ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 86 * PRAHA 15. II. 1961 * ČÍSLO 1

SÚVISLÉ PODGRAFY S MINIMÁLNOU HODNOTOU V KONEČNOM SÚVISLOM GRAFE

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Došlo dne 11. července 1958)

V práci sa rieší úloha najsť v danom konečnom súvislom kladnými číslami ohodnotenom grafe taký súvislý podgraf, obsahujúci všetky uzly grafu, v ktorom súčet hodnôt všetkých jeho hrán je minimálny. Isté zovšeobecnenie známého (a už riešeného) problému spočívá v tom, že sa pripúšťa aj také ohodnotenie grafu, v ktorom dve rôzne hrany majú rovnakú hodnotu. Ťažiskom práce je odvodenie nutnej a postačujúcej podmienky pro existenciu jediného takéhoto podgrafu.

1. Niektoré problémy súvisiace s úlohou vybudovať optimálny cestný, alebo spojovací systém, splňujúci isté vedľajšie podmienky a tiež problémy, kloré možno formulovať ako takzvaný dopravný problém, dajú sa snadnejšie riešiť pomocou teorie grafov.[1]) Táto problematika je blízka dnes už veľmi členitej literatúre (pozri napr. [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]). V tomto príspevku budeme sa zaoberať úlohou z vyššie uvedenej širšie chápanej problematiky, ktorú možno v reči teorie grafov[2]) formulovať takto:

Je daný súvislý ohodnotený graf G. Treba najsť taký podgraf G^* grafu G, ktorý (α) obsahuje všetky uzly z G; (β) je suvislý; (γ) má minimálnu hodnotu pri danom ohodnotení grafu G. Pritom: graf G je ohodnotený, ak každej jeho hrane je priradené práve jedno číslo z istej množiny čísel D, t. j. ak je dané zobrazenie δ množiny hrán grafu G do množiny D.

Pod hodnotou hrany h (resp. pod hodnotou podgrafu G') pri ohodnotení δ sa rozumie číslo $\delta(h) \in D$ (resp. súčet $d(G') = \sum_{H \in G'} \delta(h)$).

V našom príspevku obmedzíme sa na grafy konečné a na prípad, keď D je množina kladných reálnych čísel. Isté zobecnenie problému, ktorým sa nedávno zaoberal

[1]) S teoriou grafov sa čitateľ môže bližšie zoznámiť v knihe D. KÖNIGA [1]. Definície tu použitých základných pojmov možno najsť aj v [8].

[2]) V našom príspevku budeme sa skoro vždy pridŕzať terminologie použitej Kőnigom v knihe [1]; pre naše potreby definujeme si v ďalšom len niektoré nové pojmy a tam, kde sa v termínoch líšime, výslovne na to upozorníme.

J. B. KRUSKAL (pozri [5]), spočíva v tom, že pripúšťame aj taký prípad ohodnotenia δ, keď dve rôzne hrany z majú tú istú hodnotu.

Poznámka 1. Praktického významu uvedené zobecnenie pravda nemá, lebo opak urobil O. BORŮVKA (pozri [2]) ako zjednodušenie pôvodnej otázky.

Súvislosť problému, s ktorým sa hodláme zaoberať, s problémami vyššie načrtnutými je zrejmá z toho, že pod hodnotou hrany možno rozumeť napr. dĺžku hrany h v grafe realizovanom v dvoj, alebo aj viacrozmernom euklidovskom priestore, alebo tiež náklady spojené s vybudovaním, prípadne údržbou dopravnej linky znázornenej hranou h príslušného grafu G, prípadne náklady spojené s prepravou jednotky množstva z jedného uzla do druhého uzla incidentného s touto hranou a pod. Pri takýchto a podobných ohodnoteniach grafu vystačíme vždy s množinou D, ktorá obsahuje len kladné reálne čísla. Vzhľadom na aplikácie, ktoré máme na mysli, je tiež obmedzenie sa na súvislé a konečné grafy plne zdôvodnené.

