

Alois Švec

Contribution tchécoslovaque à la géométrie différentielle des congruences de droites et des surfaces à réseau conjugué

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 85 (1960), No. 4, 389--409

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117340>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 85 \* PRAHA 3. XI. 1960 \* ČÍSLO 4

---

## CONTRIBUTION TCHÉCOSLOVAQUE À LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES CONGRUENCES DE DROITES ET DES SURFACES À RÉSEAU CONJUGUÉ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 26 janvier 1960)

*A l'occasion du quinzième anniversaire de la Libération de la Tchécoslovaquie*

L'article passe en revue les résultats concernant les congruences de droites et leurs surfaces focales, publiés par les géomètres tchécoslovaques dans les années 1945—1959.

L'aperçu qui va suivre a pour but de contribuer du moins partiellement à la planification de notre travail scientifique en géométrie différentielle; je suppose, en effet, qu'un choix responsable des sujets d'activité de recherches nécessite comme point de départ: 1. une revue de notre activité dans le domaine considéré; 2. un aperçu des résultats mondiaux; 3. une appréciation de nos résultats à la lumière de l'évolution mondiale.

Le présent article résume les principaux résultats des travaux cités; je signale néanmoins que j'ai, exprès, laissé de côté les résultats de M. E. ČECH des travaux [1], [2] sur les applications des congruences de droites dans la théorie des correspondances entre les espaces projectifs. Ces résultats-là seront résumés (brièvement) d'une part dans l'article en préparation sur la géométrie différentielle tchécoslovaque d'après guerre; d'autre part dans un aperçu plus étendu des résultats mondiaux en géométrie différentielle locale des correspondances entre les espaces, qui est aussi en préparation. L'article A. ŠVEC [10], engendré par une série de conférences faites à l'Institut de Géométrie de l'Université de Bologne, contient un aperçu sommaire des travaux Čech [3], [5] et [8] et Švec [1]—[8], [11].

Passons maintenant au sujet propre de notre article. La plupart des résultats contenus dans l'aperçu suivant sont dus à M. E. Čech, ou bien leurs auteurs ont été inspirés par lui, soit directement, soit indirectement. M. Čech a créé une théorie systématique des transformations développables des congruences de droites en visant principalement une analyse détaillée de leurs déformations

projectives; c'est en particulier dans la théorie des congruences  $W$  qu'on a obtenu des résultats remarquables. Il faut avouer cependant qu'une vue totale de ses résultats ne donne pas encore l'impression d'une théorie achevée et fixe, surtout à cause de lacunes désagréables. Certaines d'entre elles seront sûrement comblées au cours des années qui vont suivre, mais pour écarter d'autres lacunes il faudra résoudre des problèmes des plus difficiles.

Mes travaux sont dédiés surtout à la généralisation des résultats de M. Čech aux espaces à plusieurs dimensions. J'ai construit les fondements de la théorie des congruences de droites dans  $P_n$ ; mes articles, à l'exception de quelques résultats concrets, sont plutôt remplies d'optimisme du à la connaissance du fait que la théorie générale dans  $P_n$  est maîtrisable. Il faudra néanmoins encore un effort considérable pour arriver à l'état optimum où sera achevée une théorie cohérente dans  $P_n$  et dont le cas de  $n = 3$  sera un cas particulier. Un peu meilleure est la situation dans la théorie des déformations projectives des surfaces à réseau conjugué, où j'ai généralisé tous les résultats principaux de la théorie classique dans  $P_3$  aux espaces  $P_{2n+1}$ . Cependant, l'élargissement de cette théorie aux variétés à plusieurs dimensions paraît être extrêmement difficile.

Les travaux des membres du centre de Brno ont été inspirés par M. J. KLAPKA; à part de cela il y a encore les travaux de M. K. SVOBODA dans la théorie des surfaces dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences. Dans ces travaux, M. Svoboda apparaît comme un digne continuateur de M. O. BORŮVKA. M. Klapka avec M. J. BREJCHA ont étudié les représentations d'une surface et du complexe de ses droites canoniques dans l'espace réglé. D'une manière semblable, M. V. HORÁK a envisagé des congruences de droites  $W$  aux surfaces focales réglées.

Dans la suite, je m'abstiens de toute conclusion concernant la valeur scientifique des travaux en question, car il y a chez nous des chercheurs mieux qualifiés pour cela, et, d'autre part, il s'agit aussi en partie de mes propres travaux. Qu'il me soit permis néanmoins de dire ceci: Je pense que nos résultats atteignent le niveau mondial et qu'ils égalent, en quantité aussi bien qu'en qualité, compte tenu du nombre peu élevé de chercheurs qui s'en occupent, p. ex. les résultats de l'école de Moscou du M. S. P. FINIKOV. Pour les années qui vont suivre, je souhaite à notre géométrie différentielle l'élimination de toutes les lacunes (même des plus difficiles) mentionnées ci-dessus et surtout un développement continu en ampleur ainsi qu'en profondeur.

## I. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS L'ESPACE PROJECTIF À TROIS DIMENSIONS

1. M. E. Čech étudie dans son travail [3] les *systèmes généraux à deux paramètres de droites*  $L$  dans l'espace projectif  $P_n$  à  $n$  dimensions. Si  $L$  est formée des droites  $p = (x, y)$ ,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , alors nous appelons espace tangent

à  $L$  le long de la droite  $p$  l'espace  $\tau = (x, y, x_u, x_v, y_u, y_v)$ . Dim  $\tau = m$  est appelé caractère de  $L$ ; on a  $3 \leq m \leq 5$ . Dans l'espace  $P'_n$  soit situé un autre système  $L'$  formé de droites  $p' = p'(u, v)$  et qui est en correspondance  $T$  avec  $L$ . La correspondance  $T$  peut être prolongée en correspondance ponctuelle  $T^*$  entre les variétés  $V_3$  et  $V'_3$ , formées des points des droites des systèmes  $L$  et  $L'$  de telle manière que nous choisissons une correspondance ponctuelle  $\pi = \pi(u, v)$  entre chaque paire de droites  $p, p'$  en correspondance. Nous disons que  $T$  est une *déformation ponctuelle* s'il existe un prolongement  $T^*$  de  $T$  tel que pour chaque  $(u, v)$  il existe une homographie  $K(u, v): P_n \rightarrow P'_n$ , qui soit homographie tangente à la correspondance  $T^*: V_3 \rightarrow V'_3$  pour chaque paire de points  $z, z' = \pi(u, v)z; z \in p(u, v)$ ; toutes les correspondances  $\pi$  sont alors nécessairement des projectivités. D'après leur caractère et les propriétés des variétés focales (c'est-à-dire des surfaces ou des courbes directrices) il est possible de distinguer dix types de systèmes  $L$  de droites, la déformation ponctuelle étant possible seulement entre deux systèmes du même type. On a résolu la question de savoir quand deux systèmes de même type sont en déformation ponctuelle et l'on a donné une construction des correspondances  $T$  et  $\pi$ .

2. Les travaux [5]—[9] de M. Čech sont dédiés à une étude détaillée des *correspondances développables* (qui font correspondre des surfaces développables) *entre des congruences de droites dans  $P_3$* .

Dans  $P_3$  soit située une congruence non-parabolique de droites, que l'on peut donc décomposer de deux manières en couches de surfaces développables. Associons à chaque droite un repère local de telle manière que  $A_1, A_2$  soient les foyers et  $(A_1, A_3), (A_2, A_4)$  soient les transformées de Laplace de la droite  $p$ ; les équations fondamentales peuvent alors être écrites sous la forme (les équations  $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$  donnent des surfaces développables)

$$(1) \quad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4; \end{aligned}$$

on oriente la congruence  $L$  en déclarant  $A_1$  pour le premier foyer. Les formes

$$(2) \quad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1 \frac{\omega_2^3}{\omega_1}, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2 \frac{\omega_1^3}{\omega_2}$$

appelées *forme ponctuelle, planaire, première forme focale et seconde forme focale*, liées par l'identité  $\varphi\varphi^* = F_1F_2$  et les équations

$$(3) \quad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0, \quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0$$

sont alors invariantes. A la différence de M. A. TERRACINI<sup>1)</sup> qui appelle *élément*

<sup>1)</sup> A. TERRACINI, Su alcuni elementi lineari proiettivi (Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 2, 401—428, 1933), et Osservazioni sulla geometria proiettiva delle congruenze di rette (Atti Ist. Veneto, 94, 75—86, 1934).

projective linéaire de la congruence  $L$  la forme  $\frac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$ , M. Čech réserve ce nom à l'ensemble des formes et des équations (2) + (3).

