem cyklických grup a 3. G/B je divizibilní (úplná).