2. Obdobne ako v prípade riešenom v [5] (t. j. keď pre rôzne hrany h_1, h_2 platí vždy $\delta(h_1) \neq \delta(h_2)$, platí aj v našom prípade vždy toto:

Lemma 1. *V ľubovoľnom súvislom grafe G pri danom ohodnotení δ existuje vždy aspoň jeden podgraf G^* tohoto grafu, ktorý má vlastnosti* (α), (β), (γ). *Takýto podgraf je vždy kostrou grafu G a obsahuje všetky tie hrany z G, ktoré nepatria do žiadnej kružnice grafu G.*

Dôkaz. Existencia aspoň jednoho podgrafu G^* s vlastnosťami (α), (β), (γ) vyplýva z konečnosti grafu G. Že podgraf G^* s vlastnosťami (α), (β), (γ) neobsahuje (ako podgraf) žiadnu kružnicu vyplýva z toho, že zrušením ľubovoľnej takej hrany súvislého grafu, ktorá patrí aspoň do jednej kružnice tohoto grafu vznikne graf súvislý (pozri [1], str. 54–55) a teda – pretože hodnota zrušenej hrany je kladné číslo – graf s menšou hodnotou. Preto podgraf G^* s vlastnosťami (α), (β), (γ) neobsahuje kružnicu, obsahuje všetky uzly z G (vlastnosť (α)), je súvislý (vlastnosť (β)), čiže: G^* je kostrou grafu G (pozri [1], str. 57). Napokon: Podgraf grafu G, ktorý má vlastnosť (α) a neobsahuje aspoň jednu takú hranu z G, ktorá nepatrí do žiadnej kružnice grafu G, nemôže byť súvislý (nemá vlastnosť (β)). Čiže: taký podgraf grafu G, ktorý má vlastnosti (α), (β) obsahuje všetky tie hrany z G, ktoré nepatria do žiadnej kružnice grafu G.[3]) To dokazuje lemmu.

Dohovor. K vôli zostručneniu nášho vyjadrovania zavedieme označenie $\overline{H}(G)$ pre množinu všetkých tých hrán grafu G, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednej kružnici grafu G.

Odvoďme si teraz túto pomocnú vetu:

Lemma 2. *Nech G je súvislý graf, δ jeho ohodnotenie a nech $\overline{H}(G)$ je neprázdna množina. Označme znakom h_1 ľubovoľnú takú hranu z $\overline{H}(G)$, ktorá má túto vlastnosť: Žiadna*

[3]) Hrana nepatriaca do žiadnej kružnice grafu sa nazýva často mostom. Autori nie sú však v užívaní tohoto názvu jednotní, preto ho nepoužívam.

z hrán $\in \overline{H}(G)$ nemá hodnotu väčšiu než $\delta(h_1)$. Platí: aspoň jeden taký podgraf G^* grafu G, ktorý má vlastnosti (α), (β), (γ), neobsahuje hranu h_1.

Dôkaz. Podľa lemmy 1 existuje aspoň jeden podgraf grafu G majúci vlastnosti (α), (β), (γ). Predpokladajme oproti tvrdeniu lemmy, že každý takýto podgraf obsahuje hranu h_1 a nech G_1 je ľubovoľný takýto podgraf. Ak odstránime z grafu G_1 hranu h_1 vznikne istý nesúvislý graf G_2 s dvoma komponentami G_2', G_2''.[4]) Pretože h_1 patrí do $\overline{H}(G)$, existuje hrana $h_2 \in \overline{H}(G)$ spojujúca v grafe G istý uzol $u \in G_2'$ s istým uzlom $v \in G_2''$. Ak pridáme ku grafu G_2 hranu h_2 vznikne tak graf G_3, ktorý má vlastnosti (α), (β) a neobsahuje hranu h_1. Hodnota $d(G_3)$ nemôže byť väčšia než hodnota $d(G_1)$, kebo podľa predpokladu je $\delta(h_2) \leqq \delta(h_1)$. Preto buď je $d(G_3) < d(G_1)$ (a to odporuje predpokladu, že graf G_1 má vlastnosť (γ)), alebo je $d(G_3) = d(G_1)$ a graf G_3 neobsahujúci hranu h_1 má vlastnosti (α), (β), (γ) — spor s predpokladom, že každý takýto graf obsahuje hranu h_1. To dokazuje lemmu.[5])

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný súvislý graf s p uzlami a q hranami. Nech δ je istý ohodnotenie grafu G. Položme $m = q - p + 1$. Utvorme postupnosť podgrafov grafu G: $G_0, G_1, \ldots, G_m$ a postupnosť hrán $\in G$: $h_1, h_2, \ldots, h_m$ takto: Hrana h_i je ľubovoľne pevne zvolená taká hrana z $\overline{H}(G_{i-1})$, o ktorej platí: žiadna z hrán $\in \overline{H}(G_{i-1})$ nemá hodnotu väčšiu než $\delta(h_i)$; graf G_i vznikne z grafu G_{i-1}, keď z neho odstránime hranu h_i a je $G_0 = G$. Platí: Podgraf G_m má vlastnosti (α), (β) a (γ).*

Dôkaz. Pretože graf $G = G_0$ má p uzlov a q hrán a graf G_m vznikne z grafu G_0 odstránením $m = q - p + 1$ hrán, pričom odstraňujeme hrany postupne tak, že odstrániť sa majúca hrana patrí vždy aspoň do jednej kružnice príslušného grafu, je graf G_m kostrou grafu G,[6]) čiže: G_m má vlastnosti (α), (β).