Chaque droite  $p$  de la congruence  $L$  peut être considérée comme une droite  $p^*$  de l'espace dual  $P_3^*$ ; l'ensemble des droites  $p^*$  engendre dans  $P_3^*$  une nouvelle congruence, appelée *dualisation*  $L^*$  de la congruence  $L$ . Si j'introduis de manière habituelle les repères duelles

$$E_1 = [A_2 A_3 A_4], \quad E_2 = -[A_1 A_3 A_4], \quad E_3 = [A_1 A_2 A_4], \quad E_4 = -[A_1 A_2 A_3],$$

les équations fondamentales de la dualisation deviennent

$$(4) \quad \begin{aligned} dE_3 &= -\omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4 - \omega_1E_1, \\ dE_4 &= -\beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4 - \omega_2E_2, \\ dE_1 &= -\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2, \\ dE_2 &= -\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - \alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2. \end{aligned}$$

Le changement d'orientation est donc donnée, dans l'expression analytique, par la substitution

$$(5) \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & \omega_2 & \omega_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

et le passage à la dualisation par la substitution

$$(6) \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -\omega_1 & -\omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

De cela on voit déjà que les congruences  $L$  et  $L^*$  sont en correspondance développable, et, en même temps, on peut constater de quelle manière change l'élément projectif linéaire lors d'un changement d'orientation ou bien lors du passage à la dualisation.

Dans la suite, nous supposons que  $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$ , les congruences  $L$  et  $L^*$  ont alors chacune deux surfaces focales. On trouve la signification géométrique des formes (2); les équations (3) donnent les asymptotiques de la première ou de la seconde surface focale de la congruence  $L$ .

3. Soient données deux congruences  $L, L'$  (dans l'espace  $\hat{P}_3$ ) en correspondance  $T$ . Je dirai que  $T$  est une *déformation projective* de second ordre, si pour chaque paire de droites  $p, p'$  en correspondance il existe une homographie osculatrice  $H: P_3 \rightarrow P_3$ , réalisant un contact analytique de second ordre des congruences  $HL, L'$  le long de la droite  $p'$  (le contact étant compris au sens réglé où les deux congruences sont représentées de la manière bien connue par des surfaces de l'hyperquadrique de Klein dans  $P_5$ ). *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences  $L$  et  $L'$  soient en déformation projective de second ordre est l'égalité de leurs éléments projectifs linéaires.* Cette condition est équivalente à la condition que  $L$  et  $L'$  soient en déformation ponctuelle, planaire, focale (de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce) et asymptotique (de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>e</sup>

espèce); ici nous disons que  $L$  et  $L'$  en correspondance développable sont en *déformation ponctuelle* si leurs formes ponctuelles coïncident, etc. Il s'ensuit de la forme de l'élément projectif linéaire (2) + (3) que si  $L$  et  $L'$  sont en trois des six déformations mentionnées, elles sont aussi en déformation projective de second ordre. La signification géométrique des déformations asymptotiques est évidente; elle a été donnée déjà ci-dessus pour le cas d'une déformation ponctuelle (et donc aussi duelle pour une déformation planaire). On a  $F_1 = F'_1$  si et seulement s'il existe pour chaque paire de droites  $p, p'$  une homographie  $h: P_3 \rightarrow P_3$  réalisant un contact analytique des congruences  $L, L'$  et des surfaces  $(A_1), (A'_1)$  et  $(E_3), (E'_3)$ ; après un changement d'orientation on trouve la géométrisation de la condition  $F_2 = F'_2$ . Dans le travail [6] de Švec, on trouve une autre signification géométrique de ces déformations élémentaires à l'aide de l'étude de la correspondance existant entre les images de Klein de deux congruences.

Passons maintenant aux *problèmes d'existence*, voir Čech [5]—[7]. Auparavant, on savait seulement<sup>2)</sup> qu'une paire de congruences en déformation projective dépendait d'une fonction de deux variables, et on connaissait le résultat de Bam-Zelikovič: à chaque surface on peut construire une congruence déformable de tangentes, avec un choix arbitraire de sept fonctions d'une variable.

Les résultats de M. Čech sont les suivants (nous désignons par  $P, II, F_1, F_2, A_1, A_2$  les déformations ponctuelle, planaire, focale de 1<sup>re</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce, asymptotique de 1<sup>re</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce, respectivement): *On peut choisir la congruence  $L$  et les congruences  $L'$  qui sont en déformation  $P, \dots, A_2$  avec  $L$  dépendent d'une fonction de deux variables.* Dans le cas des déformations doubles, on ne trouve en principe que les types  $PII, PA_1, A_1A_2, F_1F_2$ ; *on peut choisir la congruence  $L$ , ses déformations dépendent alors de quatre fonctions d'une variable.* Ensuite, on a établi le résultat bien général que voici: *Les congruences pour lesquelles on s'est donné deux relations valables entre les formes (2) (p. ex. de la forme  $\varphi_i(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1, u, v) = 0$ , où  $du dv = 0$  sont les surfaces développables de  $L$ ), dépendent de six fonctions d'une variable.* Un cas spécial de ce théorème est constitué par théorème d'existence des congruences  $R$ , dû à Cartan; je montrerai cela au paragraphe 13.

4. Supposons que  $L$  et  $L'$  soient en déformation projective  $T$  de second ordre, elles sont alors aussi en déformation ponctuelle et planaire. Chacune de ces déformations est réalisée par une seule homographie, désignons-la par  $K, H, H^*$ , respectivement. *Si deux de ces homographies coïncident, il en va de même pour la troisième et  $T$  est une déformation projective singulière* dans ce sens que  $K$  réalise aussi un contact analytique de second ordre des surfaces focales de deux congruences.<sup>3)</sup> D'une manière générale, les homographies  $K, H, H^*$  ne coïnci-

<sup>2)</sup> С. П. Фиников, Теория конгруэнций. Москва-Ленинград, 1950, p. 493 et 499.

<sup>3)</sup> Voir E. CARTAN, Sur le problème général de la déformation, CR Congrès Strasbourg 1920, 397—406.

dent que pour les points de la droite  $p \in L$ , or, si elles coïncident encore pour d'autres points (sans qu'il s'agisse du cas singulier), alors elles coïncident pour les points d'une des plans focales; nous parlons alors d'une *déformation demi-singulière*. Une paire de congruences en déformation demi-singulière dépend de neuf fonctions d'une variable.

Une déformation projective  $T$  existant entre  $L$  et  $L'$  peut être prolongée en correspondance ponctuelle  $T^*$  de telle manière que les points des droites correspondantes  $p$  et  $p'$  se correspondent en homographie osculatrice  $H$ . Les déformations projectives  $T$  singulières sont caractérisées par le fait qu'elles sont *totalemtent asymptotiques*, c'est-à-dire que les asymptotiques de toute paire de surfaces non-développables des congruences  $L$  et  $L'$  sont en correspondance  $T^*$ , voir Čech [2, IV]. Dans le cas où  $T$  n'est pas demi-singulière (et dans ce cas seulement), il existe une seule *décomposition canonique* de  $L$  en une couche de surfaces réglées non-développables, qui sont transformées asymptotiquement par  $T^*$ .

5. Les notions qui viennent d'être introduites sont exploitées dans le travail Čech [8] pour une nouvelle étude détaillée de déformations projectives des congruences  $W$ . On peut spécialiser le repère d'une telle congruence de telle façon que l'on ait

$$(7) \quad \alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = 1, \quad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0,$$

où le repère est déterminé aux irrationalités près. L'élément projectif linéaire étant de la forme

$$(8) \quad \varphi = \varphi^* = -\omega_1\omega_2, \quad F_1 = \frac{\omega_2^3}{\omega_1}, \quad F_2 = \frac{\omega_1^3}{\omega_2}, \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0,$$

une congruence  $L$  du type  $W$  est en déformation projective avec sa dualisation  $L^*$ . La déformation projective  $L \rightarrow L^*$  est singulier seulement dans le cas où  $L$  appartient à un complexe linéaire fixe  $\Omega$  (et alors  $L \rightarrow L^*$  se réduit à une polarité par rapport à  $\Omega$ ). Les congruences  $W$  à dualisation demi-singulière dépendent de quatre fonctions d'une variable. Si aucun des cas précédents ne se présente, nous obtenons une décomposition canonique de la congruence  $L$  par rapport à la déformation projective  $L \rightarrow L^*$ ; si nous écrivons, compte tenu de (7)

$$\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{33} &= \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2, \\ \omega_{11} - \omega_{22} &= \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2, \end{aligned}$$

la décomposition canonique sera donnée par l'équation

$$(9) \quad t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = 0.$$

Nous dirons que  $L$  a une *dualisation asymptotique* (de 1<sup>ère</sup> ou de 2<sup>e</sup> espèce), si la décomposition canonique correspond à une des deux couches d'asymptotiques sur les surfaces focales ( $\omega_1 - \omega_2 = 0$  ou  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ ); on a  $t_1 - t_2 = 0$  ou bien  $t_1 + t_2 = 0$  pour la 1<sup>ère</sup> ou la 2<sup>e</sup> espèce respectivement.

