Osvald Demuth

Poznámka k dopravnímu problému

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 103--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117353

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

POZNÁMKA K DOPRAVNÍMU PROBLÉMU

OSVALD DEMUTH, Praha

(Došlo dne 23. prosince 1959)

Při výpočtu dopravního problému na základě algoritmu uvedeného v pracích [1], [2] se vyhledávají řešení, ve kterých nastává minimum dané lineární formy a která odpovídají — při geometrisaci problému — vrcholům omezeného konvexního polyedru dimense $(m - 1)(n - 1)$ v lineárním prostoru E_{mn}. V práci jde o dolní odhad počtu vrcholů tohoto polyedru.

Buďte m, n přirozená čísla, $m, n \geqq 1$. Mějme dány dvě soustavy kladných čísel $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $b_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Systém čísel $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ s uvedenými vlastnostmi budeme nazývat *M-systémem* typu $[m, n]$ a značit $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Řešením daného M-systému nazýváme každou matici $(x_{i,j})$ typu (m, n), pro niž

$$x_{i,j} \geqq 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Považujeme-li řešení za bod prostoru E_{mn}, tvoří množina všech řešení omezený konvexní polyedr dimense $(m - 1)(n - 1)$; o definici vrcholů viz [1]. Vrcholy polyedru množiny všech řešení M-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ budeme většinou pro stručnost nazývat vrcholy tohoto M-systému.

Tato poznámka je pokusem o odhad počtu vrcholů daného M-systému typu $[m, n]$ zdola.

M-systém typu $[m, n]$ nazveme *degenerovaným* M-systémem, existují-li přirozená čísla l, k, $1 \leqq l < m$, $1 \leqq k < n$ a prosté posloupnosti čísel $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$, pro něž $1 \leqq i_r \leqq m$ $(r = 1, 2, \ldots, l)$, $1 \leqq j_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, takové, že $\sum_{r=1}^{l} a_{i_r} = \sum_{s=1}^{k} b_{j_s}$. M-systém, který není degenerovaným systémem, nazýváme *regulárním* systémem.

V dalším užíváme bez citace při důkazech následujících tvrzení, která jsou převzata z citované práce [1]:

Tvrzení 1. Mějme M-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Buď $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{mn}, j_{mn})$ libovolné předem dané pořadí množiny dvojic (i, j), kde $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Definujeme-li postupně $x_{i,j}$ vzorcem

$$x_{i,j} = \min\left(a_i - \sum_{(i,k)<(i,j)} x_{i,k};\ b_j - \sum_{(k,j)<(i,j)} x_{k,j}\right),$$

kde znak $\sum_{(i,k)<(i,j)}$ značí, že sčítáme přes všechny dvojice (i, k), které leží v daném pořadí před dvojicí (i, j), je matice $(x_{i,j})$ řešením daného M-systému a bod v E_{mn}, který jí odpovídá, je vrcholem příslušného konvexního polyedru. Ke každému vrcholu existuje takové pořadí dvojic (i, j), že souřadnice tohoto vrcholu můžeme získat shora uvedeným předpisem.

Tvrzení 2. Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ daný M-systém. Řešení $(x_{i,j})$ tohoto M-systému je vrcholem právě tehdy, platí-li:

1. matice řešení $(x_{i,j})$ obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, ve kterém je právě jeden prvek různý od nuly;

2. vynecháme-li v matici řešení řádek resp. sloupec s vlastností zmíněnou v 1 a jestliže takto vzniklá submatice má nejméně dva řádky a nejméně dva sloupce, pak tato submatice obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, který obsahuje nejvýše jeden prvek různý od nuly;

3. vynecháme-li v submatici z tvrzení 2 řádek resp. sloupec s vlastností uvedenou v 2 a jestliže vzniklá submatice má alespoň dva řádky a dva sloupce, pak tato submatice obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, v němž je nejvýše jeden prvek různý od nuly. Uvedenou vlastnost má každá submatice vzniklá z matice řešení $(x_{i,j})$ naznačeným procesem a obsahující alespoň dva řádky a dva sloupce.

Tvrzení 3. Každý vrchol M-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$, kde a_i a b_j jsou vesměs přirozená čísla, je celočíselným řešením tohoto M-systému.

Definice. Výrok „Určitému obsazení k-tého řádku (resp. sloupce) matice řešení daného M-systému odpovídá S vrcholů" znamená, že existuje S vrcholů tohoto M-systému tak, že k-tý řádek (resp. sloupec) v příslušných maticích řešení je obsazen tím předepsaným způsobem.