Podľa lemmy 1 a 2 existuje taký podgraf grafu $G = G_0$, ktorý má vlastnosti (α), (β), (γ) a neobsahuje hranu h_1. Tento podgraf je tiež podgrafom grafu G_1 (s uvedenými vlastnosťami). Z konštrukcie postupnosti $G_0, G_1, \ldots, G_m$ a z lemmy 1 a 2 vyplýva tiež, že existuje taký podgraf grafu G, ktorý má vlastnosti (α), (β), (γ) a je podgrafom tiež grafu $G_2, G_3, \ldots, G_m$. Pretože G_m je kostra grafu G, vyplýva z uvedeného ihneď, že podgraf G_m má aj vlastnosť (γ). Dôkaz je vykonaný.

Poznámka 2. Konštrukcia grafu G_m z vety 1 je patrične pozmenená Kruskalova konštrukcia A'.

3. Z vety 1 vyplýva, že v každom ohodnotenom súvislom grafe existuje aspoň jeden jeho podgraf, ktorý má vlastnosti (α), (β) a (γ). K tomu, aby existoval jediný takýto podgraf stačí však, aby žiadne dve hrany grafu nemali rovnakú hodnotu v ohodnotení δ (pozri [5]). No nie je to podmienka nutná.

---

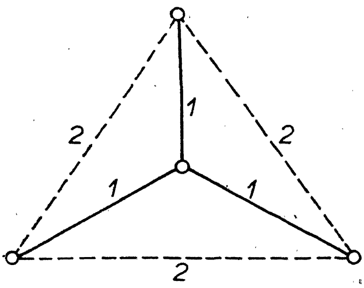
[4]) Názov komponenta užívame náhradou za Kőnigom použitý názov „zusammenhängender Bestandteil".

[5]) Na možnosť skrátenia pôvodne mnou vykonaného dôkazu tejto lemmy ma upozornil J. SEDLÁČEK.

[6]) Pozri [1], str. 55—56.

Tak na obr. 1 je znázornený ohodnotený graf G (čísla pri jednotlivých hranách udávajú hodnotu hrany), v ktorom existuje jediný podgraf G^* s požadovanými vlastnosťami (hrany $\in G^*$ sú znázornené plnými čiarami, ostatné hrany z G čiarami prerušovanými), ačkoľvek v množine $\overline{H}(G)$ – obsahujúcej všetky hrany $\in G$ – tri a tri hrany majú rovnakú hodnotu.

Veta 2. *Nech G je súvislý ohodnotený graf a G_0 ľubovoľný pevne zvolený taký podgraf grafu G, ktorý má vlastnosti (α), (β), (γ). Nech $H_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ je množina všetkých tých hrán $\in G$, ktoré nepatria do G_0. Zostrojme množinu kružníc $\overline{K} = \{K_1, K_2, \ldots, \ldots, K_n\}$ takto: Kružnica $K_i \in \overline{K}$ je tá kružnica grafu G, ktorá obsahuje hranu $h_i \in H_0$ a všetky ostatné jej hrany patria do G_0.*[7]) *Platí: V grafe G existuje jediný podgraf s vlastnosťami (α), (β), (γ) práve vtedy, keď pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: hrana h_i má väčšiu hodnotu, než ktorákoľvek iná hrana z K_i.*



Obr. 1.

Dôkaz. I. Nech pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: Hrana h_i má väčšiu hodnotu než ktorákoľvek iná hrana z K_i. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že okrem kostry G_0 (pozri lemmu 1) existuje ďalšia kostra G_1 grafu G, ktorá má vlastnosť (γ).

Nech h_j je ľubovoľná hrana $\in H_0$ patriaca do G_1 (že takáto hrana existuje je zrejmé). Kružnica $K_j \in \overline{K}$ nemôže byť podgrafom kostry G_1. Nech $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sú tie hrany z K_j, ktoré nepatria do G_1, ale patria do G_0, potom $m \geqq 1$. Ku hrane g_k $(k = 1, 2, \ldots, \ldots, m)$ existuje práve jedna taká kružnica K'_k, ktorá obsahuje hranu g_k a všetky ostatné jej hrany patria do G_1.

