Hana Švecová

Zobecnění vět o kořenech analytických funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 4, 418--438

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117345`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ZOBECNĚNÍ VĚT O KOŘENECH ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

HANA ŠVECOVÁ, Praha

(Došlo dne 9. září 1959)

V článku je s pomocí kombinatoricko-topologických metod podáno zobecnění principu argumentu (věta 3,2), Rouchéovy věty (věta 3,3) a Hurwitzovy věty (věta 3,4) na funkce spojité a nenulové s výjimkou konečného počtu bodů. Dále jsou studovány nulové body a body nespojitosti funkce $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou meromorfní funkce.

I. ZÁKLADNÍ POJMY

1. POLYEDR

V této práci se omezíme na případ komplexní roviny E_2, jejíž prvky budeme nazývat čísly nebo body.

Definice 1,1. Buď $\Sigma \subset E_2$. Nechť existuje homeomorfní zobrazení F množiny Σ na uzavřenou úsečku. Potom množinu Σ nazveme *jednorozměrným simplexem* a vzory koncových bodů úsečky $F(\Sigma)$ při zobrazení F nazveme *vrcholy* simplexu Σ. Je-li $z \in E_2$, pak bod z nazveme *nulrozměrným* simplexem a zároveň vrcholem tohoto simplexu.

Buď K konečný systém jednorozměrných a nulrozměrných simplexů s vlastnostmi:

a) libovolné dva simplexy Σ_1, Σ_2 systému K jsou buď disjunktní, nebo jejich průnik je vrcholem obou simplexů Σ_1, Σ_2;

b) je-li $\Sigma \in K$, σ vrchol simplexu Σ, pak je $\sigma \in K$.

Nechť dále systém K obsahuje alespoň jeden jednorozměrný simplex. Potom systém K nazveme (jednorozměrným) *komplexem*.

Sjednocení všech simplexů komplexu nazveme (jednorozměrným) *polyedrem*. Je-li polyedr P sjednocením všech simplexů komplexu K, říkáme, že K je *simpliciální rozklad* polyedru P.

Říkáme, že simpliciální rozklad K_1 polyedru P je *zjemněním* simpliciálního rozkladu K polyedru P, jestliže každý simplex komplexu K_1 jako bodová množina je částí některého simplexu komplexu K.

V dalším budeme běžně používat tohoto tvrzení (důkaz je snadný): *Každá Jordanova křivka je polyedr. Je-li Γ Jordanova křivka, pak ke každému kladnému ε existuje simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr menší než ε.*

2. ORIENTACE UZAVŘENÉ JORDANOVY KŘIVKY

Definice 1,2. *Orientací* jednorozměrného simplexu nazveme funkci $t(z_{i_1}, z_{i_2})$, definovanou na množině všech uspořádaných dvojic vrcholů daného simplexu a nabývající hodnot ± 1 tak, že je $t(z_1, z_2) = - t(z_2, z_1)$.

Buď S jednotková kružnice, ε jedno z čísel $+1, -1$. Definujme orientaci libovolného jednorozměrného simplexu libovolného simpliciálního rozkladu kružnice S takto: Je-li $\Sigma \subset S$ jednorozměrný simplex s vrcholy $z_1 = e^{i\zeta_1}$, $z_2 = e^{i\zeta_2}$, kde $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi\rangle$, $\zeta_1 < \zeta_2$, přiřaďme simplexu Σ orientaci t_Σ tak, aby platilo:

$$t_\Sigma(z_1, z_2) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{není-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}, \\ -\varepsilon, & \text{je-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}. \end{cases}$$

Potom říkáme, že je dána orientace t kružnice S a kružnici S nazýváme orientovanou.

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka, F homeomorfní zobrazení orientované jednotkové kružnice S na Γ. Přiřaďme každému jednorozměrnému simplexu $\Sigma' \subset \Sigma$ s vrcholy $z_1'; z_2'$ orientaci $t'_{\Sigma'}$:

$$t'_{\Sigma'}(z_1', z_2') = t_\Sigma(F^{-1}(z_1'), F^{-1}(z_2')),$$

kde t je orientace kružnice S a Σ je vzor simplexu Σ' při zobrazení F. Potom říkáme, že je dána *orientace křivky Γ* a křivku Γ nazýváme orientovanou.

Z definice 1,2 plyne **věta:**

Uzavřená Jordanova křivka může mít právě dvě různé orientace.

3. NUMERACE

Definice 1,3. Nechť každému vrcholu jednorozměrného simplexu Σ je přiřazeno některé přirozené číslo. Dvojici čísel odpovídajících vrcholům simplexu Σ budeme psát v neklesajícím pořadí a nazývat *numerací* simplexu Σ. Číslo odpovídající při této numeraci vrcholu z simplexu budeme nazývat numerací vrcholu z.

Jestliže při dané numeraci jednorozměrného simplexu oběma vrcholům odpovídá totéž číslo, pak tuto numeraci nazýváme *degenerovanou*. Numeraci, jež není degenerovaná, nazýváme nedegenerovanou.

Je-li každému vrcholu komplexu K přiřazeno přirozené číslo, říkáme, že je dána numerace komplexu K.

Buď z bod simplexu Σ v komplexu K. Není-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme simplex Σ. Je-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme bod z.

Buď K_1 zjemnění simpliciálního rozkladu K polyedru P. Numeraci N_1 komplexu K_1 nazýváme *pokračováním numerace* N komplexu K, jestliže každému vrcholu komplexu K_1 je v numeraci N_1 přiřazeno jedno z čísel numerace jeho nosiče v numeraci N.

V části II budeme potřebovat následující lemma, jež je speciálním případem Spernerova lemmatu (důkaz viz [1], str. 90).

Lemma 1,1. *Buď Σ jednorozměrný simplex s numerací* 1, 2. *Při každém pokračování této numerace na libovolný simpliciální rozklad K simplexu Σ má lichý počet jednorozměrných simplexů komplexu K numeraci* 1, 2.

Zaveďme toto označení: $a_k = 2k - 1$, $b_k = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Definice 1,4. Numeraci simplexu nazveme *přípustnou,* jestliže z každé dvojice a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ se v ní vyskytuje nejvýše jedno číslo. Numeraci komplexu nazveme přípustnou, jestliže vytváří přípustné numerace na všech simplexech komplexu.

4. STUPEŇ NUMERACE

Mějme dánu uzavřenou Jordanovu křivku Γ s orientací t. Buď K simpliciální rozklad polyedru Γ, N přípustná numerace komplexu K čísly $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_2 = 4$. Buď Σ jednorozměrný simplex komplexu K s nedegenerovanou numerací. Označme z_k $(k = 1, 2)$ vrchol simplexu Σ, jemuž odpovídá číslo a_k nebo b_k. Označme β_Σ počet vrcholů simplexu Σ, kterým v numeraci N odpovídají sudá čísla. Přiřaďme simplexu Σ číslo γ_Σ:

$$\gamma_\Sigma = (-1)^{\beta_\Sigma} \,.\, t_\Sigma(z_1, z_2)\,. \tag{1}$$

Definice 1,5. Číslo γ_Σ definované vztahem (1) nazveme *vahou* simplexu Σ.

Buď c_1 jedno z čísel 1, 2, c_2 jedno z čísel 3, 4. Označme $s(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s numerací c_1, c_2 a kladnou vahou, $p(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s touž numerací a zápornou vahou. V [1], str. 93, je dokázána tato věta:

Rozdíl $s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nezávisí na výběru čísel c_1, c_2.

Definice 1,6. Číslo $\gamma_N = s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nazveme *stupněm numerace N*.

5. ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Buď $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y)$ spojitá komplexní funkce definovaná a nenulová v bodech uzavřené Jordanovy křivky Γ. Funkce φ_1, φ_2 jsou spojité reálné funkce.