Un problème général est celui de trouver toutes les congruences  $W$  à l'élément projectif donné. En résolvant ce problème extrêmement compliqué on n'a trouvé que des résultats partiels (bien que très importants): *Toute congruence  $W$  admet au plus  $\infty^6$  de déformations projectives qui n'appartiennent pas à un complexe linéaire et qui n'ont pas de dualisation asymptotique*; le maximum  $\infty^6$  n'étant atteint que dans le cas de  $z_1 = z_2 = 0$ . On est conduit au même problème en cherchant les éléments projectifs linéaires, réalisables à la fois par deux congruences  $W$  à dualisations asymptotiques d'espèces opposées. Toutes les congruences de ce type sont mutuellement en déformation projective et une déformation projective de chacune d'entre elles est du même type. Dans le travail Čech [9], on montre ensuite, que, *ces congruences dont chacune est une déformation projective de la congruence des tangentes à une quadrique régulière qui appartiennent au complexe linéaire, coïncident avec les congruences  $D$  qui réalisent une déformation projective de second ordre entre leurs surfaces focales.*<sup>4)</sup>

*Toute congruence à dualisation asymptotique admet des déformations projectives qui ont des dualisations asymptotiques de la même espèce et qui dépendent d'une fonction d'une variable; à part cela elle admet encore une déformation appartenant au complexe linéaire. Les congruences de ce type ont, comme cela a été montré dans Čech [9], des surfaces focales réglées; si au contraire une congruence  $W$  a des surfaces focales réglées elle a aussi une dualisation asymptotique, ou bien elle appartient au complexe linéaire et est une déformation projective d'une congruence  $W$  à dualisation asymptotique. L'étude de ces congruences a été poursuivie par M. V. Horák, voir aussi notre paragraphe 8.*

Dans son travail [8] M. Čech a donné explicitement toutes les formes  $\omega_{ij}$  pour les congruences  $R$  à dualisation asymptotique:

$$(10) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= f dv, \quad \omega_2 = f du, \quad f = f(u + v) \neq 0, \\ \omega_{31} &= cf^3 dv - f \cdot (du + 2dv), \quad \omega_{42} = cf^3 du - f \cdot (2du + dv), \\ z_1 &= z_2 = -f^{-2}f', \quad t_1 = t_2 = \varphi(u + v), \\ \omega_{32} &= (z_2 - t_2)\omega_1 + (z_1 - t_1)\omega_2, \\ \omega_{41} &= -(z_2 + t_2)\omega_1 - (z_1 + t_1)\omega_2. \end{aligned}$$

L'élément projectif linéaire dépend de  $f = f(u + v)$  et chaque congruence admet des déformations projectives dépendant d'une constante  $c$  et d'une fonction  $\varphi(u + v)$ ; en choisissant  $t_1 = t_2 = 0$  nous obtenons  $\infty^1$  déformations projectives appartenant au complexe linéaire. La fin du travail [9] de M. Čech montre que le problème de trouver les déformations projectives des congruences  $R$  se réduit à la résolution d'un système (en  $t$ ) de la forme

$$(11) \quad t_{uu} - t_{vv} - 2(\mu_u t_u - \mu_v t_v) = 0, \quad (t_u^2 - t_v^2)_{uv} = A;$$

<sup>4)</sup> Voir E. ČECH, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces, I + II (Rend. Acc. Lincei, 6 (8), 484—486 et 552—554, 1928); S. P. ФІГІНКОВ, Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points correspondants (Bull. Math., (2) 56, 117—136, 1936), et Теория конгруэнций, chap. XI.



on y trouve les congruences  $R$  dont les surfaces focales ne sont pas réglées, mais que l'on peut déformer en congruences à surfaces focales réglées.

Dans son travail [5], M. Čech constate que le groupe continu des déformations projectives d'une congruence générale en elle-même a au plus deux paramètres et que, dans ce cas-là, l'élément projectif linéaire a une des formes

$$(12) \quad \varphi = c_1 x \, du \, dv, \quad \varphi^* = c_2 x \, du \, dv, \quad F_1 = c_3 x \frac{du^3}{dv}, \quad F_2 = c_4 x \frac{dv^3}{du},$$

où  $x = 1$ , ou  $x = u^{-2}$ , ou  $x = (u + v)^{-2}$ , et où  $c_i$  sont constantes.

6. Le même travail [5] de M. Čech contient certains résultats concernant la déformation projective des *congruences paraboliques*. Si la congruence  $L$  a une surface focale, alors le problème de trouver ses déformations projectives est identique au problème de trouver les *demi-déformations*<sup>5)</sup> *asymptotiques* de sa surface focale; *les déformations projectives de la congruence  $L$  dépendent donc de cinq fonctions d'une variable*. Le cas de déformations singulières et demi-singulières peut être transporté aisément au cas parabolique. *Les déformations singulières de la congruence  $L$  sont celles pour lesquelles la surface focale est déformée projectivement du type  $R_0$  (et  $L$  est la congruence  $R_0$  correspondante). Les congruences demi-singulièrement déformables dépendent de huit fonctions d'une variable*.

7. Dans mon travail [13] je résous dans une certaine mesure le problème de trouver le *système de géométries intérieures* des congruences de droites, dont la conservation est équivalent à une déformation projective.<sup>6)</sup> Supposons que la congruence  $L$  soit *ponctuellement normalisée*<sup>7)</sup> de telle façon qu'à chacune de ses droites  $p$  corresponde une droite  $q$  qui coupe les deux transformées de Laplace de la droite  $p$ ; supposons ensuite que  $L$  soit normalisée planairement, c'est-à-dire que sa dualisation  $L^*$  soit normalisée ponctuellement (je parle alors de la normalisation de  $L$ ). Soient maintenant  $L$  et  $L'$  deux congruences en correspondance développable  $T$ . On peut montrer que tout prolongement ponctuel  $T_b^*$  de la correspondance  $T$  (voir paragraphe 1) conduit à un seul prolongement  $T_r^*$  de la transformation développable induite entre  $L^*$  et  $L'^*$ . *Si l'on peut normaliser  $L$  et  $L'$  et qu'il existe des prolongements  $(T_b^*, T_r^*)$  tels que les deux connexions induites coïncident, alors  $T$  est une déformation projective, et réciproquement*. Si ce cas-là se présente, toute normalisation de la congruence  $L$  détermine d'une manière univoque la normalisation de  $L'$  et les deux prolongements  $(T_b^*, T_r^*)$  conduisant à la coïncidence des deux géométries intérieures.

<sup>5)</sup> Voir E. ČECH, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces (Rozprawy Českého akad., 38, No 3, 1—38).

<sup>6)</sup> Ce problème a été posé par M. S. P. FINKOV dans son livre Теория конгруэнций, p. 485.

<sup>7)</sup> La notion de normalisation a été introduite par E. BORTOLOTTI dans Connessioni nelle varietà luogo di spazi (Rend. Sem. Univ. Cagliari, III, 1933) et dans Sulla geometria differenziale delle congruenze di rette (Atti Soc. Ital. per Progresso della Scienze, XXII. Riun.-Bari, Col. II, 185—187, 1933).

8. Dans son travail [1] M. V. Horák a envisagé en détail les congruences  $W$  aux surfaces focales réglées (*congruences de Segre*). C. Segre<sup>8)</sup> a trouvé le théorème suivant: Soient  $p, p'$  deux droites, correspondant l'une à l'autre, des surfaces focales d'une congruence de Segre  $L$  et en même temps leurs images sur l'hyperquadrique  $Q$  de Klein dans  $P_5$ , alors les droites  $(p, p')$  engendrent dans  $P_5$  une surface développable. L'étude des congruences de Segre s'identifie donc à l'étude d'une courbe (prise comme arrête de rebroussement de la surface développable mentionnée) dans l'espace  $P_5$ , muni d'une hyperquadrique de même type que celle de Klein. La congruence  $L$  de Segre est décomposable en une couche de demi-quadriques, les demi-quadriques complémentaires déterminent la congruence de Segre associée  $L'$ . M. Horák considère six types de congruences de Segre  $L$  (entre parenthèses je donne la représentation dans l'espace  $P_5$  de Klein): 1.  $L$  et  $L'$  générales (courbe dans  $P_5$ ); 2.  $L$  est située dans un complexe linéaire non-singulier,  $L'$  est générale (cône dont le sommet n'est pas situé dans  $Q$ ); 3.  $L$  est située dans le complexe linéaire singulier,  $L'$  est générale (cône au sommet dans  $Q$ ); 4.  $L$  est générale,  $L'$  se trouve dans un complexe linéaire non-singulier (courbe dans l'hyperplan de l'espace  $P_5$  qui n'est pas tangent à  $Q$ ); 5.  $L$  générale,  $L'$  dans un complexe linéaire singulier (courbe dans l'hyperplan tangent à  $A$ ); 6.  $L$  générale, située dans une congruence linéaire non-parabolique (courbe dans  $P_3 \subset P_5$ ,  $P_3$  n'est pas tangent à  $Q$ ).