Definice. Speciálním způsobem obsazení řádku (resp. sloupce) matice řešení daného M-systému nazýváme takové obsazení tohoto řádku (resp. sloupce), v němž je právě jeden prvek různý od nuly.

Pomocné tvrzení. Mějme M-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Buď $(x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ jeho řešením. Je-li $m \geqq 2$ a je-li pro jisté i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq m)$ i_0-tý řádek matice $(x_{i,j})$ obsazen speciálním způsobem (tj. existuje-li j_0 $(1 \leqq j_0 \leqq n)$ tak, že $x_{i_0,j_0} \neq 0$, $x_{i_0,j} = 0$ pro $j \neq j_0$), je $(x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ vrcholem M-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ právě tehdy, je-li $(x_{i,j})_{1\leq i\leq m, i\neq i_0, 1\leq j\leq n}$ vrcholem M-systému

$$M(a_1, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m;\ b_1, b_2, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0}-a_{i_0}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$$

v případě, že $b_{j_0} \neq a_{i_0}$, nebo je-li $(x_{i,j})_{1 \leqq i \leqq m, i \neq i_0, 1 \leqq j \leqq n, j \neq j_0}$ vrcholem M-systému $M(a_1, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$ v případě, že $b_{j_0} = a_{i_0}$.

Platnost plyne ihned z tvrzení 2. Obdobné tvrzení platí pro speciální způsob obsazení sloupců.

Věta 1. *Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ regulární M-systém typu $[m, n]$. Potom konvexní polyedr tvořený množinou všech řešení tohoto M-systému má nejméně $[\max(m, n)]^{\min(m,n)-1}$ vrcholů.*

Příklad. Buďte m, n přirozená čísla $(1 \leqq m \leqq n)$. Položme

$$(1) \quad b_j = k \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad a_1 = n \,.\, k - m + 1, \quad a_i = 1 \quad (i = 2, \ldots, m),$$

kde k je přirozené číslo, $k \geqq m$. Systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ je regulární. Příslušný konvexní polyedr má právě n^{m-1} vrcholů.

Regularita systému definovaného rovnostmi (1) je zřejmá. Na základě citovaných tvrzení každý vrchol tohoto M-systému je celočíselným řešením a naopak vzhledem k tomu, že $a_i = 1$ pro $i = 2, \ldots, m$, každé celočíselné řešení je vrcholem. Je-li $m = 1$, má M-systém zřejmě právě jeden vrchol. Je-li $m \geqq 2$, je řešení daného M-systému jednoznačně určeno obsahem druhého až m-tého řádku matice řešení. Z uvedeného plyne, že vrcholy jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny volbám rozložení jedniček a nul ve druhém až m-tém řádku matice řešení našeho M-systému. Vzhledem k (1) existuje právě n^{m-1} možností rozložení jedniček a nul v uvedených řádcích, a tedy konvexní polyedr příslušný k M-systému definovanému rovnostmi (1) má právě n^{m-1} vrcholů.

Důkaz věty 1. Označme $T(m, n)$ minimální počet vrcholů regulárních M-systémů typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$. Na základě uvedeného příkladu dokážeme, že dokonce platí $T(m, n) = n^{m-1}$. Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na zkoumání těch regulárních M-systémů, pro něž počet řádků (m) je nejvýše roven počtu sloupců (n), $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n$. Dokazujeme indukcí podle $m + n = k$: Je-li $k = 2 \Rightarrow m = n = 1$, zřejmě platí $T(1, 1) = 1 = n^{m-1}$.

Nechť pro jisté $k \geqq 2$ platí $T(m, n) = n^{m-1}$ pro všechny dvojice přirozených čísel (m, n), pro něž $m \leqq n$, $m + n = k$. Mějme libovolný regulární M-systém typu $[m, n]$ $(m \leqq n, m + n = k)$,

$$(2) \qquad M(a_1, a_2, \ldots, a_1; b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

takový, že

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m, \; b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \,.$$

1. $a_m < b_n \Rightarrow m \geqq 2$. Existuje právě n speciálních obsazení m-tého řádku matice řešení M-systému (2). Pro každé l $(1 \leqq l \leqq n)$ odpovídá obsazení $x_{m,j} = \delta_j^l \,.\, a_m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ na základě pomocného tvrzení právě tolik vrcholů, kolik jich má regulární M-systém typu $[m - 1, n]$

$$M(a_1, \ldots, a_{m-1}; b_1, \ldots, b_{l-1}, b_l - a_m, b_{l+1}, \ldots, b_n) \,,$$

tj. alespoň n^{m-2} vrcholů na základě indukčního předpokladu. Různým obsazením odpovídají různé vrcholy. M-systém (2) má tedy v případě 1 alespoň $n \,.\, n^{m-2} = n^{m-1}$ vrcholů.