φ_i jsou stejnoměrně spojité na Γ, a tedy existují čísla $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, že v okolí (ležícím na Γ) poloměru 2δ libovolného bodu z křivky Γ má alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 stálé znamení a je v absolutní hodnotě větší než α. Označme (pro $i = 1, 2$) F_i množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \geqq \alpha$. Podobně označme G_i $(i = 1, 2)$ množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \leqq -\alpha$. Množiny F_i, G_i zřejmě pokrývají Γ. Označme dále δ_1 menší ze vzdáleností množin F_i, G_i $(i = 1, 2)$. Buď $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$.

Definice 1,7. *Hvězdou* vrcholu z v komplexu K nazveme množinu bodů všech simplexů komplexu K, jejichž vrcholem je bod z.

Definice 1,8. Buď K simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr nejvýše δ_0. Očíslujme vrcholy komplexu K tak, že každému vrcholu přiřadíme buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu kladné a na celé jeho hvězdě nezáporné, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu záporné a na celé jeho hvězdě nekladné. O numeraci N, konstruované tímto způsobem, budeme říkat, že *je vytvořena funkcí* φ.

Poznámka. Speciálně můžeme každému vrcholu přiřadit buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch F_i, které pokrývají hvězdu daného vrcholu, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch G_i, které pokrývají tuto hvězdu. V důkazech budeme používat výhradně této numerace, a to pod názvem *speciální numerace*.

Numerace N z definice 1,8 je zřejmě přípustná. Je tedy definován její stupeň.

Věta. *Stupeň numerace vytvořené funkcí φ nezávisí na výběru simpliciálního rozkladu polyedru Γ a numerace N.* (Důkaz viz [1], str. 95.)

Definice 1,9. Stupeň numerace N vytvořené funkcí φ nazveme *rotací funkce* φ na Γ.

Poznámka. Z definice rotace je vidět, že při změně orientace křivky Γ změní rotace znaménko, nikoliv absolutní hodnotu.

6. HOMOTOPIE

Definice 1,10. Říkáme, že komplexní funkce φ, ψ jsou *homotopní* na křivce Γ, jestliže existuje funkce $X(z, t)$ s hodnotami v E_2, definovaná, spojitá a nenulová na množině $\Gamma \times \langle 0, 1 \rangle$ a splňující podmínky

$$X(z, 0) = \varphi(z)\,, \quad X(z, 1) = \psi(z)$$

pro $z \in \Gamma$.

Věta 1,1. *Jsou-li funkce φ, ψ homotopní na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ, pak mají na Γ touž rotaci.*

Důkaz. Z definice 1,8 a 1,9 plyne toto: Je-li Φ_0 spojitá komplexní funkce nenulová na Γ, pak existuje ν tak, že platí: je-li Φ_1 komplexní funkce spojitá a nenulová na Γ a je-li $|\Phi_0(z) - \Phi_1(z)| < \nu$ pro všechna $z \in \Gamma$, potom existuje společná numerace vytvořená funkcí Φ_0 a Φ_1, a tedy obě funkce mají na Γ touž rotaci. Odtud plyne tvrzení věty.

7. INDEX FUNKCE V NULOVÉM BODĚ

Označení. Buď $S_\varrho(z_0)$ kružnice o středu z_0 a poloměru ϱ. Zobrazení $F(z) = \frac{z - z_0}{\varrho}$ zobrazuje homeomorfně kružnici $S_\varrho(z_0)$ na jednotkovou kružnici S. Položme v definici 1,2 $\varepsilon = 1$ a přiřaďme kružnici S příslušnou orientaci t. Označme t^* tu orientaci kružnice $S_\varrho(z_0)$, jež simplexu $\Sigma^0 \subset S_\varrho(z_0)$ s vrcholy z_1^0, z_2^0 přiřazuje orientaci

$$t^*_{\Sigma^0}(z_1^0, z_2^0) = t_{F(\Sigma^0)}(F(z_1^0), F(z_2^0)) .$$

Úmluva. Od tohoto místa až do konce této práce budeme pod názvem orientace kružnice vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou kružnici budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Buď Γ orientovaná uzavřená Jordanova křivka, G její vnitřek. Buď Φ spojitá komplexní funkce definovaná na $\bar{G}$; nechť Φ má v G jen isolované nulové body, z nichž žádný neleží na Γ; označme je $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Kolem každého nulového bodu z_k opišme kružnici S_k^ε o poloměru ε, jejž volíme tak malý, aby všechny uzavřené kruhy T_k^ε s hranicemi S_k^ε ležely v G a neprotínaly se navzájem. Na každé kružnici S_k^ε je definována funkce Φ_k^ε předpisem: $\Phi_k^\varepsilon(z) = \Phi(z)$ pro $z \in S_k^\varepsilon$. Nechť čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vyhovují podmínkám kladeným na ε. Středová projekce o středu z_k určuje topologické zobrazení F kružnice $S_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$ ($F(z) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z$ pro $z \in S_k^{\varepsilon_1}$). Označme $\Psi_k^{\varepsilon_1}(z) = \Phi(F(z))$ pro $z \in S_k^\varepsilon$. Rotace funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ je zřejmě rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}, \Phi_k^{\varepsilon_1}$ jsou na $S_k^{\varepsilon_1}$ homotopní, a tedy (v důsledku věty 1,1) je rotace funkce $\Phi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Označme ji γ_k.

Definice 1,11. Číslo γ_k nazveme *indexem* funkce Φ v bodě z_k. Číslo $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k$ nazveme *algebraickým počtem* nulových bodů funkce Φ uvnitř křivky Γ.

Věta 1,2. *Algebraický počet nulových bodů funkce Φ uvnitř Γ je v absolutní hodnotě roven absolutní hodnotě rotace funkce Φ na Γ.* (Důkaz viz [1], str. 98.)

II. POMOCNÉ DEFINICE A VĚTY

1. POMOCNÁ FUNKCE A_f

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka ($\Gamma \subset E_2$), t její orientace. Zvolme bod $z_0 \in \Gamma$. Buď F homeomorfní zobrazení jednotkové kružnice S ($S \subset E_2$) na křivku

Γ takové, že je $F^{-1}(z_0) = e^{i\pi}$. Buď G zobrazení intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ na kružnici S takové, že pro $\zeta \in (-\pi, \pi\rangle$ je $G(\zeta) = e^{i\zeta}$. Parciální zobrazení $G^* = G_{(-\pi,\pi)}$, které převádí interval $(-\pi, \pi)$ na množinu $S \dot{-} e^{i\pi}$, je zřejmě homeomorfní.

Nechť z_1, z_2 jsou dva body křivky Γ, různé od z_0. Potom existuje právě jeden simplex $\Sigma \subset \Gamma$ s vrcholy z_1, z_2, který neobsahuje bod z_0. (Je to simplex $\Sigma = F[G^*(\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle)]$, kde $\zeta_i = G^{-1}(F^{-1}(z_i)]$ $(i = 1, 2)$.) Uspořádejme body křivky Γ tímto způsobem: pišme $z_1 \prec z_2$, jestliže $t_\Sigma(z_1, z_2) = +1$ (t_Σ je orientace simplexu Σ), $r_0 \prec z$ pro všechna $z \neq z_0$, $z \in \Gamma$. Tato relace zřejmě splňuje axiomy uspořádání. Dále budeme používat těchto označení:

$z \to z^*_-$, jestliže $z \to z^*$, $z \prec z^*$;
$z \to z^*_+$, jestliže $z \to z^*$, $z^* \prec z$;
$z \to z_{0-}$, jestliže $z \to z_0$, $z^1 \prec z$ pro některé $z^1 \in \Gamma$, $z^1 \neq z_0$;
$z \to z_{0+}$, jestliže $z \to z_0$, $z \prec z^1$ pro některé $z^1 \in \Gamma$;
$z^* = \min\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z^* \prec z$;
$z^* = \max\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z \prec z^*$.

Konečně intervalem (z', z'') (resp. $\langle z', z''\rangle$) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z' \prec z \prec z''$ (resp. $z' \preceq z \preceq z''$); intervalem (z_1, z_0) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z_1 \prec z$.

Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na Γ. Znakem $\arg f(z)$ (resp. $\arg' f(z)$) budeme značit číslo $\alpha(z)$ (resp. $\alpha'(z)$), pro které platí $f(z) = |f(z)| \,.\, e^{i\alpha(z)}$, $\alpha(z) \in (-\pi, \pi\rangle$ (resp. $f(z) = |f(z)| \,.\, e^{i\alpha'(z)}$, $\alpha'(z) \in \langle 0, 2\pi)$).

Buď $\mathfrak{M}$ množina všech $z \in \Gamma$, pro která je $\arg f(z) = \pi$. Jestliže je množina $\mathfrak{M}$ neprázdná, můžeme sestrojit posloupnost $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ bodů křivky Γ tímto způsobem:

$$u_1 = \min_{z \in \mathfrak{M}} z;$$

$$v_n = \min_{z \in \mathfrak{N}_n} z,$$

kde $\mathfrak{N}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $u_n \prec z$, $\arg f(z) = 0$;

$$u_{n+1} = \min_{z \in \mathfrak{M}_n} z,$$

kde $\mathfrak{M}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $v_n \prec z$, $\arg f(z) = \pi$. $(n = 1, 2, \ldots)$.

Věta. *Nechť $\mathfrak{A}$ je uzavřená množina, $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \Gamma$. Potom existuje bod $\tilde{z} = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže pro některý bod $z_1 \in \Gamma$ platí $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak existuje bod $\tilde{\tilde{z}} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Z definice orientace plyne, že existuje takové homeomorfní zobrazení H intervalu $(-\pi, \pi)$ na $\Gamma \dot{-} z_0$, že pro $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi)$, $\zeta_1 < \zeta_2$ je $H(\zeta_1) \prec H(\zeta_2)$. Buď $z' \in \mathfrak{A}$. Položme $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \langle z_0, z'\rangle$. Množina $H^{-1}(\mathfrak{B})$ je kompaktní číselná množina, a tedy existuje její minimum $\tilde{\zeta}$. Protože pro $z \in \mathfrak{A}$, z non $\in \mathfrak{B}$ je $H(\tilde{\zeta}) \prec z$, platí $H(\tilde{\zeta}) = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže je $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak $H^{-1}(\mathfrak{A})$ je rovněž kompaktní číselná množina, a tedy existuje její maximum $\tilde{\tilde{\zeta}}$ a platí $H(\tilde{\tilde{\zeta}}) = \max_{z \in \mathfrak{A}} z$.

Věta. *Buď $\mathfrak{A}$ jedna z množin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Je-li $\mathfrak{A}$ neprázdná, pak existuje bod $\tilde{z} = \min_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Množina $\mathfrak{A}$ je uzavřená v důsledku spojitosti a nenulovosti funkce f. Věta tedy plyne z předchozí věty.

Věta. *Bodů u_n, a tedy i bodů v_n, je možno sestrojit jen konečný počet.*

Důkaz. Předpokládejme, že bodů u_n existuje nekonečně mnoho. Protože množina Γ je kompaktní, můžeme z nich vybrat posloupnost konvergentní k bodu $u^* \in \Gamma$. Jsou-li u_{n_1}, u_{n_2} dva body z této posloupnosti, $n_1 < n_2$, existuje podle definice bodů u_n, v_n bod v_{n_1} takový, že je $\arg f(v_{n_1}) = 0$, $u_{n_1} \prec v_{n_1} \prec u_{n_2}$. Je tedy $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u^* = \lim_{k\to\infty} v_{n_k}$, $\arg f(u_{n_k}) = \pi$, $\arg f(v_{n_k}) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Odtud plyne $f(u^*) = 0$, což odporuje předpokladu. Věta je dokázána.

Označme $w_{2m-1} = u_m$, $w_{2m} = v_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Nechť bodů w_n existuje právě r.

Definice 2,1. *Označme A_f funkci definovanou na Γ s těmito vlastnostmi:*

Je-li $\mathfrak{M} = \emptyset$, je $A_f(z) = \arg f(z)$ *pro všechna* $z \in \Gamma$.

Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, *je*

$$\begin{aligned}
A_f(z_0) &= \arg f(z_0)\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) \quad \textit{pro} \quad z_0 \prec z \prec w_1\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w\,; \\
A_f(w_1) &= \lim_{z\to w_1-} A_f(z)\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w_1\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \prec z \prec w_{n+1} \quad \textit{při lichém } n\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \prec z \prec w_{n+1} \quad \textit{při sudém } n\,; \\
A_f(w_{n+1}) &= \lim_{z\to w_{n+1}-} A_f(z) \quad (n = 1, \ldots, r-1)\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \prec z \quad \textit{při lichém } r\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \prec z \quad \textit{při sudém } r\,.
\end{aligned}$$

Při tom k_n $(n = 1, \ldots, r)$ je voleno tak, aby platilo $\lim_{z\to w_n+} A_f(z) = A_f(w_n)$.

Bod z_0 nazveme výchozím bodem funkce A_f.

Poznámka. Z definice 2,1 je ihned vidět, že A_f je spojitou funkcí z ve všech bodech křivky Γ kromě bodu z_0, kde je spojitá zprava. Funkce A_f obecně závisí na volbě bodu z_0.

Z definice 2,1 ihned plyne tato věta:

Věta. *Nechť hodnota funkce B_f, spojité na $\Gamma \dot{-} z_0$ a spojité zprava v bodě z_0, se liší v každém bodě $z \in \Gamma$ od hodnoty $\arg f(z)$ o celistvý násobek 2π; nechť platí $B_f(z_0) = \arg f(z_0)$, kde z_0 je výchozí bod funkce A_f. Potom je $B_f(z) = A_f(z)$ pro všechna $z \in \Gamma$.*

Definice 2,2. Rozdíl $\lim_{z \to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0)$ budeme nazývat *změnou funkce* A_f na Γ.

Věta. *Změna funkce A_f nezávisí na volbě výchozího bodu.*

Důkaz. Buď z_0 výchozí bod funkce A_f; příslušné uspořádání značme $\prec$. Buď $\tilde{z}_0$ výchozí bod funkce $\tilde{A}_f$, příslušné uspořádání značme $<$. Snadno se nahlédne, že význam symbolů $z \to z^*_-$, $z \to z^*_+$ je při obou uspořádáních týž. Nechť platí

$$\tilde{A}_f(z_0) = A_f(z_0) + 2k\pi \,. \tag{2}$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $z_0 \prec z \prec \tilde{z}_0$ a nabývá tam jen hodnot, které jsou celými násobky 2π, dále je spojitá zprava v bodě z_0. Je tedy

$$\begin{aligned} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) &= 2k\pi \quad \text{pro} \quad z_0 \preceq z < \tilde{z}_0 \,, \\ \lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} A_f(z) &= A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Nechť změna funkce $\tilde{A}_f$ při výchozím bodě $\tilde{z}_0$ je rovna c, tj.

$$\lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = c \,. \tag{4}$$

Potom podle (3) je

$$\tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi - c \,.$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $\tilde{z}_0 \prec z$ a spojitá zprava v bodě $\tilde{z}_0$. Je tedy

$$\begin{aligned} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) &= 2k\pi - c \quad \text{pro} \quad \tilde{z}_0 \prec z \,, \\ \lim_{z \to z_{0-}} A_f(z) &= \tilde{A}_f(z_0) - 2k\pi + c \,, \end{aligned}$$

a tedy vzhledem k (2) a (4)

$$\lim_{z \to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0) = c = \lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(z_0) \,.$$

Věta je dokázána.

2. SOUVISLOST FUNKCE A_f S ROTACÍ FUNKCE f

Věta 2,1. *Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ. Potom rotace funkce f na Γ je rovna změně funkce A_f na Γ, dělené 2π.*

Důkaz. Zaveďme funkci φ definovanou na Γ předpisem $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{|f(z)|}$. Zřejmě je $A_f(z) = A_\varphi(z)$. Z vlastností funkce

$$X(z, t) = t\, f(z) + (1 - t)\, f(z) \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

plyne, že funkce f, φ jsou na Γ homotopní. Podle věty 1,1 nám tedy stačí vyšetřovat rotaci spojité funkce φ, $|\varphi(z)| = 1$ pro $z \in \Gamma$. Nechť $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\, \varphi_2(x, y)$.