Regardons de plus près le cas 1. Soit  $x = 0$  l'équation de  $Q$ , alors à chaque courbe  $x_i = x_i(t)$  dans  $P_5$  on peut associer un repère polaire  ${}^iN$  tel que les formules de Frenet aient lieu

$$(13) \quad \begin{aligned} {}^1N' &= \pi_2 \cdot {}^2N, \\ {}^2N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \pi_2 \cdot {}^1N + \varepsilon_1 \pi_3 K_1 \cdot {}^3N, \\ {}^3N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \pi_3 K_1 \cdot {}^2N + \varepsilon_2 \pi_4 K_2 \cdot {}^4N, \\ {}^4N' &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \pi_4 K_2 \cdot {}^3N + \varepsilon_3 \pi_5 K_3 \cdot {}^5N, \\ {}^5N' &= -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \pi_5 K_3 \cdot {}^4N + \varepsilon_4 \pi_6 K_4 \cdot {}^6N, \\ {}^6N' &= -\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 \pi_6 K_4 \cdot {}^5N; \quad {}^iN \cdot {}^iN = \varepsilon_i \end{aligned}$$

et que les points  ${}^1N, x$  coïncident géométriquement;  $\pi_i$  et  $\varepsilon_i$  sont des signes, dont trois (et seulement trois)  $\varepsilon_i$  sont positifs. Les fonctions  $K_i > 0$  et les signes  $\varepsilon_i$  forment le système complet d'invariants unimodulaires. Les congruences de Segre ont été étudiées déjà auparavant par M. J. Klapka,<sup>9)</sup> on a pris pour base de leur théorie le système d'équations  $((y, z)$  et  $(\bar{y}, \bar{z})$  sont droites des surfaces focales,  $y = y(v)$ , etc.)

$$(14) \quad y' = \left( Q + S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) y - Pz + \alpha \bar{y}, \quad z' = Ry + \left( S - Q - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) z + \alpha \bar{z},$$

<sup>8)</sup> C. SEGRE, Le congruenze rettilinee  $W$  aderenti a due superficie rigate (Acc. R. Torino, 42, 539—550, 1906—1907).

<sup>9)</sup> J. KLAPKA, O  $W$ -kongruencích s fokálními plochami přímkovými (Spisy přír. fak. Brno, No 69, 1926).

$$\bar{y}' = - \left( Q + S + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{y} + P\bar{z} + \pi\alpha y, \quad \bar{z}' = - R\bar{y} + \left( Q - S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{z} + \pi\alpha z,$$

$$Q^2 - PR = \varepsilon; \quad (yzy'z') = (\bar{y}\bar{z}\bar{y}'\bar{z}') = \omega; \quad \pi^2 = \omega^2 = 1;$$

les expressions et les signes

$$(15) \quad H = Q'^2 - P'R', \quad \alpha \neq 0, \quad S, \quad K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}, \quad \omega, \quad \pi, \quad \varepsilon$$

sont alors invariants unimodulaires. M. Horák a montré ensuite que la congruence (14) est représentée dans  $P_5$  par la courbe

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2\nu} |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \quad \nu^2 = 1;$$

si l'on y introduit ensuite le paramètre  $t$  par la relation  $2|S| dv = dt$ , on obtient pour les invariants la représentation suivante:

$$(16) \quad K_1 = |\alpha S^{-1}|, \quad K_2 = |S|^{-1}, \quad K_3 = \frac{1}{2} |S|^{-1} \sqrt{|\overline{H}|}, \quad K_4 = \frac{1}{4} |K| \cdot |SH|^{-1},$$

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon,$$

$$\varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H.$$

9. Passons enfin à résumer les résultats de MM. J. Klapka et J. Brejcha. E. J. Wilczynski<sup>10)</sup> a démontré que dans une correspondance entre les surfaces focales d'une congruence flecnodale  $L$  les *lignes flecnodales* des surfaces focales se correspondent si et seulement si  $L$  est située dans un complexe linéaire. M. Klapka a montré<sup>9)</sup> que le théorème subsiste pour n'importe quelle congruence de Segre; dans son travail [1] il a montré qu'il en va de même pour toute congruence  $W$ .

A. Terracini a introduit<sup>11)</sup> la notion de paires de courbes *conjuguées* et *biconjuguées* d'une surface réglée. Le problème principal du travail Klapka [3] est celui de trouver des conditions sous lesquelles deux courbes conjuguées le restent lors d'une transformation asymptotique de la surface réglée. Il n'est pas possible de donner tous les résultats sans signaler préalablement toute une série de notions qui ne sont guère courantes. Lors des applications à la théorie des congruences de droites on montre que dans une congruence  $L$  il existe cinq couches de surfaces réglées qui touchent les surfaces focales en courbes conjuguées mutuellement; ces couches donnent dans la représentation de Klein les *courbes principales de Segre*<sup>12)</sup> de la surface représentant  $L$ .

Dans son travail [2] M. Klapka détermine le système différentiel fondamental d'une surface  $\pi$  en  $S_3$  dans un espace réglé de telle manière que l'on prend pour le repère local les points  $U_2, U_1, U, V, V_1, V_2$  de la suite de Laplace,  $U$  et  $V$  étant les images des tangentes asymptotiques; il y déduit aussi l'équation de l'hyper-

<sup>10)</sup> E. J. WILCZYNSKI, Proj. dif. geometry of curves and ruled surfaces (Leipzig 1910).

<sup>11)</sup> A. TERRACINI, Diretrtrici congiunte di una rigata (Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. Torino, 9, 1949—50), et Nuove superficie particolare dello  $S_5$ ... (ibid., 15, 1955—56).

<sup>12)</sup> E. P. LANE, Proj. dif. geometry (Chicago 1942), p. 415.

quadrique de Klein en coordonnées locales. En tant qu'application, M. Klapka démontre le théorème connu disant que l'enveloppe du système des quadriques de Lie de la surface  $\pi$  se compose de la surface  $\pi$  et des surfaces formées des sommets du quadrilatère de Demoulin. A ces travaux se joigne le travail [1] de M. Brejcha. Il trouve les coordonnées locales des images des *droites canoniques* et démontre à nouveau l'équivalence de la définition de Bompiani des directrices de Wilczynski.<sup>13)</sup> Il trouve ensuite des conditions pour que le complexe des droites canoniques d'une surface  $\pi$  de 1<sup>ère</sup> ou de 2<sup>e</sup> espèce ait pour son image de Klein des systèmes de droites  $L$  ou  $L'$  de caractère cinq. Les systèmes  $L$  ou  $L'$  pour les surfaces dont les courbes canoniques sont de Segre ont en même temps le caractère  $m = 5$  ou  $m < 5$ .

## II. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS LES ESPACES PROJECTIFS À PLUSIEURS DIMENSIONS ET DANS LES ESPACES COURBÉS

10. La plupart des travaux sur la géométrie différentielle projective des congruences de droites dans les espaces à plusieurs dimensions traitent leurs transformées de Laplace et les questions qui s'y attachent. On n'a prêté que très peu d'attention à la généralisation des résultats valables dans  $P_3$  au cas général de  $P_n$ ; ici on ne trouve pratiquement que les travaux de M. B. Segre et de M. F. Marcus.<sup>14)</sup>

Dans mon travail [1], j'étudie les déformations projectives de second ordre des congruences de droites dans  $P_n$ . Dans le cas où  $n \geq 5$ , la *déformation projective est équivalente à la déformation ponctuelle*. Dans  $S_4$  on peut choisir la congruence  $L$ , ses déformations projectives dépendent de huit fonctions d'une variable;  $L$  et  $L'$  sont alors aussi en déformation ponctuelle. Soient  $L$  et  $L'$  en déformation ponctuelle  $T$ , le prolongement correspondant (voir paragraphe 1) soit formé d'homographies  $\pi : p \rightarrow p'$ . Les dualisations des congruences  $L, L'$  sont les surfaces  $L^*, L'^*$ , dont les „points“ sont des espaces tangents des congruences  $L, L'$ . Il existe des homographies  $K : S_4 \rightarrow S'_4$  tangentes à  $T$  et réalisant un contact analytique de premier ordre de  $L, L'$  et  $L^*, L'^*$ ; elles induisent toutes une même homographie  $\pi' : p \rightarrow p'$ . Alors  $\pi \equiv \pi'$  est la condition nécessaire et suffisante pour que  $T$  soit une déformation projective.

Les origines de la théorie systématique des congruences de droites dans les espaces  $P_{2n}$  de dimension *paire* sont étudiées dans mon travail [12]; cette théorie devient, après dualisation, équivalente à la théorie des surfaces à réseau conjugué dans  $P_{2n}$ . Si les équations fondamentales du repère mobile sont

<sup>13)</sup> FUBINI-E. ČECH, Geom. proi. dif. I, p. 147.