2. $a_m > b_n$. Je-li $m = 1$, zřejmě platí $T(m, n) = 1 = n^{m-1}$. Je-li $m \geqq 2$, budeme rozeznávat dva případy: a) $n = m$, b) $n \geqq m + 1$.

a) Transponujeme-li systém, tj. vyměníme-li úlohy a_i a b_j, dostáváme případ 1.

b) $n \geqq m + 1 \Rightarrow n - 1 \geqq m \geqq 2$. Existuje právě m speciálních způsobů obsazení n-tého sloupce matice řešení M-systému (2). Pro každé j $(1 \leqq j \leqq m)$ má regulární M-systém $M(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - b_n, a_{j+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{n-1})$ typu $[m, n - 1]$ alespoň $T(m, n - 1) = (n - 1)^{m-1}$ vrcholů na základě indukčního předpokladu. Podle pomocného tvrzení a na základě toho, že různým obsazením odpovídají různé vrcholy, má M-systém (2) v případě 2 b) alespoň $m \,.\, (n - 1)^{m-1}$ vrcholů, tj. více než n^{m-1} vrcholů

$$\left(n \geqq m + 1 > m \Rightarrow \binom{m-1}{s} = \frac{(m-1)\,.\,(m-2)\ldots(m-s)}{s!} < (n-1)^s\right.$$

pro

$$s = 1, 2, \ldots, m - 1, \binom{m-1}{0} = (n-1)^0 = 1\,;$$

$$\left.m(n-1)^{m-1} = \sum_{s=0}^{m-1} (n-1)^s (n-1)^{m-1-s} > \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} (n-1)^{m-1-s} = n^{m-1}\right).$$

Shrnutím výsledků z 1 a 2 dostáváme po přihlédnutí k příkladu uvedenému za formulací věty 1, že pro každou dvojici přirozených čísel (m, n), pro niž $m \leqq n$, $m + n = k + 1$, platí $T(m, n) = n^{m-1}$.

Věta 2. *Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ degenerovaný M-systém typu $[m, n]$. Potom konvexní polyedr tvořený množinou všech řešení tohoto M-systému má alespoň*

$$\frac{(\max(m, n))!}{(\max(m, n) - \min(m, n) + 1)!} \textit{ vrcholů}.$$

Příklad. Buďte m, n přirozená čísla, pro něž $2 \leqq m \leqq n$. Položme

(3) $\quad a_1 = n - m + 1\,, \quad a_i = 1 \quad (i = 2, \ldots, m)\,; \quad b_j = 1 \quad (j = 1, \ldots, n)\,.$

M-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ je degenerovaný. Příslušný konvexní polyedr má právě $\dfrac{n!}{(n - m + 1)!}$ vrcholů. Degenerovanost systému definovaného rovnostmi (3) je zřejmá. Počet vrcholů dokazujeme obdobným způsobem jako u prvého příkladu. Vzhledem k (3) existuje v tomto případě právě $n(n - 1) \ldots (n - m + 2) = \dfrac{n!}{(n - m + 1)!}$ možností rozložení nul a jedniček v druhém až m-tém řádku matice řešení. Konvexní polyedr příslušný k M-systému definovanému rovnostmi (3) má tedy právě $\dfrac{n!}{(n - m + 1)!}$ vrcholů.

Poznámka. Pro m, n přirozená, $n \geqq m$, platí $\dfrac{n!}{(n-m+1)!} = n(n-1)\dots$
$\dots(n-m+2) \leqq n^{m-1}$.

Důkaz věty 2. Označme $V(m, n)$ minimální počet vrcholů degenerovaných M-systémů typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$. Na základě právě uvedeného příkladu ukážeme, že dokonce platí $V(m, n) = \dfrac{n!}{(n-m+1)!}$. Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na zkoumání těch degenerovaných M-systémů, pro něž je počet řádků (m) nejvýše roven počtu sloupců (n) a platí $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots \geqq a_m$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \dots \geqq b_n$. Dokazujeme indukcí podle $m + n = k$.