Zvolme $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, aby v okolí poloměru 2δ libovolného bodu $z \in \Gamma$ alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 měla absolutní hodnotu větší než α a aby bylo $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Buď K dostatečně jemný simpliciální rozklad křivky Γ (všechny jeho simplexy mají průměr menší než δ_0 z odstavce 5 části I) a N jeho speciální numerace vytvořená funkcí φ (viz pozn. za definicí 1,8). Budeme předpokládat (bez újmy obecnosti), že K obsahuje lichý počet jednorozměrných simplexů.

Nechť simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3. Označme z_1 vrchol simplexu Σ s numerací 1, z_2 vrchol s numerací 3. Je tedy $\varphi_i(z_j) \geqq \alpha$ pro $i, j = 1, 2$.

Označme $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$ čísla s vlastnostmi:

$$|A| = |B| = 1\,; \quad a_1 > 0,\ a_2 = \alpha\,; \quad b_1 = \alpha,\ b_2 = a_1\,.$$

Čísla A, B jsou tím jednoznačně určena a je $\alpha < a_1$ (neboť jinak by bylo $\alpha \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$). Označme $\beta = \arg A = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a_1}$. Protože pro $j = 1, 2$ je $\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}$, platí

$$\beta \leqq \arg \varphi(z_j) = \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{\pi}{2} - \beta \quad (j = 1, 2)\,. \tag{5}$$

Naopak platí: Jestliže z_j je vrcholem v komplexu K a platí (5), pak je

$$\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}\,,$$

a tedy $\varphi_1(z_j) \geqq \alpha$, $\varphi_2(z_j) \geqq \alpha$; to znamená, že vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Dokázali jsme tedy tato dvě tvrzení:

Tvrzení 1. Jestliže simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3, pak pro jeho vrcholy z_1, z_2 platí (5).

Tvrzení 2. Jestliže pro vrchol z_j v komplexu K platí (5), pak vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Podobně lze dokázat další dvě tvrzení:

Tvrzení 3. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $|\arg \varphi(z)| < \beta$. Pak z má numeraci 1.

Tvrzení 4. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z) < \frac{\pi}{2} + \beta$. Pak z má numeraci 3.

V dalším budeme předpokládat, že numerace N má tuto vlastnost: Je-li z_i vrchol některého simplexu komplexu K, $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$, pak vrchol z_i má numeraci 1, jestliže na celé hvězdě vrcholu z_i je $\varphi_1(z) \geqq \alpha$, a 3, jestliže tomu tak není. (Z věty následující za def. 1,8 plyne, že splněním tohoto speciálního požadavku se nemění hodnota rotace funkce φ.)

Jestliže simplex Σ s vrcholy z_1, z_2 má numeraci 1, 3, pak (podle tvrzení 1) platí $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ $(i = 1, 2)$. Nechť vrchol z_1 má numeraci 1, vrchol z_2 numeraci 3. Je-li z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2, pak je (vzhledem k volbě numerace N)

$$\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta$$

a vrchol z_3 má numeraci 3. Zvolme výchozí bod $z_0 \in \Gamma$ tak, aby neležel v žádném simplexu s numerací 1, 3. (To je možné, neboť všech simplexů je lichý počet, a tedy alespoň jeden z nich nemá numeraci 1, 3.)

Buď $\mathfrak{N}$ množina všech vrcholů simplexů s numerací 1,3 ležících na Γ (resp. v intervalu $J \subset \Gamma$). Vrchol $z^1 = \min\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^1 s numerací 1, 3, ležícího na Γ (resp. v J); podobně vrchol $z^2 = \max\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^2 s numerací 1, 3. Nazvěme Σ^1 prvním a Σ^2 posledním simplexem s numerací 1, 3 na Γ (resp. v J).

Buďte Σ', Σ'' dva simplexy komplexu K s numerací 1, 3. Označme jejich vrcholy z^1, z^2, z^3, z^4 tak, aby bylo $z^1 \prec z^2 \preceq z^3 \prec z^4$. Jestliže v intervalu $\langle z^2, z^3 \rangle$ neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak budeme říkat, že simplexy Σ', Σ'' následují za sebou nebo že simplex s vrcholy z^3, z^4 následuje za simplexem s vrcholy z^1, z^2.

T v r z e n í 5. Nechť pro žádné $z \in \Gamma$ není $\arg \varphi(z) = \pi$. Potom je rotace funkce φ i změna funkce A_φ na Γ rovna nule.

D ů k a z. Jestliže na Γ neexistuje simplex s numerací 1, 3, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy existuje simplex s numerací 1, 3. Dokážeme nyní:

Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3 následují za sebou, pak jejich váhy mají různá znamení.

Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že např. simplex Σ^* s vrcholy z_1^*, z_2^* a kladnou vahou následuje za simplexem Σ s vrcholy z_1, z_2, který má rovněž kladnou váhu. Označení vrcholů volme tak, aby vrcholy s indexem 1 měly numeraci 1 a vrcholy s indexem 2 numeraci 3. Je tedy $z_1 \prec z_2 \prec z_1^* \prec z_2^*$. Buď z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2. Vrchol z_3 má numeraci 3 a platí

$$z_3 \prec z_1^*, \frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta, \beta \leqq \arg \varphi(z_1^*) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Buď $\mathfrak{A}$ množina všech $z \in \langle z_3, z_1^* \rangle$, jež jsou vrcholy simplexů komplexu K a mají numeraci 3; buď $\tilde{z} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Je $z_3 \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ konečná, a tedy $\tilde{z}$ existuje a je $z_2 \prec \tilde{z} \prec z_1^*$. Buď $\tilde{\tilde{z}}$ ten vrchol patřící k hvězdě vrcholu $\tilde{z}$, pro nějž je $\tilde{z} \prec \tilde{\tilde{z}}$. Numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ není rovna 3, neboť $\tilde{\tilde{z}}$ non $\in \mathfrak{A}$; není rovna 4, neboť pak by numerace N nebyla přípustná. Kdyby numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ byla rovna 2, platilo by $\arg \varphi(\tilde{\tilde{z}}) > \frac{\pi}{2} + \beta$ (neboť je $\varphi_2(\tilde{\tilde{z}}) \geqq \alpha$) a v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ by vzhledem ke spojitosti funkce arg φ existoval bod ζ, pro nějž by platilo arg $\varphi(\zeta) = \frac{\pi}{2}$, a tedy by v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ existoval vrchol s numerací 3, což je ve sporu s volbou bodu $\tilde{z}$. Má tedy bod $\tilde{\tilde{z}}$ numeraci 1 a v intervalu $\langle z_2, z_1^* \rangle$ leží simplex s numerací 1, 3, což je ve sporu s předpokladem, že simplexy Σ, Σ^* následují za sebou. Analogicky dojdeme ke sporu, předpokládáme-li, že oba za sebou následující simplexy mají zápornou váhu.

Nechť první simplex s numerací 1, 3 na Γ má kladnou váhu. Je tedy $-\pi < \arg \varphi(z_0) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ (jinak by v důsledku spojitosti funkce $\arg \varphi(z)$ měl první simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu). Protože funkce $\arg \varphi$ nenabývá hodnoty π, musí mít poslední simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu. Rotace funkce φ na Γ je tedy nulová.

Změna funkce A_φ na Γ je zřejmě nulová, a tedy je tvrzení 5 dokázáno.

Tvrzení 6. Nechť existuje z^0 tak, že je $\arg \varphi(z_0) = \pi$. Potom rotace funkce φ na Γ je rovna změně funkce A_φ na Γ, dělené 2π.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že jsme zvolili $z_0 = z^0$. Nechť w_n $(n = 1, \ldots, r)$ jsou body z definice 2,1. Platí tedy $w_1 = z_0$. Budeme používat tohoto tvrzení:

Buď $1 \leqq n \leqq r$. Symbolem (w_r, w_{r+1}) značme interval (w_r, z_0). Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3, ležící v intervalu (w_n, w_{n+1}), za sebou následují, pak jejich váhy mají různá znamení. (Důkaz je zcela analogický důkazu obdobného tvrzení v důkazu tvrzení 5.)