<sup>14)</sup> B. SEGRE, L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites (Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. de Belgique, (5) 39, 481—489, 1953); F. MARCUS, Elementul liniar proiectiv al unei congruente de drepte din  $S_5$  (Studii si Cercet. Acad. RPR, Iasi, 10, 129—140, 1959).

$dA_i = \omega_{ij}A_j$  ( $i, j = 1, \dots, 2n + 1$ ), il est possible de spécialiser les repères de telle sorte que l'on ait (je pose  $\omega_{13} = \omega_1, \omega_{24} = \omega_2$ )

$$(17) \quad \begin{aligned} \omega_{2j-1,2j+2} &= \omega_{2j,2j+1} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ \omega_{2j-1,s} &= \omega_{2j,s} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1; s = 2j+3, \dots, 2n+1), \\ \omega_{2j-1,2j+1} &= \omega_1, \quad \omega_{2j,2j+2} = \omega_2 \quad (j = 2, \dots, n-1), \\ \omega_{12} &= \alpha_1\omega_2, \quad \omega_{34} = \omega_{56} = \dots = \omega_{2n-1,2n} = 0, \\ \omega_{21} &= \beta_1\omega_1, \quad \omega_{43} = \omega_{65} = \dots = \omega_{2n,2n-1} = 0, \\ \omega_{2n-1,2n+1} &= \gamma_1\omega_1, \quad \omega_{2n,2n+1} = \gamma_2\omega_2. \end{aligned}$$

Les formes

$$(18) \quad \varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2, \quad \varphi_1 = \alpha_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_1^n}, \quad \varphi_2 = \beta_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_2^n} \quad (\varphi = \varphi_1\varphi_2)$$

sont alors invariantes; l'expression  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$  est appelée élément projectif linéaire de  $L$ . Pour  $\Phi$  donné, les congruences correspondantes existent et dépendent de  $4n$  fonctions d'une variable. Etant données  $L$  et  $L'$  en transformation développable  $T$ , considérons les homographies  $K_0: P_{2n} \rightarrow P'_{2n}$  réalisant un contact géométrique d'ordre  $n-1$  des courbes des réseaux conjugués des deux surfaces focales qui ne touchent pas les droites correspondantes  $p \in L, p' \in L'$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $K_0$  réalisant un contact de premier ordre des  $i$ -èmes surfaces focales et des dualisations  $L^*, L'^*$  (ou bien un contact de premier ordre des deux surfaces focales et de  $L^*, L'^*$ ), est  $\varphi_i = \varphi'_i$  (ou bien  $\Phi = \Phi'$ , respectivement).

D'une manière analogue j'ai étudié dans mon travail [15] les congruences de droites dans  $P_{2n+1}$ . Le repère est particularisé de telle manière que l'on a

$$(19) \quad \begin{aligned} \omega_{2a-1,2a+2} &= \omega_{2a,2a+1} = 0 \quad (a = 1, \dots, n), \\ \omega_{2a-1,b} &= \omega_{2a,b} = 0 \quad (a = 1, \dots, n-1; b = 2a+3, \dots, 2n+2), \\ \omega_{2a+1,2a+3} &= \omega_1, \quad \omega_{2a+2,2a+4} = \omega_2 \quad (a = 1, \dots, n-1), \\ \omega_{12} &= \alpha_1\omega_2, \quad \omega_{2n+1,2n+2} = -\alpha_2\omega_1, \quad \omega_{21} = \beta_1\omega_1, \quad \omega_{2n+2,2n+1} = -\beta_2\omega_2, \\ \omega_{2a-1,2a} &= \omega_{2a,2a-1} = 0 \quad (a = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Les formes (ponctuelle, hyperplanaire, focales et quasiasymptotiques de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce)

$$(20) \quad \begin{aligned} \varphi &= \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2, \quad \varphi^* = \alpha_2\beta_2\omega_1\omega_2, \quad F_1 = -\alpha_1\beta_2 \frac{\omega_2^{n+2}}{\omega_1^n}, \\ F_2 &= -\beta_1\alpha_2 \frac{\omega_1^{n+2}}{\omega_2^n}, \quad G_1 = -\frac{\alpha_1\omega_2^{n+1}}{\alpha_2\omega_1^{n+1}}, \quad G_2 = -\frac{\beta_1\omega_1^{n+1}}{\beta_2\omega_2^{n+1}} \end{aligned}$$

sont invariantes;  $\Phi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$  est l'élément projectif linéaire de la congruence  $L$ . Les congruences dont les formes (20) sont liées par deux relations indépendantes existent et dépendent de  $4n+2$  fonctions d'une variable (pour le théorème de M. Čech, valable pour  $n=1$ , voir paragraphe 3). Dans mon travail [8] j'ai étudié déjà les congruences dans  $P_5$ , voir aussi Švec [9]. La notion

banale de déformation projective est remplacée par la notion de *bidéformation* où l'on demande qu'il soit possible de réaliser par une seule homographie un contact analytique de second ordre des congruences  $L$  et  $L'$  ainsi que de leurs dualisations  $L^*$  et  $L'^*$  (la congruence duelle  $L^*$  est formée, dans l'espace duel  $P_5^*$ , des espaces tangents à la congruence  $L$ ). Si  $L$  et  $L'$  soient en bidéformation, elles ont les mêmes formes (20) et réciproquement; une paire de congruences en bidéformation dépend d'une fonction de deux variables.

Mon article [5] généralise certains résultats de la théorie des congruences de droites dans  $P_3$  au cas des *complexes de plans* dans  $P_5$ , dont les foyers dans chaque plan sont trois droites (ces complexes-là dépendent de six fonctions de deux variables). On y étudie leurs déformations ponctuelles. *Les complexes qui sont en déformation ponctuelle avec le complexe donné dépendent de 18 fonctions d'une variable*; une déformation ponctuelle donne six conditions simples, dont la signification géométrique est éclairée. Par cela, on a éclairci sur un exemple concret la situation décrite généralement par M. L. MURACCHINI.<sup>15)</sup>

11. Une autre généralisation de la théorie des congruences de droites dans  $P_3$  est la théorie des *congruences de droites à connexion projective*, établie dans mon travail [11]; les résultats ont été préalablement publiés dans l'article Švec [10]. La congruence de droites à connexion projective  $L$  est définie comme suit: Soit donné un domaine à deux dimensions  $\Omega$  de paramètres, à chaque point  $z \in \Omega$  j'associe un espace local  $P_3(z)$  et dans lui une droite  $p(z)$ . Soit  $z_1, z_2 \in \Omega$ , alors à chaque arc  $\gamma \subset \Omega$  qui joigne  $z_1$  et  $z_2$  on associe une homographie  $K_\gamma : P_3(z_1) \rightarrow P_3(z_2)$ . Analytiquement, on peut procéder de telle manière qu'on choisit dans chaque  $P_3(z)$  une base  $A_1, \dots, A_4$  telle que les points  $A_1, A_2$  se trouvent sur  $p(z)$  et que la connexion soit donnée par les équations

$$(21) \quad \nabla A_i = \omega_{ij} A_j, \quad \omega_{ij} = a_{ij}(u, v) du + b_{ij}(u, v) dv$$

comme c'est usuel pour les espaces à connexion projective.<sup>16)</sup> On peut particulariser les repères locaux de telle sorte que les équations (21) deviennent

$$(22) \quad \begin{aligned} \nabla A_1 &= \omega_{11} A_1 + (h du + \alpha_1 dv) A_2 + du A_3, \\ \nabla A_2 &= (\alpha_2 du + h dv) A_1 + \omega_{22} A_2 + dv A_4, \\ \nabla A_3 &= \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3 + (\beta_2 du + k dv) A_4, \\ \nabla A_4 &= \omega_{41} A_1 + \omega_{42} A_2 + (k du + \beta_1 dv) A_3 + \omega_{44} A_4. \end{aligned}$$

Il est bien facile de définir les notions fondamentales: foyers, surfaces développables, dualisation, asymptotiques des surfaces focales, etc. Sont invariantes les formes élémentaires

$$(23) \quad i_1 = \frac{h du}{\alpha_1 dv}, \quad i_2 = \frac{k dv}{\alpha_2 du}, \quad i_1^* = \frac{k du}{\beta_1 dv}, \quad i_2^* = \frac{h dv}{\beta_2 du},$$

<sup>15)</sup> L. MURACCHINI, Sulle trasformazioni puntuali involuppi di omografie (Bull. UMI, (3) 8, 390—398, 1953).