Pretože kružnica K_j je kompozíciou[8]) všetkých kružníc $K'_1, K'_2, \ldots, K'_m$, t. j. pretože platí:

$$K_j = K'_1 \times K'_2 \times \ldots \times K'_m \ ^{9})$$

a pretože hrana $h_j \in G_1$ patrí do K_j, musí sa hrana h_j vyskytovať v nepárnom počte komponovaných kružníc $K'_1, K'_2, \ldots, K'_m$ (teda najmenej v jednej). Nech K'_i je ľubovoľná z takýchto kružníc.

Teda kružnica K'_i obsahuje aj hranu g_i aj hranu h_j. Hrana $g_i \in G_0$ nemôže mať menšiu hodnotu než hrana $h_j \in G_1$, lebo keby tomu tak bolo, potom po odstránení hrany h_j a po pridaní hrany g_i vznikla by z kostry G_1 istá kostra G'_1, ktorá by mala menšiu hodnotu než kostra G_1. To vzhľadom k prijatým predpokladom nie je možné.

---

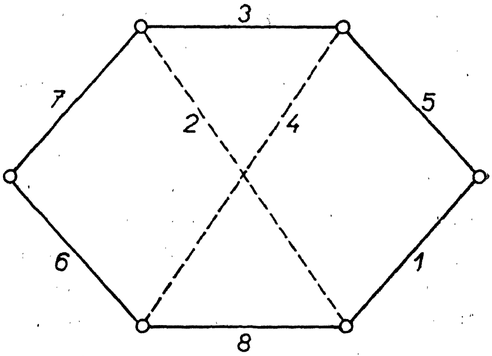
[7]) Že takáto kružnica K_i existuje práve jedna, je známe — pozri napr. [1], veta 28, str. 61; množina $\overline{K}$ nazýva sa obvykle fundamentálnym systémom kružníc.

[8]) Pod kompozíciou F_0 istých grafov $F_1, F_2, \ldots, F_m$ (písané $F_0 = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$) rozumie sa taký graf F_0, ktorý obsahuje všetky tie hrany a len tie hrany, ktoré sa vyskytujú v nepárnom počte komponovaných grafov a uzly s týmito hranami incidentné.

[9]) Pozri napr. [1], str. 147. Uvážme, že všetky hrany $\in K_j$ okrem hrán $g_1, g_2, \ldots, g_m$ patria do G_1.

Preto je $\delta(g_i) \geqq \delta(h_j)$. Hrany $g_1, g_2, \ldots, g_m$ (a medzi nimi hrana g_i) a tiež hrana h_j patria do kružnice K_j, teda je $\delta(h_j) > \delta(g_i)$; to je spor s tým, k čomu sme dospeli prv. Predpoklad existencie kostry $G_1 \neq G_0$, ktorá má vlastnosť (γ) vedie ku sporu v prípade, že pre všetky $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: hrana h_j má väčšiu hodnotu než ktorákoľvek iná hrana z K_j. Preto v uvedenom prípade existuje jediný podgraf (kostra) s vlastnosťami (α), (β), (γ).

II. Nech teraz aspoň v jednej kružnici $K_i \in \bar{K}$ existuje hrana g_j taká, že jej hodnota nie je menšia než $\delta(h_i)$. Utvorme z kostry G_0 kostru G_0' takto: Odstráňme z G_0 hranu g_j a pridajme hranu h_i. Potom platí: $G_0' \neq G_0$, $d(G_0') = d(G_0) + \delta(h_i) - \delta(g_j)$; čiže $d(G_0') \leqq d(G_0)$. Prípad $d(G_0') < d(G_0)$ nie je možný, lebo podgraf G_0 by potom nemal vlastnosť (γ). Je preto $d(G_0') = d(G_0)$ a aj kostra G_0' (iná než G_0) má vlastnosť (γ) a G_0 nie je jediným podgrafom s vlastnosťami (α), (β), (γ). To dokazuje vetu.



Obr. 2.