Buď n liché, $1 \leqq n \leqq r - 1$. Je tedy

$$\arg \varphi(w_n) = \arg' \varphi(w_n) = \pi\,, \quad \arg \varphi(w_{n+1}) = \arg' \varphi(w_{n+1}) = 0\,.$$

Nechť platí

$$A_\varphi(w_n) = \arg \varphi(w_n) + 2k_n\pi\,.$$

Jestliže v intervalu (w_n, w_{n+1}) neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak ze spojitosti funkce $\arg' \varphi(z)$ plyne

$$\lim_{z \to w_{n+1} -} \arg' \varphi(z) = 2\pi\,,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \lim_{z \to w_{n+1}} \arg' \varphi(z) + 2k_n\pi = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,. \tag{6}$$

Předpokládejme nyní, že v intervalu (w_n, w_{n+1}) existuje simplex s numerací 1, 3. První simplex tohoto intervalu s numerací 1, 3 musí mít zápornou váhu. Označíme-li tedy s_n (resp. p_n) počet simplexů s numerací 1, 3 a kladnou (resp. zápornou) vahou v intervalu (w_n, w_{n+1}), je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,, & \text{je-li} \quad s_n - p_n = 0\,, \\ \arg \varphi(w_{n+1}) + 2k_n\pi\,, & \text{je-li} \quad s_n - p_n = -1\,. \end{cases} \tag{7}$$

Položíme-li $A_\varphi(w_{r+1}) = \lim\limits_{z \to z_0-} A_\varphi(z)$, $(w_r, w_{r+1}) = (w_r, z_0)$, můžeme postupovat analogicky dále: Nechť je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2l_n\pi .$$

Neexistuje-li v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) simplex s numerací 1, 3, pak je

$$\lim_{z \to w_{n+2}-} \arg \varphi(z) = -\pi = \arg \varphi(z) - 2\pi ,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi . \tag{8}$$

Jestliže v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) existuje simplex s numerací 1, 3, pak první simplex s numerací 1, 3 má kladnou váhu. Je tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+2}) + 2l_n\pi , & \text{je-li} \quad s_{n+1} - p_{n+1} = 1 , \\ \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi , & \text{je-li} \quad s_{n+1} - p_{n+1} = 0 . \end{cases} \tag{9}$$

Shrneme-li výsledky (6), (7), (8), (9), dostáváme pro liché n, $1 \leqq n \leqq r - 1$

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} A_\varphi(w_n) + 2\pi , & \text{je-li} \quad (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 1 , \\ A_\varphi(w_n) , & \text{je-li} \quad (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 0 , \\ A_\varphi(w_n) - 2\pi , & \text{je-li} \quad (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = -1 . \end{cases} \tag{10}$$

Označme $s = \sum\limits_{n=1}^{r} s_n$, $p = \sum\limits_{n=1}^{r} p_n$. Je-li r sudé, dává (10) tento výsledek:

$$\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) = A_\varphi(z_0) + 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ.

Nechť je nyní r liché. Je tedy $\arg \varphi(w_r) = \arg' \varphi(w_r) = \pi$. Funkce $\arg' \varphi(z)$ je spojitá v intervalu (w_r, z_0) a nenabývá tam hodnoty 0. První simplex intervalu (w_r, z_0) s numerací 1, 3 má zápornou váhu, poslední simplex má kladnou váhu. Je tedy $s_r - p_r = 0$, $\lim\limits_{z \to z_0-} A_\varphi(z) = A_\varphi(w_r)$. Platí tedy i v tomto případě

$$\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) = 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ. Tvrzení 6 je dokázáno.

Věta 2,1 je zřejmým důsledkem dokázaných tvrzení.

3. ZMĚNA ARGUMENTU A ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Označení. Symbolem $\gamma_\varphi(z_0)$ budeme značit index funkce φ v bodě z_0.

Lemma 2,1. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom změna funkce $A_{\varphi.\psi}$ na Γ je rovna součtu změny funkce A_φ a změny funkce A_ψ na Γ.*

Důkaz. Označme $\chi(z) = \varphi(z) \, . \, \psi(z)$ pro $z \in \Gamma$. z_0 buď výchozí bod funkcí

A_χ, A_φ, A_ψ. Funkce $A_\chi(z)$, $A_\varphi(z) + A_\psi(z)$ jsou spojité pro každé $z \in \Gamma$, $z \neq z_0$, a spojité zprava v bodě z_0. Je-li $z \in \Gamma$, pak existuje celé číslo $l(z)$ tak, že

$$\omega(z) = A_\chi(z) - A_\varphi(z) - A_\psi(z) = 2l(z)\,\pi\,.$$

Funkce ω je spojitá na každé souvislé podmnožině křivky Γ neobsahující z_0, a tedy je tam konstantní. Na druhé straně ke každé dvojici bodů $z_1, z_2 \in \Gamma$, $z_1 \neq z_0 \neq z_2$, existuje souvislá podmnožina (simplex) křivky Γ, která obsahuje body z_1, z_2 a neobsahuje bod z_0. Je tedy $l(z) = l$ pro všechna $z \neq z_0$. Dále je

$$\omega(z_0) = \lim_{z \to z_0+} \omega(z) = 2l\pi\,, \quad \lim_{z \to z_0-} \omega(z) = 2l\pi\,,$$

a proto platí

$$\lim_{z \to z_0-} \omega(z) - \omega(z_0) =$$
$$= (\lim_{z \to z_0-} A_\chi(z) - A_\chi(z_0)) - (\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) + \lim_{z \to z_0-} A_\psi(z) - A_\psi(z_0)) = 0\,.$$

Lemma je dokázáno.

Z věty 2,1 plyne, že lemma 2,1 je možno formulovat ve tvaru:

Lemma 2,1'. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom rotace funkce $\varphi\,.\,\psi$ na Γ je rovna součtu rotace funkce φ a rotace funkce ψ na Γ.*

Věta 2,2. *Buď z_0 k-násobný nulový bod holomorfní funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven k.*

Důkaz. Nechť $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ v oblasti G obsahující bod z_0. Je $k \geqq 0$, $a_k \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k\,.\,\psi(z)\,,$$

kde $\psi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k}$. Je $\psi(z_0) = a_k \neq 0$, a tedy z věty 1,2 plyne $\gamma_\psi(z_0) = 0$.

Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε; položme $\chi(z) = z - z_0$. Změna funkce A_χ na S_ε je zřejmě rovna jedné, a tedy $\gamma_\chi(z_0) = 1$. Podle lemmatu 2,1' je $\gamma_\varphi(z_0) = k\,.\,\gamma_\chi(z_0) + \gamma_\psi(z_0) = k$. Věta je dokázána.

Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ, $\varphi(z) = z - z_0$. Funkce φ má uvnitř Γ právě jeden nulový bod z_0 a index funkce φ v bodě z_0 je roven jedné. Podle věty 1,2 je tedy rotace funkce φ na Γ v absolutní hodnotě rovna jedné. Při tom hodnota rotace funkce φ na Γ nezávisí na výběru bodu z_0, neboť platí toto tvrzení:

Tvrzení. Nechť z_0, z_1 jsou dva body ležící uvnitř křivky Γ. Potom funkce $\varphi(z) = z - z_0$ a $\psi(z) = z - z_1$ jsou na Γ homotopní.

Důkaz. Buď G vnitřek Γ. G je souvislá množina, a tedy lze body z_0, z_1 spojit lomenou čarou L ležící v G. Buď F homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na L takové, že je $F(0) = z_0$, $F(1) = z_1$. Funkce $X(z, t) = z - F(t)$ je spojitá a nenulová na $\Gamma \times \langle 0, 1 \rangle$ a je $X(z, 0) = z - z_0$, $X(z, 1) = z - z_1$.