<sup>16)</sup> Voir p. ex. E. CARTAN, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective (Paris 1937), et Sur les variétés à connexion projective (Bull. Soc. Math. de France, 52, 205—241, 1924).

les formes fondamentales (ponctuelle, planaire, focales de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce)

$$(24) \quad \varphi = \alpha_1 \alpha_2 du dv, \quad \varphi^* = \beta_1 \beta_2 du dv, \quad F_1 = \alpha_1 \beta_1 \frac{dv^3}{du}, \quad F_2 = \alpha_2 \beta_2 \frac{du^3}{dv}$$

et les formes

$$(25) \quad \psi_1 = (a_{22} - a_{44}) du, \quad \psi_2 = (b_{11} - b_{33}) dv.$$

Les asymptotiques des surfaces focales  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  sont

$$(26) \quad \beta_2 du^2 + 2h du dv + \alpha_1 dv^2 = 0, \quad \alpha_2 du^2 + 2k du dv + \beta_1 dv^2 = 0;$$

les surfaces développables de la congruence  $L$  sont  $du dv = 0$ . L'égalité des formes (24) de deux congruences  $L$ ,  $L'$  en correspondance développable  $T$  a la même signification que pour les congruences dans  $P_3$ .

*La condition nécessaire et suffisante pour que  $L$  et  $L'$  soient en déformation projective est la coïncidence de leurs formes (24) et (25) et des courbes*

$$(27) \quad \beta_2 du^2 + \alpha_1 dv^2 = 0, \quad \alpha_2 du^2 + \beta_1 dv^2 = 0,$$

dont la signification géométrique est facile à trouver. Supposons que  $L$  et  $L'$  soient en déformation projective et que  $K, H, H^*$  soient des homographies réalisant des déformations projective, ponctuelle et planaire;  $K, H, H^*$  donnent la même homographie dans le faisceau des tangentes de la surface focale  $(A_1)$  si et seulement si  $K$  réalise un contact analytique de premier ordre des surfaces  $(A_1)$ ,  $(A'_1)$ . Nous disons que  $L$  et  $L'$  sont en *déformation projective singulière (fortement singulière)* si  $K$  réalise un contact analytique de second (troisième) ordre des surfaces focales. Si  $L$  et  $L'$  sont en déformation singulière, les homographies  $K, H, H^*$  coïncident (la réciproque n'étant pas valable en général); *si  $K$  réalise un contact analytique de troisième ordre des premières surfaces focales, la déformation est fortement singulière et alors les deux congruences sont identiques.*

Dans mon travail [7], j'étudie des congruences de droites immergées dans un espace réglé à connexion projective, défini d'une manière analogue. Je montre qu'il existe dans l'espace donné des congruences dont les invariants

$$J = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2}, \quad J_1 = \frac{h^2}{\alpha_1 \beta_1}, \quad J_2 = \frac{k^2}{\alpha_2 \beta_2}$$

sont liés par une ou deux relations et qui dépendent d'une fonction de deux variables ou encore de six fonctions d'une variable. La *déformation projective faible* est définie par l'égalité des formes (24) pour  $L$  et  $L'$ ; des couples de congruences en telle déformation dépendent d'une fonction de deux variables.

D'une manière analogue au cas des congruences de droites à connexion projective, on peut définir les *congruences à connexion euclidienne*. Je me suis servi

dans [14] de ces congruences pour étudier les *congruences de droites dans un espace euclidien de dimension arbitraire*. A une congruence  $L$  dans  $E_n$  on peut associer une congruence  $L^*$  à connexion euclidienne de la manière suivante: Les espaces locaux et les droites de la congruence  $L^*$  sont les espaces tangents et les droites de la congruence  $L$ , la connexion des espaces locaux infiniment proches est donnée par la projection dans le  $(n - 3)$ -sens orthogonal à l'espace tangent considéré. On montre dans ce travail qu'une interprétation convenable permet de transporter toute la théorie des congruences de droites dans  $E_3$  (dans la forme donnée dans le livre<sup>2)</sup>) au cas de  $E_n$ , l'appareil de calcul restant pratiquement le même. On remarque que le degré de généralité des classes principales de congruences (p. ex. B, T, pseudosphériques, etc.) augmente de deux fonctions d'une variable lorsque la dimension augmente d'une unité.

12. M. Čech [2, VI] a construit pour le cas parabolique une théorie analogue à celle des congruences et des réseaux conjugués. Soit donnée dans  $P_n$  une congruence parabolique  $L$ , choisissons sur chaque droite  $p \in L$  un point  $x$ ; si les points  $x$  forment une surface  $\pi$  sur laquelle il existe des asymptotiques correspondant aux surfaces développables de la congruence  $L$ , nous disons que  $L$  et  $\pi$  sont *conjuguées*. Si  $L$  est formée des tangentes asymptotiques d'une surface vérifiant l'équation  $(*)x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$ , la surface conjuguée générale sera  $y = \mu x_u - \mu_u x$  où  $\mu \neq 0$  est une solution arbitraire de l'équation  $(*)$ . Supposons par contre qu'il soit donné une surface  $\pi$  (avec une couche d'asymptotiques) vérifiant l'équation  $y_{uu} = a_1 y_u + b_1 y_v + c_1 y$ ; le foyer  $x$  de la congruence  $L$  conjuguée à  $\pi$  est déterminé par les équations  $x_u = b_1 p y$ ,  $x_v = -(p_u + a_1 p) y + p y_u$  où  $p$  est une solution arbitraire de l'équation  $p_{uu} = -(a_1 p)_u - (b_1 p)_v + c_1 p$ . M. Koubek a défini dans son travail [2] la notion de *congruence harmonique à une surface  $\pi$*  (contenant une couche d'asymptotiques): les droites de la congruence  $L$  sont situées dans les plans tangents à la surface  $\pi$ , et les surfaces développables de la congruence  $L$  correspondent aux asymptotiques de la surface  $\pi$ . Ensuite il a démontré les théorèmes que voici: *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence  $(yy_u)$  soit harmonique à la surface  $(x)$  est que la surface  $(y)$  soit conjuguée à la congruence  $(xx_u)$ . Deux surfaces conjuguées (harmoniques) à une congruence sont harmoniques (conjuguées) à l'autre congruence. Deux congruences harmoniques (conjuguées) à une surface sont conjuguées (harmoniques) à l'autre surface. S'il existe une congruence  $L$  harmonique à  $\pi_1$  et conjuguée à  $\pi_2$ , il en existe une infinité  $\infty^1$ .*

Dans son travail [1], M. Koubek a démontré ce théorème-ci: Si  $n + 1$  solutions  $x^i$  de l'équation  $x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$  ( $b \neq 0$ ) vérifient la relation quadratique  $\Sigma a_{ik} x^i x^k = 0$  ( $a_{ik} = a_{ki} = \text{const}$ ) alors ces solutions sont linéairement dépendantes. Il en résulte que dans  $P_n$  il n'existe pas de congruences quadratiques paraboliques.



### III. THÉORIE DES SURFACES À RÉSEAU CONJUGUÉ

**13.** Les résultats les plus importants concernant les déformations projectives des surfaces à réseau conjugué sont ceux obtenus dans mon travail [15]. Sur une surface  $\pi$  à réseau conjugué dans  $P_{2n+1}$  il existe  $n + 1$  couches de *quasiasymptotiques*  $\gamma_{n,n+1}$ . Soit  $\dots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \dots$  la suite de Laplace engendrée par la surface  $\pi$ . La surface  $\pi$  sera appelée *R* si les congruences à surfaces focales  $\pi_{-1}, \pi$  ou  $\pi, \pi_1$  sont *W*, c'est-à-dire si sur les surfaces  $\pi_{-1}, \pi, \pi_1$  ce sont les quasiasymptotiques  $\gamma_{n,n+1}$  qui sont en correspondance. La surface  $\pi$  est dite *isothermo-quasiasymptotique* si l'on peut sur elle choisir les paramètres  $u, v$  tels que  $du dv = 0$  soit le réseau conjugué et que les quasiasymptotiques soient données par l'équation  $du^{n+1} - dv^{n+1} = 0$ . J'appelle surface  $R^0$  chaque surface  $\pi$  dans  $P_{2n+1}$  dont les deux transformées de Laplace  $\pi_{-1}, \pi_1$  dégénèrent et qui admet des déformations projectives  $C_{n+1}$ . On arrive à ces résultats-ci: *Si une surface  $\pi$  est R, alors toutes les surfaces de la suite de Laplace engendrée par  $\pi$  sont également R. Une surface R est isothermo-quasiasymptotique. Si deux surfaces consécutives de la suite laplacienne sont des surfaces isothermo-quasiasymptotiques, toute la suite est composée de surfaces R. Une surface R dans  $P_{2n+1}$  dépend de  $4n + 2$  fonctions d'une variable (ce que l'on peut démontrer à l'aide du théorème d'existence pour les congruences de droites L dans  $P_{2n+1}$ , cité paragraphe 10, car les courbes  $G_1 = -1, G_2 = -1$  sont justement les quasi-asymptotiques des surfaces focales de la congruence L). Les surfaces à réseau conjugué dans  $P_{2n+1}$  qui admettent des déformations projectives  $C_{n+1}$  sont les surfaces R et elles seules, chaque telle surface admet (dans le cas de  $n \geq 2$ )  $\infty^1$  de telles déformations. La surface  $R^0$  générale est donnée par un système complètement intégrable ( $U_i = U_i(u), V_i = V_i(v), k = \text{const}$ )*

$$(28) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial v^{n+1}} = kx + \sum_{i=1}^n U_i \frac{\partial^i x}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial^i x}{\partial v^i} + \frac{\partial^{n+1} x}{\partial u^{n+1}}$$