Každý M-systém typu $[1, n]$ je zřejmě regulární. Nechť $k = 4$. Mějme libovolný degenerovaný M-systém typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$, $m + n = 4 \Rightarrow m = n = 2$. Konvexní polyedr příslušný k M-systému typu $[2, 2]$ má vždy dva vrcholy, takže $V(2, 2) = 2 = \dfrac{2!}{(2-2+1)!}$.

Nechť pro jisté $k \geqq 4$ platí, že $V(m, n) = n!/(n-m+1)!$ pro každou dvojici (m, n), pro niž $n \geqq m \geqq 2$, $m + n \leqq k$. Mějme libovolný degenerovaný M-systém (3), $M(a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n)$ typu $[m, n]$, kde $n \geqq m$, $n + m = k + 1$, takový, že $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots \geqq a_m$; $b_1 \geqq b_2 \geqq \dots \geqq b_n$. Vzhledem k degenerovanosti M-systému (3) musí platit $m \geqq 2$.

1. $a_m \leqq b_n$. Existuje právě n speciálních způsobů obsazení m-tého řádku matice řešení M-systému (3). Různým obsazením odpovídají různé vrcholy. Pro i $(1 \leqq i \leqq n)$, pro něž $a_m < b_i$ odpovídá obsazení $x_{m,j} = \delta^i_j \,.\, a_m$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ právě tolik vrcholů, kolik jich má M-systém typu $[m-1, n]$ $M(a_1, \dots, a_{m-1}; b_1, \dots, b_{i-1}, b_i - a_m, b_{i+1}, \dots, b_n)$, tj. podle indukčního předpokladu resp. podle věty 1 a poznámky alespoň $\dfrac{n!}{(n-m+2)!}$ vrcholů. Je-li $a_m = b_i$, odpovídá témuž obsazení právě tolik vrcholů, kolik jich má M-systém $M(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}; b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$ typu $[m-1, n-1]$, tj. podle indukčního předpokladu resp. podle věty 1 a poznámky alespoň $\dfrac{(n-1)!}{(n-m+1)!}$ vrcholů. Jelikož pro $n \geqq m \geqq 2$ platí $n \geqq n - m + 2 \geqq 2$ čili $\dfrac{n}{n-m+2} \geqq 1$, odpovídá v každém z obou možných případů uvedenému obsazení alespoň $\dfrac{(n-1)!}{(n-m+1)!}$ vrcholů. Celkem má tedy M-systém (3) v případě 1 alespoň $n \,.\, \dfrac{(n-1)!}{(n-m+1)!} = \dfrac{n!}{(n-m+1)!}$ vrcholů.

2. $a_m > b_n$.

a) Je-li $m = n$, transponujeme systém a dostáváme případ 1.

b) Je-li $n \geqq m + 1$, je $n - 1 \geqq m$. Existuje právě m speciálních způsobů obsazení n-tého sloupce matice řešení M-systému (3). Různým obsazením odpovídají různé vrcholy. Pro každé j $(1 \leqq j \leqq m)$ odpovídá obsazení $x_{i,n} = \delta_i^j \,.\, b_n$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ právě tolik vrcholů, kolik jich má M-systém $M(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j - b_n, a_{j+1}, \ldots, a_m;$ $b_1, \ldots, b_{n-1})$ typu $[m, n - 1]$, tj. na základě indukčního předpokladu resp. věty 1 a poznámky alespoň $\frac{(n - 1)!}{(n - 1 - m + 1)!}$ vrcholů. M-systém (3) má tedy v případě 2 alespoň $m \,.\, \frac{(n-1)!}{(n-m)!}$ vrcholů, tj. více než $\frac{n!}{(n - m + 1)!}$, neboť

$$n \geqq m + 1 > m \geqq 2 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow n > n - m + 1 > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n - m + 1} = \frac{n - m + 1}{n - m + 1} + \frac{m - 1}{n - m + 1} < 1 + m - 1 = m\,.$$

Shrneme-li výsledky z 1 a 2 a přihlédneme-li k příkladu uvedenému za formulací věty 2, dostáváme, že pro každou dvojici přirozených čísel (m, n), pro niž $n \geqq m \geqq 2$, $n + m \leqq k + 1$, platí $V(m, n) = \frac{n!}{(n - m + 1)!}$.

Literatura

[1] *F. Nožička:* O jednom minimálním problému v theorii lineárního plánování. Matematický ústav ČSAV — litografováno.