Tvrzení je tedy dokázáno.

Označení. Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ. Označme t^* tu orientaci křivky Γ, při níž je rotace funkce $\varphi(z) = z - z_0$ na Γ rovna jedné.

Úmluva. Od tohoto místa budeme pod názvem *orientace uzavřené Jordanovy křivky* vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou uzavřenou Jordanovu křivku budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Definice 2,3. Za předpokladu orientace t^* křivky Γ budeme změnu funkce A_f na Γ nazývat *změnou argumentu* funkce f na Γ.

Nyní, když máme určitým způsobem definovánu orientaci křivky Γ, můžeme formulovat tuto větu:

Věta 2,3. *Buď φ spojitá funkce definovaná na uzávěru oblasti, jejíž hranicí je uzavřená Jordanova křivka Γ. Nechť je $\varphi(z) \neq 0$ pro $z \in \Gamma$. Potom algebraický počet nulových bodů funkce φ uvnitř Γ je roven rotaci funkce φ na Γ.*

Důkaz věty 2,3 je proveden v [1], str. 98. Součástí tohoto důkazu je důkaz tvrzení, obsaženého v následujícím lemmatu.

Lemma 2,2. *Buď T uzávěr oblasti, jejíž hranici tvoří uzavřená Jordanova křivka Γ; $z_1, z_2, \ldots, z_r$ nechť jsou body této oblasti. S_k^ε $(k = 1, 2, \ldots, r)$ buď kružnice o středu z_k a poloměru ε takovém, že platí:*

a) *je-li T_k^ε uzavřený kruh, jehož hranicí je kružnice S_k^ε, pak je $T_k^\varepsilon \subset T$;*

b) *pro $i \neq k$ je $T_i^\varepsilon \cap T_k^\varepsilon = \emptyset$.*

Nechť funkce Φ, definovaná na množině $T_1 = T - \overline{\bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon}$ je na T_1 spojitá a nenulová. Označme γ rotaci funkce Φ na Γ, γ_k rotaci funkce Φ na S_k^ε. Potom platí $\gamma = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k$.

Poznámka. Z vět 2,1, 2,2 a 2,3 plyne přímo princip argumentu pro holomorfní funkce, a to s vynecháním předpokladu, že křivka Γ je rektifikace schopná.

III. ZOBECNĚNÍ VĚT Z TEORIE ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

1. ZOBECNĚNÍ PRINCIPU ARGUMENTU A ROUCHÉOVY A HURWITZOVY VĚTY

Rozšíříme nyní pojem indexu funkce v bodě na libovolný bod, v jehož okolí (neobsahujícím daný bod) je uvažovaná funkce spojitá a nenulová.

Nechť funkce φ je definována v kruhovém okolí G bodu z_0. Nechť φ je spojitá a nenulová na množině $G \dot{-} z_0$. Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε takovém, že je $S_\varepsilon \subset G$. Rotace funkce φ na S_ε nezávisí na ε (viz 7. odst. I. části). Označme ji $\gamma_\varphi(z_0)$.

Definice 3,1. Číslo $\gamma_\varphi(z_0)$ nazveme *indexem funkce φ v bodě z_0*. Jestliže funkce φ má uvnitř křivky Γ jen isolované nulové body a body nespojitosti, pak součet indexů funkce φ ve všech nulových bodech a bodech nespojitosti uvnitř křivky Γ nazveme *algebraickým počtem nulových bodů a bodů nespojitosti* funkce φ uvnitř Γ.

Věta 3,1. *Buď z_0 k-násobný pól funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven $-k$.*

Důkaz je analogický důkazu věty 2,2.

Věta 3,2. *Nechť funkce f má v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a je spojitá a nenulová na Γ. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f, ležících uvnitř Γ, je roven změně argumentu funkce f na Γ.*

Důkaz. Označme $z_1, \ldots, z_r$ všechny nulové body a body nespojitosti funkce f ležící uvnitř Γ. Opišme kolem každého bodu z_k kružnici S_k^ε o poloměru ε takovém, že uzavřený kruh T_k^ε s hranicí S_k^ε leží celý v G a žádné dva z těchto kruhů nemají společný bod. Funkce f je na množině $G - \bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon$ spojitá a nenulová. Podle lemmatu 2,2 je rotace funkce f na Γ rovna součtu rotací funkce f na S_k^ε, a tedy (viz věta 2,1) věta platí.

Věta 3,3. *Nechť funkce f, φ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f, $f + \varphi$ mají v G jen konečný počet nulových bodů. Nechť pro $z \in \Gamma$ platí $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce $f(z) + \varphi(z)$ uvnitř Γ je týž jako u funkce f.*

Důkaz. Podle předpokladu je $|f(z)| > |\varphi(z)| \geqq 0$, a tedy $f(z) \neq 0$ na Γ. Nechť $X(z, t) = f(z) + t\,\varphi(z)$. Funkce X je spojitá na $\Gamma \times \langle 0, 1\rangle$ a je

$$|X(z, t)| = |f(z) + t\,\varphi(z)| \geqq |f(z)| - t|\varphi(z)| > 0\,.$$

Platí $X(z, 0) = f(z)$, $X(z, 1) = f(z) + \varphi(z)$. Funkce $f(z) + \varphi(z)$, $f(z)$ jsou tedy homotopní na Γ a věta plyne z věty 3,1.

Věta 3,4. *Nechť funkce $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f je nenulová na Γ a $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ stejnoměrně na Γ. Potom existuje číslo $\nu \geqq 0$ tak, že pro $n > \nu$ má funkce f_n uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti jako funkce f.*

Důkaz. Označme pro $z \in \Gamma$ $\chi_n(z) = f_n(z) - f(z)$. Buď $\varrho = \min_{z\in\Gamma} |f(z)|$. Podle předpokladu je $\varrho > 0$. Ze stejnoměrné konvergence funkcí f_n plyne, že existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|\chi_n(z)| < \varrho$ pro $z \in \Gamma$. Protože je $\varrho \leqq |f(z)|$, platí pro $n > n_0$ $|\chi_n(z)| < |f(z)|$ a podle věty 3,2 má funkce $f(z) + \chi_n(z) = f_n(z)$ uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a pólů jako $f(z)$. Stačí tedy položit $\nu = n_0$.

Poznámka. Z těchto vět a z věty 3,1 ihned vyplývá Rouchéova a Hurwitzova věta pro funkce holomorfní až na póly.

2. ZÁVISLOST INDEXU FUNKCE $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$ NA TVARU FUNKCÍ Φ, Ψ

Vyšetřujme nyní funkce tvaru $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou holomorfní (resp. meromorfní). Nulové body těchto funkcí na rozdíl od funkcí holomorfních nemusí být isolované, mohou tvořit celé čáry. V dalším si budeme všímat pouze isolovaných nulových bodů. Zjistili jsme, že index holomorfní funkce v daném bodě se lehce určí z koeficientů Taylorova rozvoje této funkce. Rozvineme nyní funkci $f = \bar{z}\Phi + \Psi$ v řadu analogickou řadě Taylorově, z jejíchž koeficientů lze určit index této funkce v isolovaném nulovém bodě (resp. bodě nespojitosti).

Věta 3,5. *Buďte Φ, Ψ funkce holomorfní v okolí bodu z_0, který je nulovým bodem funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$. Pišme funkce Φ, Ψ ve tvaru*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\,, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\,.$$

Buď k celé číslo, $k \geqq 1$. Nechť platí

1. $a_i = b_i = 0$ *pro* $0 \leqq i \leqq k - 2$,
2. $a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$,
3. *alespoň jedno z čísel* $|a_{k-1}|$, $|a_k\bar{z}_0 + b_k|$ *je různé od nuly.*

Potom platí: Jestliže je $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, pak z_0 je isolovaným nulovým bodem funkce f; v případě, že $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k$, a v případě, že $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k - 2$. Je-li $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$ a je-li z_0 isolovaným nulovým bodem funkce f, potom platí $k - 2 \leqq \gamma_f(z_0) \leqq k$. (Přesnější kritérium pro poslední případ je obsaženo v důkazu.)