*et dépend de  $2n$  fonctions d'une variable. Une surface (28) admet  $\infty^1$  de déformations projectives  $C_{n+1}$  que l'on obtient en faisant varier  $k$ . Chaque transformée laplacienne d'une surface  $R^0$  est située dans un sous-espace à  $n$  dimensions, les courbes d'une couche du réseau conjugué sont projectives entre elles et chacune d'elles se trouve dans un sous-espace à  $n + 1$  dimensions. Une surface  $R^0$  peut être construite comme suit:<sup>17)</sup> Soient donnés dans  $P_{2n+1}$  les sous-espaces  $P_n, P'_n, P_{n+1}, P'_{n+1}$ ; soit  $P_n \subset P_{n+1}, P'_n \subset P'_{n+1}, O \in P_{n+1} \cap P'_{n+1}$  et soient  $c, c'$  deux courbes pour lesquelles  $O \in c \subset P_{n+1}, O \in c' \subset P'_{n+1}$ . Soit  $P \in c'$  le point variable,  $Q_P = OP \cap P'_n$ ,  $c_P$  la projection de la courbe  $c$  du point  $Q_P$  sur l'espace  $(P_{n+1})_P \equiv (P_n, P)$ ; la surface  $R^0$  en question est formée des courbes  $c_P, P \in c'$ .*

<sup>17)</sup> Cette construction représente une généralisation de la construction des surfaces  $R^0$  dans  $P_3$ , donnée par M. B. SEGRE dans „Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili“ (Mem. Acc. Italia, 2, No 3, 1931).

Dans mon travail [2] j'ai trouvé une nouvelle caractérisation géométrique des surfaces  $R^0$  dans  $P_5$ . Mon article [3] contient une caractérisation géométrique, de nouveau dans  $P_5$ , des surfaces à réseau conjugué et admettant des déformations projectives  $C_3$ , même pour le cas où une ou toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent. A l'aide de ces résultats j'ai établi dans [4] le degré de généralité des surfaces projectivement déformables dans  $P_5$ . Ces surfaces, dont une et une seule transformée de Laplace dégénère, dépendent de sept fonctions d'une variable.

Mon travail [16] concerne les généralisations des surfaces  $R^0$ . Les variétés  $x = x(u_1, \dots, u_n)$  dans  $P_{2n-1}$  pour lesquelles  $x_{ij} \equiv x_{u_i u_j} = 0$ , ( $i \neq j$ ), et qui admettent des déformations projectives de second ordre, sont données par le système

$$(29) \quad x_{ij} = 0, \quad x_{nn} = kx + \sum_{i=1}^n U_i(u) x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha\alpha} \quad (k = \text{const}).$$

Ces variétés peuvent être construites, la construction étant une généralisation directe de celle des surfaces  $R^0$  donnée ci-dessus.

14. Résumons enfin les travaux [1], [2] de M. K. Svoboda; ils traitent un sujet bien différent de celui des travaux précités. Ses résultats forment en principe une seule des recherches de M. O. Borůvka.<sup>18)</sup> Regardons d'abord son travail [1]. Soit  $S_n$  un espace à courbure  $c$  constante (euclidien  $E_n$  ou non-euclidien  $N_n$ ), soit  $P_n$  son prolongement projectif et  $A$  sa quadrique absolue. Une surface sera appelée *surface*  $M$  si ses *indicatrices de courbure normale* d'ordre  $1, \dots, m-1$  en tout point  $x$  sont des circonférences ayant  $x$  pour centre. J'appelle *réseau conjugué* ( $U$ ) dans  $P_n$  le réseau  $\pi$  dont les transformées de Laplace  $\pi_{-1}, \pi_1$  sont des courbes qui sont situées avec leurs  $(m-1)^{\text{èmes}}$  espaces osculateurs sur une quadrique régulière  $A' \subset P_{n-1} \subset P_n$ . Le réseau conjugué  $\pi$  dans  $P_n$  sera dit ( $V$ ) si les premières,  $\dots, m^{\text{èmes}}$  transformées de Laplace dans les deux directions se trouvent sur une hyperquadrique régulière  $A''$  et de telle manière que  $\pi_{-r}, \pi_r$  ( $r$  quelconque) sont polairement conjuguées à  $\pi_{-r+1}, \dots, \pi_{r-1}$  par rapport à  $A''$ ; de plus, nous supposons que  $\dots, \pi, \dots$  ne se termine pas après  $m$  pas ou se termine dans une ou dans les deux directions après  $m$  pas de la manière de Goursat.

Le sujet principal du travail en question est le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface  $\pi$  de l'espace projectif  $P_n$  puisse être prise pour une surface  $M$  de l'espace  $S_n$  qui provient de  $P_n$  par un choix convenable de la quadrique absolue  $A$ . *Les courbes minima d'une surface  $M$  dans  $E_n$  (ou bien  $N_n$ ) forment un réseau conjugué ( $U$ ) (ou bien ( $V$ ) respectivement)*

<sup>18)</sup> O. BORŮVKA, Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à  $n$  dimensions à courbure constante, I—III (Spisy přír. fak. Brno, I, 165, 1932; II, 212, 1935; III, 214, 1935), O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti (Rozpravy České akad. věd a umění, tř. II, 37, 1928); Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante (Spisy přír. fak. Brno, 106, 1929).

aux invariants nuls (pareils); ici  $A'$  (ou  $A''$ ) est la quadrique absolue  $A$  de l'espace  $S_n$ . Une surface  $\pi \subset P_n$  peut être prise pour une surface  $M$  dans  $E_n$  (ou bien  $N_n$ ) si et seulement s'il existe sur elle un réseau ( $U$ ) (ou bien un réseau ( $V$ )); dans le cas de  $n = 2m + 1$  la suite de Laplace engendrée par une surface  $M$  dans  $N_n$  est périodique de période  $2(m + 1)$  et autopolaire par rapport à  $A$  ou bien elle se termine dans une direction après  $m$  pas de la manière de Goursat et dans l'autre direction après  $m + 1$  pas de la manière de Laplace.

Le travail [2] de M. Svoboda généralise ensuite les résultats mentionnés. Nous appellerons surface  $M$  dans  $S_{n+1}$  toute surface  $\pi$  dont les indicatrices de courbure normale d'ordre  $k$  ( $k = 1, \dots, m - 1$ ) sont des circonférences, leur centre  $s_k$  étant situé pour  $k = 1, \dots, r$  ( $r \geq 1$ ) au pied de la normale abaissée du point  $x \in \pi$  au plan de la circonférence, et  $\overline{xs_k} = V_k = \text{const} \neq 0$ ; pour  $k = r + 1, \dots, m - 1$  on a  $x \equiv s_k$ . Les surfaces  $M$  existent seulement pour  $r = 1$ , elles dépendent de  $2(n - m - 1)$  fonctions d'une variable. On peut distinguer deux types de surfaces  $M$ : non-euclidien ( $V_1^2 + c \neq 0$ ) et euclidien ( $V_1^2 + c = 0$ ). La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface  $\pi \subset P_{2n+1}$  puisse être prise pour une surface  $M$  1. du type euclidien, plongée dans  $N_{n+1}$ , est l'existence d'un point  $E$  sur la quadrique régulière  $A \subset P_{n+1}$  et d'un tel réseau sur  $\pi$  que sa projection de  $E$  est un réseau  $(U)_A$ ; 2. du type non-euclidien, plongée dans  $N_{n+1}$  (ou encore  $E_{n+1}$ ), est l'existence d'un point  $E$  qui ne se trouve pas sur la quadrique régulière  $A \subset P_{n+1}$  (ou encore n'est pas situé dans l'hyperplan de l'espace  $P_{n+1}$  où se trouve la quadrique régulière  $A$ ) et d'un réseau sur  $\pi$  dont la projection de  $E$  est un réseau  $(V)_A$ . Ici le réseau  $(U)_A$ , ou bien  $(V)_A$ , est défini comme dans ce qui précède avec la différence que la quadrique  $A'$ , ou  $A''$  respectivement, est remplacée par l'intersection de la quadrique  $A$  avec l'hyperplan tangent au point  $E$ , ou bien par le contour de la projection de la quadrique  $A$  du point  $E$ .

Dans les travaux précités on envisage encore d'autres propriétés importantes des surfaces  $M$ , mais leur énumération nécessiterait pratiquement un article entier.

