Zbyněk Šidák

O některých vztazích elementárních dělitelů matice k jejímu vlastnímu vektoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 3, 293--302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117310

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O NĚKTERÝCH VZTAZÍCH ELEMENTÁRNÍCH DĚLITELŮ MATICE K JEJÍMU VLASTNÍMU VEKTORU

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

DT: 513.831

(Došlo dne 11. července 1958)

A. Brauer v [2] ukázal, jaký vliv má jistá změna matice (související s jejím vlastním vektorem) na změnu jejích vlastních čísel. Článek je věnován doplňkům k této větě. Zjišťuje se, jak se změní elementární dělitelé při řečené změně a uvádí se některé aplikace na zmenšení řádu matice a na zobecněné stochastické matice.

1. Úvod

Budeme se zabývat čtvercovými maticemi n-tého řádu (v odstavci 4 též $(n-1)$-ého řádu) s komplexními prvky a budeme je značit velkými tučnými písmeny, např. $\mathbf{X} = (x_{ij})$. $\mathbf{E}$ jest jednotková matice. Malá tučná písmena, např. $\mathbf{x}$, budou značit sloupcové vektory. Transponovanou matici budeme označovat čárkou, např. $\mathbf{X}'$. Co se týče dalších definic a poznatků, odkazujeme na Gantmacherovu knihu [1], jejíž terminologie budeme užívat.

Důkazy jsou většinou prováděny v podstatě geometrickými metodami. Ve shodě s tím považujeme vlastně matici za určitý lineární operátor, zobrazující n-rozměrný komplexní eukleidovský prostor do sebe, vyjádřený v nějaké basi.

Článek je věnován doplňkům k této větě Brauerově:

Budiž $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice s komplexními prvky, která má vlastní čísla* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *násobností* $m_1, m_2, \ldots, m_s$. *Budiž* $\mathbf{u}$ *vlastní vektor* $\mathbf{A}$ *příslušný k* λ_1, $\mathbf{h}$ *libovolný komplexní vektor. Pak matice* $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}' = (a_{ij} + u_i h_j)$ *má vlastní čísla* $\lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *násobností* $1, m_1 - 1, m_2, \ldots, m_s$.

Tato věta v podstatě pochází od A. Brauera [2], později ji zpřesnila H. Perfectová [3] a podala jiný její důkaz. Zde jsme ji uvedli ve zpřesněné formulaci Perfectové.

V tomto článku nejprve předešleme v odstavci 2 některé věty o Jordanových basích, které jsou pro nás větami pomocnými, ale mohou býti zajímavé i samy o sobě. Potom v odstavci 3 doplníme citovanou větu Brauerovu zjištěním elementárních dělitelů matice $\mathbf{B}$ (což samozřejmě obsahuje v sobě i uvedené tvrzení o vlastních číslech); metoda důkazu je přitom podstatně jiná než metody užité Brauerem a Perfectovou. Posléze si všimneme některých důsledků věty: v odstavci 4 promluvíme o zmenšení řádu matice, v odstavci 5 o zobecněných stochastických maticích.

2. Pomocné věty o Jordanových řetězcích

Věta 1. *Budiž* $\mathbf{A}$ *matice,* $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq 0$. *Budiž* $\mathbf{g}_1$, $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})\, \mathbf{g}_1, \ldots$, $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1 - 1}\, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_t$, $(\mathbf{A}' - \lambda_t \mathbf{E})\, \mathbf{g}_t, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_t \mathbf{E})^{p_t - 1}\, \mathbf{g}_t$ *dolní Jordanova base k matici* $\mathbf{A}'$. *Pak* $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_k \mathbf{E})^q\, \mathbf{g}_k$ *může být nenulový jen tehdy, když* $\lambda_k = \lambda_1$, $q = 0$.

Důkaz. V určitém Jordanově řetězci označme pro stručnost $\mathbf{h}_q = (\mathbf{A}' - \lambda_k \mathbf{E})^{q-1}\, \mathbf{g}_k$. Pro tento řetězec máme tedy rovnosti

$$\mathbf{A}'\mathbf{h}_1 = \lambda_k \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2,\ \mathbf{A}'\mathbf{h}_2 = \lambda_k \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3, \ldots, \mathbf{A}'\mathbf{h}_{p_k} = \lambda_k \mathbf{h}_{p_k}\,.$$

Násobením $\mathbf{u}'$ zleva dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'\mathbf{A}'\mathbf{h}_1 &= \lambda_1 \mathbf{u}'\mathbf{h}_1 = \lambda_k \mathbf{u}'\mathbf{h}_1 + \mathbf{u}'\mathbf{h}_2\,,\\
\mathbf{u}'\mathbf{A}'\mathbf{h}_2 &= \lambda_1 \mathbf{u}'\mathbf{h}_2 = \lambda_k \mathbf{u}'\mathbf{h}_2 + \mathbf{u}'\mathbf{h}_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}'\mathbf{A}'\mathbf{h}_{p_k} &= \lambda_1 \mathbf{u}'\mathbf{h}_{p_k} = \lambda_k \mathbf{u}'\mathbf{h}_{p_k}\,.
\end{aligned}$$