Důkaz. Všimněme si, že věta 3,5 neklade na holomorfní funkce Φ, Ψ žádné omezující podmínky kromě předpokladu pro případ $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, že nulový bod z_0 je isolovaný. Jsou-li Φ, Ψ holomorfní funkce, pak existuje k tak, že platí 1 a 3. Můžeme tedy psát $f(z) = (z - z_0)^{k-1} \,.\, A(z)$, kde $A(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} (a_n\bar{z} + b_n)(z - z_0)^{n-k+1}$. Je-li $A(z_0) = a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$, je splněna i podmínka 2. V případě, že $A(z_0) \neq 0$, jsou splněny podmínky 1, 2, 3, dosadíme-li za k číslo $k - 1$.

Označme $u = z - z_0$; nechť Φ, Ψ jsou holomorfní a nenulové pro $|u| \leqq r_1$. Uvažujme body $u \in S_r$, kde S_r je kružnice se středem v počátku a poloměrem $r \leqq r_1$. Potom je

$$f(z) = f(u + z_0) = f^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty}[(a_n\bar{z}_0 + b_n)\, u^n + a_n r^2 u^{n-1}] = \tag{11}$$
$$= [c_k u^k + c_{k+1}u^{k+1} + \ldots] + [a_{k-1}r^2u^{k-2} + a_k r^2 u^{k-1} + \ldots]\,,$$

kde $c_n = a_n\bar{z}_0 + b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Protože je $f^*(0) = 0$, platí $c_0 = 0$.

Nechť nejdříve platí $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Předpokládejme, že je $k \geqq 2$. Z předpokladu vyplývá, že pro $0 < |u| = r \leqq r_1$ je $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k \neq 0$. Dokážeme, že existuje r_2 tak, že funkce $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k$ je pro $r < r_2$ homotopní s f^* na S_r.

Definujme pro všechna $z \in E_2$ funkce

$$f_1(u) = a_{k-1}r^2u^{k-2}\,, \quad f_2(u) = c_ku^k\,.$$

Funkce $f_1(u) + f_2(u)$ nemá uvnitř S_{r_1} nulový bod různý od nuly. Zřejmě existuje r_2 tak, že pro $r \leqq r_2$ platí

$$||c_k| - |a_{k-1}|| > r\,\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + |a_{k+2}|\,r_1^2 + \ldots] + \\ + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\}\,.$$

Ale odtud plyne pro $|u| = r \leqq r_2$

$$|f_1(u) + f_2(u)| = r^k \left|a_{k-1} + c_k\frac{u^2}{r^2}\right| \geqq ||c_k| - |a_{k-1}||\,r^k > \\ > r^{k+1}\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + \ldots] + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\} \geqq \\ \geqq r^{k+1}\left|[a_k + a_{k+1}u + \ldots] + \left[c_{k+1}\frac{u^2}{r^2} + c_{k+2}\frac{u^3}{r^2} + \ldots\right]\right| = \\ = |[a_kr^2u^{k-1} + a_{k+1}r^2u^k + \ldots] + [c_{k+1}u^{k+1} + c_{k+2}u^{k+2} + \ldots]| = \\ = |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))|\,.$$

Buď $\varepsilon \leqq r_2$. Definujme pro $|u| \leqq r_2$ holomorfní funkce

$$\varphi_1(u) = a_{k-1}\varepsilon^2u^{k-2}\,, \quad \varphi(u) = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_nu^n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n\varepsilon^2u^{n-1}\,.$$

Pro $u \in S_\varepsilon$ je

$$|\varphi_1(u) + f_2(u)| = |f_1(u) + f_2(u)| > |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))| = |\varphi(u)|\,,$$

a tedy z Rouchéovy věty plyne, že funkce $f_1 + f_2$, f^* mají touž rotaci na S_ε. Je-li $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je podle Rouchéovy věty a podle věty 2,2 rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna k, je-li $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna $k - 2$. Z definice funkce f^* plyne, že rotace funkce f^* na S_ε je rovna indexu funkce f v bodě z_0.

Je-li $k = 1$, pak pro $u \neq 0$ je $f^*(u) = \dfrac{1}{u}\,.\,g(u)$, kde $g(u) = [c_1u^2 + c_2u^3 + + \ldots] + [a_0r^2 + a_1r^2u + a_2r^2u^2 + \ldots]$. Z předešlé části důkazu plyne, že pro $|a_0| < |c_1|$ je rotace funkce g na S_ε rovna 2, a tedy (viz lemma 2,1') $\gamma_f(z_0) = 1$. Podobně pro $|a_0| > |c_1|$ je $\gamma_f(z_0) = -1$.

Nechť nyní $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Položme

$$\lambda = \frac{1}{k}\arg\frac{c_k}{a_{k-1}}\,, \quad u = v\,.\,e^{-i\lambda}\,.$$

Místo funkce f zkoumejme funkci proměnné v

$$\tilde{f}(v) = \frac{f^*(u)}{a_{k-1}},$$

kterou je možno zapsat (s použitím předpokladu, že je $\left|\frac{c_k}{a_{k-1}}\right| = 1$) ve tvaru

$$\tilde{f}(v) = v^{k-2}\{[v^2 + \alpha_{k+1}v^3 + \alpha_{k+2}v^4 + \dots] + [r^2 + \beta_k r^2 v + \beta_{k+1} r^2 v^2 + \dots]\},$$

kde $\alpha_n = \frac{c_n}{a_{k-1}} e^{-in\lambda}$, $\beta_n = \frac{a_n}{a_{k-1}} e^{-i(n-1)\lambda}$.

Nechť pro $0 < |u| \leqq \varrho_1$ je $f^*(u) \neq 0$. Funkce $\tilde{f}, f^*$ jsou zřejmě homotopní na kružnici S_r pro $r \leqq \varrho$.

Píšeme-li $v = x + iy$, pak platí $v^2 + r^2 = v(v + \bar{v}) = v \,.\, 2x$. Má-li funkce $\tilde{f}$ na kružnici S_r rotaci l, pak funkce

$$F(v) = \frac{\tilde{f}(v)}{v^{k-1}}$$

má na S_r rotaci $l - k + 1$ a platí

$$F(v) = 2x + r^2 \left\{\left[\alpha_{k+1} \frac{v^2}{r^2} + \alpha_{k+2} \frac{v^3}{r^2} + \dots\right] + [\beta_k + \beta_{k+1} v + \beta_{k+2} v^2 + \dots]\right\}.$$

Označme

$$J = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right).$$

Snadno se dokáže, že existuje číslo $\varrho_2 \leqq \varrho_1$ tak, že pro $r \leqq \varrho_2$, $\arg v$ non $\in J$ je

$$|2x| > |\mathrm{Re}\,(F(v) - 2x)|,$$

a tedy

(12) $$\operatorname{sgn} \mathrm{Re}\,(F(v)) = \operatorname{sgn} x \quad \text{pro} \quad r \leqq \varrho_2\,, \quad \arg v \text{ non} \in J\,.$$

Zaveďme označení (při značení $v = x + iy$):

$$g_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k+n} v^{n+1}, \quad g_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_k,$$

$$G(x, y) = \mathrm{Re}\,(F(v)) = 2x + \mathrm{Re}\,(g_1(x, y)) + (x^2 + y^2)\,\mathrm{Re}\,(g_2(x, y)).$$

g_1, g_2 jsou analytické funkce, proto jejich reálné části mají spojité parciální derivace. Odtud plyne existence a spojitost parciálních derivací funkce G. Dále je $\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) = 2 \neq 0$. Rovnicí $G(x, y) = 0$ je tedy v jistém okolí počátku definováno x implicitně jako funkce proměnné y se spojitou derivací.

Můžeme tedy zvolit $r \leqq \varrho_2$ tak, že na kružnici S_r leží právě dva nulové body funkce G. Označme je v_1, v_2, a to tak, aby bylo $\mathrm{Im}(v_1) > 0$ (je tedy vzhledem k (12) $\mathrm{Im}(v_2) < 0$).