#### Bibliographie

BREJCHA, J.:

- [1] O Demoulinově čtyřstranu a o kanonických přímkách v bodě plochy prostoru  $S_3$ . Sborník VŠS Brno, vol. V, No. 87, 41—47 (1956).

ČECH, E.:

- [1] Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I—III. Čas. pěst. mat., I : 74, 32—46 (1949); II : 75, 123—136 (1950); III : 75, 137—158 (1950).
- [2] Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами I—VIII. Чех. мат. ж., I : 2 (77), 91—107 (1952); II : 2 (77), 109—123 (1952);

- III : 2 (77), 125—148 (1952); IV : 2 (77), 149—166 (1952); V : 2 (77), 167—188 (1952); VI : 2 (77), 297—331 (1952); 3 (78), 123—137 (1953); VIII : 4 (79), 143—174, (1954).
- [3] O точечных изгибаниях конгруэнций прямых, Чех. мат. ж., 5 (80), 234—273 (1955).
- [4] Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni. Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, 9, 1—12 (1955).
- [5] Deformazioni di congruenze di rette. Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 14, 55—66 (1954—55).
- [6] Transformations développables des congruences des droites. Чех. мат. ж., 6 (81), 260—286 (1956).
- [7] Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse. CIME, 5° Ciclo (Geom. proi.-diff.), Pavia 26. sett.—5. ott. 1955; Ist. Mat. Univ. Roma (1956).
- [8] Déformation projective des congruences  $W$ . Чех. мат. ж. 6 (81), 401—414 (1956).
- [9] Compléments au Mémoire: Déformation projective des congruences  $W$ . Чех. мат. ж., 9 (84), 289—296 (1959).

HOŘÁK, V.:

- [1] Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes und ihre Applikation auf Segresche  $W$ -Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes. Чех. мат. ж., 9 (84), 590—628 (1959).

KLARKA, J.:

- [1] O kongruencích  $W$  obsažených v lineárním komplexu. Sborník VŠS Brno, vol. IV, No. 68, 107—110 (1955).
- [2] Godeauxova teorie ploch a lokální souřadnice v přímkovém prostoru. Sborník VŠS Brno, vol. V, No. 86, 29—40 (1956).
- [3] Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche. Publ. přír. fak. Brno, No. 393, 161—188 (1958).

KOUBEK, L.:

- [1] Об одном свойстве решений дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Чех. мат. ж., 5 (80), 91—98 (1955).
- [2] Některé věty z teorie parabolických přímkových kongruencí. Čas. pěst. mat., 81, 244—245 (1956).

SVOBODA, K.:

- [1] Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti. Čas. pěst. mat., 83, 287—316 (1958).
- [2] Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Чех. мат. ж., 8 (83), 399—447 (1958).

ŠVEC, A.:

- [1] Déformation projective des congruences de droites dans  $S_n$ . Чех. мат. ж., 5 (80), 546—558 (1955).
- [2] Déformations projectives de certaines surfaces à réseau conjugué. Чех. мат. ж., 5 (80), 559—572 (1955).
- [3] Déformations projectives des surfaces à réseau conjugué dans  $S_5$ . Чех. мат. ж., 6 (81), 118—124 (1956).
- [4] Problèmes d'existence de la déformation projective des surfaces de  $S_5$  possédant un réseau conjugué. Чех. мат. ж., 6 (81), 125—138 (1956).
- [5] Certaines enveloppes des familles  $\infty^3$  d'homographies dans  $S_5$ . Чех. мат. ж., 7 (82), 57—65 (1957).
- [6] Remarques sur la théorie des déformations des congruences de droites. Чех. мат. ж., 7 (82), 66—72 (1957).

- [7] Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective. Čex. mat. ž., 7 (82), 96—114 (1957).
- [8] Les congruences de droites dans  $S_5$ . Spisy přír. fak. Brno, No. 332, 1—14 (1957).
- [9] Projektive Deformation der Strahlenkongruenzen in mehrdimensionalen Räumen. Revue Math. Pur. Appl., 1, 91—92 (1956).
- [10] Sulla teoria delle congruenze di rette. Boll. UMI, (3) 12, 446—457 (1957).
- [11] Congruences de droites à connexion projective. Ann. Polonici Math., VIII, 3 (sous presse).
- [12] Congruences de droites dans les espaces projectifs à dimension paire. Čex. mat. ž., 8 (83), 274—284 (1958).
- [13] Géométrie intrinseque des congruences de droites et leurs déformations projectives. Čex. mat. ž., 8 (83), 395—398 (1958).
- [14] Congruences de droites dans  $E_n$ . Čex. mat. ž., 8 (83), 552—562 (1958).
- [15] Les surfaces  $R$  dans les espaces projectifs de dimension impaire. Čex. mat. ž., 9 (84), 243—264 (1959).
- [16] Déformations projectives des systèmes  $n$ -conjugués dans  $S_{2n-1}$  dont toutes les transformées de Laplace sont dégénérées. Čex. mat. ž., 9 (84), 440—444 (1959).

### Résumé

## ČESKOSLOVENSKÝ PŘÍSPĚVEK K DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII KONGRUENCÍ PŘÍMEK A PLOCH S KONJUGOVANOU SÍŤÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

*K patnáctému výročí osvobození ČSSR*

V práci je podán přehled výsledků v uvedeném oboru, uveřejněných československými geometry v letech 1945—1959. Uvedme pouze stručné názvy a charakteristiky jednotlivých článků:

**I. Teorie kongruencí přímek v projektivním trojdimensionálním prostoru.** 1. Studium dvojparametrických systémů přímek v  $P_n$  a jejich bodových deformací (E. ČECH). 2. Projektivní lineární element kongruence přímek v  $P_3$  (Čech). 3. Projektivní deformace kongruence přímek, její rozklad na jednotlivé jednoduché deformace, otázky existenci (Čech). 4. Singulární a polosingulární deformace (Čech). 5. Projektivní deformace kongruencí  $W$  (Čech). 6. Projektivní deformace parabolických kongruencí (Čech). 7. Vnitřní geometrie kongruence přímek (A. ŠVEC). 8. Kongruence  $W$  s přímkovými fokálními plochami a jejich representace v přímkovém prostoru (VL. HORÁK). 9. Práce J. KLAPKY a J. BREJCHY.

**II. Teorie kongruencí přímek v projektivních vícedimensionálních a křivých prostorech.** 10. Deformace kongruencí přímek v  $S_n$ , teorie kongruencí v  $S_{2n}$  a  $S_{2n+1}$  (ŠVEC). 11. Kongruence přímek s projektivní konexí (ŠVEC). 12. Analogie

harmonických resp. konjugovaných sítí a kongruencí v parabolickém případě (Čech, L. KOUBEK).

III. Teorie ploch s konjugovanou sítí. 13. Projektivní deformace těchto ploch v  $S_{2n+1}$  (Švec). 14. Teorie ploch, jejichž indikatrice normální křivostí jsou kružnice (K. SVOBODA).

## Резюме

### ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ ВКЛАД В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ С СОПРЯЖЕННОЙ СЕТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

*К пятнадцатилетию освобождения ЧССР*

В работе дается обзор результатов в указанной области, опубликованных чехословацкими геометрами в 1945—1959 гг. Мы приведем лишь краткие названия и характеристики отдельных статей:

I. Теория прямолинейных конгруэнций в проективном трехмерном пространстве. 1. Исследование двухпараметрических семейств прямых в  $P_n$  и их точечных изгибаний (Э. Чех). 2. Проективный линейный элемент конгруэнции прямых в  $P_3$  (Э. Чех). 3. Проективное изгибание прямолинейной конгруэнции, его разложение на отдельные простые изгибания, вопросы существования (Э. Чех). 4. Особые и полусобые изгибания (Э. Чех). 5. Проективное изгибание конгруэнций  $W$  (Э. Чех). 6. Проективное изгибание параболических конгруэнций (Э. Чех). 7. Внутренняя геометрия прямолинейной конгруэнции (А. Швец). 8. Конгруэнции  $W$  с линейчатыми фокальными поверхностями и их представление в пространстве прямых (Вл. Горак). 9. Работы Й. Клапка и Й. Брейха.

II. Теория прямолинейных конгруэнций в проективных многомерных и кривых пространствах. 10. Изгибание прямолинейных конгруэнций в  $S_n$ , теория конгруэнций в  $S_{2n}$  и  $S_{2n+1}$  (А. Швец). 11. Конгруэнции прямых с проективной связностью (А. Швец). 12. Аналогии между гармоническими, соотв. сопряженными сетями, и конгруэнциями в параболическо случае (Э. Чех, Л. Коубек).

III. Теория поверхностей с сопряженной сетью. 13. Проективное изгибание этих поверхностей в  $S_{2n+1}$  (А. Швец). 14. Теория поверхностей, у которых индикатрисами нормальной кривизны являются окружности (К. Свобода).