[2] *J. Bílý, M. Fiedler, F. Nožička:* Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem. Чехословацкий математический журнал *8 (83)*, 1958, 94—121.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ТРАНСПОРТНОЙ ПРОБЛЕМЕ

ОСВАЛЬД ДЕМУТ (Osvald Demuth), Прага

Пусть m, n — натуральные числа, $m, n \geqq 1$. Пусть заданы две системы положительных чисел $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $b_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Систему чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n$ с указанными свойствами мы будем называть *М-системой типа* $[m, n]$ и обозначать через $M(a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Решением данной M-системы мы называем каждую матрицу $(x_{i,j})$ типа (m, n), для которой

$$x_{i,j} \geqq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Если считать решение точкой $E_{m,n}$, то множество всех решений образует ограниченный выпуклый многогранник размерности $(m-1)(n-1)$; определение вершин дано в [1]. Вершины многогранника множества всех решений M-системы $M(a_1, a_2, \ldots, a_m: b_1, b_2, \ldots, b_n)$ мы будем для краткости называть *вершинами* этой M-системы.

M-систему типа $[m, n]$ мы назовем *вырожденной* M-системой, если существуют натуральные числа l, k; $1 \leqq l < m$, $1 \leqq k < n$, простые последовательности чисел $i_1, \ldots, i_l$; $j_1, \ldots, j_k$, для которых $1 \leqq i_r \leqq m$ $(r = 1, 2, \ldots, l)$, $1 \leqq j_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, такие, что $\sum_{r=1}^{l} a_{i_r} = \sum_{s=1}^{k} b_{j_s}$. M-систему, не являющуюся вырожденний системой, мы называем *регулярной* системой.

В предлагаемой работе выводится оценка числа вершин M-системы типа $[m, n]$. Доказывается, что множество всех решений регулярной M-системы типа $[m, n]$ имеет не менее, чем $[\max(m, n)]^{\min(m,n)-1}$ вершин, и что множество всех решений вырожденной M-системы того же типа имеет не менее, чем $\dfrac{[\max(m, n)]!}{[\max(m, n) - \min(m, n) + 1]!}$ вершин. На примерах показано, что эту нижнюю оценку в общем случае нельзя улучшить.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZU DEM TRANSPORTPROBLEM

OSVALD DEMUTH, Praha

Es seien m, n natürliche Zahlen $m, n \geqq 1$. Es seien zwei Systeme positiver Zahlen $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $b_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ derart gegeben, dass $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ gilt. Das System $a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit den angeführten Eigenschaften nennen wir das *M-System von Typ* $[m, n]$ und bezeichnen es mit $M(a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Die Lösung dieses M-Systems ist jede Matrix $(x_{i,j})$ vom Typ $[m, n]$ für die

$$x_{i,j} \geqq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\,,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

gilt. Wenn wir die Lösung als Punkt $E_{m,n}$ auffassen, so bildet die Menge aller Lösungen ein beschränktes konvexes Polyeder der Dimension $(m-1)(n-1)$. Über die Definition des Eckpunkte siehe [1]. Die Eckpunkte des Polyeders der Menge aller Lösungen der M-Systems $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ nennen wir Einfachheitshalber *Eckpunkte* des M-Systems.

Das M-System vom Typ $[m, n]$ nennen wir ein *degeneriertes* M-System, wenn natürliche Zahlen l, k; $1 \leqq k < n$, $1 \leqq l < m$ einer einfachen Zahlenfolge $i_1, \ldots, i_l$; $j_1, \ldots, j_k$ für welche $1 \leqq i_r \leqq m$ $(r = 1, 2, \ldots, l)$, $1 \leqq j_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ gilt, derart existieren, dass $\sum_{r=1}^{l} a_{i_r} = \sum_{s=1}^{k} b_{j_s}$ ist. Ein System das nicht degeneriert ist nennen wir *regular*.

In der vorliegenden Arbeit wird die Abschätzung für die Anzahl der Eckpunkte des M-Systems vom Typ $[m, n]$ abgeleitet. Es wird bewiesen, dass die Menge aller Lösungen des regularen M-Systems vom Typ $[m, n]$ mindestens $[\max(m, n)]^{\min(m,n)-1}$ Eckpunkte hat und die Menge aller Lösungen des degenerierten M-Systems vom selben Typ mindestens $\dfrac{[\max(m, n)]!}{[\max(m, n) - \min(m, n) + 1]!}$ Eckpunkte hat.

An Hand von Beispielen wird gezeigt, dass die untere Grenze der Abschätzung allgemein nicht erhöht werden kann.