Mohlo by sa zdať, že ak je splnená podmienka pre existenciu jediného podgrafu G_0 s vlastnosťami (α), (β), (γ) uvedená vo vete 2 (t. j., že v ľubovoľnej kružnici $K_i \in \bar{K}$ hrana h_i má väčšiu hodnotu než ktorákoľvek iná hrana z K_i), potom že platí aj toto: V ľubovoľnej kružnici grafu G má ktorákoľvek hrana patriaca do G_0 menšiu hodnotu než ktorákoľvek hrana tejto kružnice nepatriaca do G_0. Tomu tak však nie je. V kružnici nepatriacej do $\bar{K}$ nemusí uvedené platiť. Tak napr. jediným podgrafom grafu znázorneného na obr. 2 majúcim vlastnosti (α), (β), (γ) je podgraf, obsahujúci hrany s hodnotami 1, 2, 3, 4, 6. V kružnici K (jej hrany sú znázornené plnými čiarami, ostatné hrany čiarami prerušovanými) sa vyskytuje hrana s hodnotou 6 patriaca do G_0, zatiaľ čo hrana tejto kružnice majúca hodnotu 5 nepatrí do G_0.

Literatúra

[1] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[2] *O. Borůvka:* O jistém problému minimálním. Práce Mor. přírod. společnosti, sv. *III*, Brno, 1926.

[3] *V. Jarník:* O jistém problému minimálním. Práce Mor. přírod. společnosti, sv. *VI*, Brno, 1930.

[4] *V. Jarník, M. Kössler:* O minimálních grafech, obsahujících *n* daných bodů. Časopis pro pěst. mat. a fys. *63* (1934), 223—235.

[5] *J. B. Kruskal:* On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proc. Amer. Mat. Soc., *7* (1956).

[6] *R. Rado:* Note on independence functions. Proc. London Math. Soc., (*3*), *7* (1957).

[7] *J. Perkal:* O souborech materiálních bodů a abstraktních bodů v přírodovědeckých zkoumáních. Pokroky mat. fys. a astr., *II* (1957).

[8] *J. Bílý, M. Fiedler, F. Nožička:* Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem. Чехословацкий математический журнал, Т. *8* (*83*), (1958), 94—121.

Резюме

СВЯЗНЫЕ ПОДГРАФЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ В КОНЕЧНОМ СВЯЗНОМ ГРАФЕ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

В работе решается следующая задача:

Пусть G — связный конечный граф, оцененный положительными числами. Требуется найти подграф G^* графа G, обладающий следующими свойствами: (1) G^* — связный граф, (2) G^* содержит все вершины из G, (3) пусть G_x — какой-либо подграф из G со свойствами (1), (2) и пусть $S(G_x)$ — сумма значений всех ребер из G_x, тогда имеет место $S(G_x) \geqq S(G^*)$.

В [2] и [3] было при некоторых ограничениях доказано, что можно всегда найти хотя бы один подграф G^* (со свойствами (1), (2), (3)) в каждом связном графе G и что этот подграф всегда является основой графа G; одновременно был описан простой метод для определения этого подграфа G^*.

В предлагаемой работе дается метод решения для общего случая и выводятся необходимые и достаточные условия, касающиеся графа G, при которых эта задача имеет единственное решение.

Zusammenfassung

DIE ZUSAMMENHÄNGENDEN TEILGRAPHEN MIT MINIMALEM WERT IN DEM ENDLICHEN BEWERTETEN GRAPHEN

ANTON KOTZIG, Bratislava

In dieser Arbeit wird folgende Aufgabe untersucht:

Es sei G ein zusammenhängender mit positiven Zahlen bewerteter endlicher Graph. Man soll einen solchen Teilgraphen G^* des Graphen G finden, welcher folgende Eigenschaften besitzt: (1) *G^* ist zusammenhängend,* (2) *G^* enthält alle Knotenpunkte aus G;* (3) *es sei G_x ein beliebiger Teilgraph von G mit den Eigenschaften* (1), (2) *und es sei $S(G_x)$ die Summe von Werten aller Kanten aus G_x, dann gilt: $S(G_x) \geqq S(G^*)$.*

In [2] und [3] wurde unter gewissen Beschränkungen bewiesen, daß man immer mindestens einen Teilgraphen G^* (mit den Eingenschaften (1), (2), (3)) in jedem zusammenhängenden Graphen G finden kann und daß dieser Teilgraph immer ein Gerüst von G ist, und zugleich wurde eine einfache Methode, beschrieben, mit deren Hilfe man diesen Teilgraphen G^* finden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Lösungsmethode für den allgemeinen Fall angegeben und notwendige und hinreichende Bedingungen für den Graphen G gefunden, unter welchen diese Aufgabe eine einzige Lösung besitzt.