Nyní se již z definice rotace lehce dokáže, že platí:

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) < 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) > 0$, pak $\gamma_F(0) = -1$.

Jestliže je $\mathrm{sgn}\, \mathrm{Im}(F(v_1)) = \mathrm{sgn}\, \mathrm{Im}(F(v_2))$, pak $\gamma_F(0) = 0$.

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) > 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) < 0$, pak $\gamma_F(0) = 1$.

Věta plyne ze vztahu $\gamma_f(z_0) = \gamma_F(0) + k - 1$.

Věta 3,6. *Buďte Φ, Ψ holomorfní funkce, z isolovaný nulový bod funkce $f(z) = \bar{z}\, \Phi(z) + \Psi(z)$. Potom platí $\gamma_f(z_0) \geqq -1$.*

Důkaz. Buď S_ε kružnice se středem z_0 a poloměrem ε takovým, že uvnitř S_ε a na S_ε je $f(z) \neq 0$. Pro $z \in S_\varepsilon$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n ,$$

kde $\alpha_{-1} = a_0 \varepsilon^2$, $\alpha_0 = a_1 \varepsilon^2$, $\alpha_n = a_n \bar{z}_0 + b_n + a_{n-1} \varepsilon^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Položíme-li $\beta_n = \alpha_{n-1}$, je

$$f(z) = (z - z_0)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n .$$

Definujme pro všechna $z \in S_\varepsilon$ funkci

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n$$

(ε je stále pevné).

g je holomorfní funkce, a tedy je uvnitř S_ε spojitá a má tam pouze isolované nulové body. Dále je $g(z) \neq 0$ pro $z \in S_\varepsilon$. Protože rotace funkce g na S_ε je rovna součtu indexů funkce g v nulových bodech uvnitř S_ε, je rotace funkce g na S_ε nezáporná. Funkce $(z - z_0)^{-1} \cdot g(z)$ je na S_ε homotopní s f, a tedy je $\gamma_f(z_0) \geqq -1$. Věta je dokázána.

Nechť nyní funkce Φ, Ψ jsou holomorfní v oblasti G až na póly; funkce $f(z) = \bar{z}\, \Phi(z) + \Psi(z)$ nechť má v G jen isolované nulové body. Je-li z_0 bodem nespojitosti funkce f, pak z_0 je nutně pólem alespoň jedně z funkcí Φ, Ψ. Body nespojitosti funkce f budeme pro stručnost nazývat póly funkce f.

Buď z_0 s-násobný pól funkce Φ a t-násobný pól funkce Ψ ($s = 0$, příp. $t = 0$ značí, že z_0 není pólem funkce Φ, příp. Ψ). Označme $r = \max(s, t)$. Je tedy možno psát

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Phi_1(z) , \quad \Psi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Psi_1(z) ,$$
$$f(z) = (z - z_0)^{-r} (\bar{z}\, \Phi_1(z) + \Psi_1(z)) = (z - z_0)^{-r} \cdot g(z) ,$$

kde Φ_1, Ψ_1 jsou holomorfní v bodě z_0. Je-li $g(z_0) \neq 0$, pak je $\gamma_g(z_0) = 0$, $\gamma_f(z_0) = -r$. Je-li $g(z_0) = 0$, pak podle lemmatu 2,1' a věty 3,1 platí $\gamma_f(z_0) = \gamma_g(z_0) - r$. Na funkci g lze aplikovat větu 3,5.

IV. ZÁVĚR

Vět dokázaných v tomto článku lze s úspěchem užít při řešení problémů rovinné pružnosti. Naznačíme příklad jejich *praktického použití*.

Při zjišťování napětí fotoelasticimetrickou metodou se usuzuje na průběh napětí v tělese ze systému čar zvaných isokliny. Při tom je třeba určit průsečíky jednotlivých isoklin, tzv. singulární body. To je v praxi ztíženo tím, že isokliny se nejeví jako křivky, ale jako širší pruhy, a singulární bod je často možno zaměnit za bod, v jehož okolí se isokliny zhušťují, ale neprotínají. Věty tohoto článku vedou na jednoduchou metodu, kterou lze určit existenci singulárního bodu ze známého průběhu isoklin v jisté vzdálenosti od tohoto bodu, kde již bývají isokliny zřetelnější.

Poznámka. Užití vyložené teorie vyjde v časopise „Aplikace matematiky" v článku „Poznámka k vyšetřování singulárních bodů ve fotoelasticimetrii" ([2]).

Literatura

[1] *М. А. Красносельский:* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва 1956.

[2] *H. Švecová*: Poznámka k vyšetřování singulárních bodů ve fotoelasticimetrii, Aplikace matematiky 5 (1960), 401—411.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ О КОРНЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ГАНА ШВЕЦОВА, Прага

В этой работе доказывается сила известных теорем теории аналитических функций — принципа аргумента, теоремы Гурвица и теоремы Руше — для функций с конечным количеством разрывов и нулев внутри замкнутой кривой Жордана. В качестве обобщения понятия кратности нуля голоморфной функции здесь принимается комбинаторно-топологическое понятие индекса функции в точке (определение для нулевых точек находится под названием „индекс неподвижной точки" в [1]). В работе доказывается что индекс комплексной функции в точке z_0 комплексной плоскости равен изменению аргумента этой функции при обходе достаточно малой окружности с центром в точке z_0, деленному на 2π.

В дальнейшем изучаются изолированные нули (соответственно разрывы) функции $f(z) = \bar{z}\Phi(z) + \Psi(z)$, где Φ, Ψ голоморфные (соответственно голо-

морфные за исключением полюсов) функции. Показывается, каким образом возможно определить значение индекса функции f в нулевой точке (соответственно в точке разрыва) при помощи коэффициентов разложения функции f в окрестности точки z_0 в ряд аналогичный ряду Тейлора.

Доказанные в этой работе теоремы удобны для применения в плоской теории упругости; при их помощи напр. получается ([2]) практически эффективный метод обнаружения существования изолированной особой точки в фотоупрулости по графику изоклинных линий.

Zusammenfassung

EINE VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE ÜBER NULLSTELLEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN

HANA ŠVECOVÁ, Praha

In dieser Arbeit wird die Gültigkeit der bekannten Sätze der Theorie der analytischen Funktionen — des Prinzips des Argumentes, des Hurwitzschen Satzes und des Satzes von Rouché — für Funktionen mit endlicher Anzahl von Unstetigkeitsstellen und Nullstellen innerhalb einer geschlossenen Jordanschen Kurve bewiesen. Als Verallgemeinerung des Begriffes der Multiplizität der Nullstelle einer holomorphen Funktion wird hier der kombinatorisch-topologische Begriff des Indexes einer Funktion im Punkte (für Nullpunkte in [1] definiert) angenommen, von dem in der Arbeit bewiesen wurde, dass er (in der komplexen Ebene) der durch die Zahl 2π dividierten Veränderung des Argumentes der gegebenen Funktion auf einer genügend kleinen Kreislinie mit dem Mittelpunkt in dem untersuchten Punkte äquivalent ist.

Ferner werden die isolierten Nullstellen (bzw. die Unstetigkeitsstellen) der Funktion $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, wo Φ, Ψ holomorph sind (bzw. holomorph bis auf die Pole), untersucht. Es wird eine Methode angegeben, welche ermöglicht, den Index der Funktion f in der Nullstelle (bzw. in der Unstetigkeitsstelle) aus den Koeffizienten einer mit der Taylorschen Reihe analogischen Entwicklung der Funktion f in der Umgebung des Punktes zu bestimmen.

Die bewiesenen Sätze kann man mit Vorteil in der mathematischen Theorie der ebenen Elastizität verwenden; sie führen z. B. auf eine praktische Methode zur Bestimmung der Existenz eines isolierten Singulärpunktes aus dem Graphikon der Isoklinen bei der photoelastizimetrischen Bestimmung des Spannungverlaufes.