Jestliže $\lambda_k \neq \lambda_1$, musí tedy být $\mathbf{u}'\mathbf{h}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{h}_2 = \ldots = \mathbf{u}'\mathbf{h}_{p_k} = 0$. Jestliže $\lambda_k = \lambda_1$, musí být $\mathbf{u}'\mathbf{h}_2 = \ldots = \mathbf{u}'\mathbf{h}_{p_k} = 0$ a jedině $\mathbf{u}'\mathbf{h}_1$ může být nenulový.

Poznamenejme, že tato věta 1 zobecňuje větu 26 v [2], jelikož se týká nejen vlastních vektorů matice $\mathbf{A}'$, nýbrž celých cyklických invariantních podprostorů.

Zavedeme stručný termín „$\mathbf{u}$-nenulový řetězec" pro dolní Jordanův řetězec $\mathbf{g}_k$, $(\mathbf{A}' - \lambda_k \mathbf{E})\, \mathbf{g}_k, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_k \mathbf{E})^{p_k - 1}\, \mathbf{g}_k$, pro nějž $\mathbf{u}'\mathbf{g}_k \neq 0$. Podle věty 1 pro $\mathbf{u}$-nenulový řetězec jest $\lambda_k = \lambda_1$. Poněvadž vektory v Jordanově basi jsou nezávislé, zřejmě vždy v této basi existuje aspoň jeden $\mathbf{u}$-nenulový řetězec.

Věta 2. *Budiž* $\mathbf{A}$ *matice,* $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq 0$. *Pak k matici* $\mathbf{A}'$ *existuje dolní Jordanova base* $\mathbf{e}_1$, $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})\, \mathbf{e}_1, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1 - 1}\, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_t$, $(\mathbf{A}' - \lambda_t \mathbf{E})\, \mathbf{e}_t, \ldots$, $\ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_t \mathbf{E})^{p_t - 1}\, \mathbf{e}_t$ *taková, že* $\mathbf{u}'\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})\, \mathbf{e}_1 = \ldots = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_t \mathbf{E})^{p_t - 1}\,.$ $.\, \mathbf{e}_t = 0$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{g}_1$, $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})\, \mathbf{g}_1, \ldots$ je nějaká dolní Jordanova base k matici $\mathbf{A}'$. Můžeme předpokládat, že vektory jsou očíslovány tak, že $\mathbf{g}_1, \ldots$, $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1 - 1}\, \mathbf{g}_1$ je Jordanův řetězec, který má z $\mathbf{u}$-nenulových řetězců nejmenší dimensi. Nechť nyní $\mathbf{g}_k, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k - 1}\, \mathbf{g}_k$ je nějaký jiný $\mathbf{u}$-nenulový Jordanův řetězec; podle předpokladu $p_k \geqq p_1$. Definujme $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_k - \dfrac{\mathbf{u}'\mathbf{g}_k}{\mathbf{u}'\mathbf{g}_1}\, \mathbf{g}_1$. Poněvadž $(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k}\, \mathbf{e}_k = (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k}\, \mathbf{g}_k - \dfrac{\mathbf{u}'\mathbf{g}_k}{\mathbf{u}'\mathbf{g}_1}\, (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k}\, \mathbf{g}_1 = 0$, dostaneme nyní Jordanův řetězec $\mathbf{e}_k, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_k-1}\,\mathbf{e}_k$. Přitom $\mathbf{u}'\mathbf{e}_k = \mathbf{u}'\mathbf{g}_k - \frac{\mathbf{u}'\mathbf{g}_k}{\mathbf{u}'\mathbf{g}_1}\,\mathbf{u}'\mathbf{g}_1 = 0$, $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_k = \ldots = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_k-1}\,\mathbf{e}_k = 0$ podle věty 1. Podobnou změnu provedeme se všemi $\mathbf{u}$-nenulovými řetězci kromě prvního. U prvního řetězce definujeme $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\mathbf{u}'\mathbf{g}_1}\,\mathbf{g}_1$, máme tedy $\mathbf{u}'\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,.\,\mathbf{e}_1 = \ldots = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-1}\,\mathbf{e}_1 = 0$. Rozepsáním vzorců bychom se snadno přesvědčili, že vektory v takto konstruovaných Jordanových řetězcích jsou lineárně nezávislé, a věta je tedy dokázána.

Věta 3. *Budiž dán vektor* $\mathbf{v} \neq 0$ *a matice* $\mathbf{C}$, *k níž dolní Jordanova base budiž* $\mathbf{e}_1, (\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, \ldots, (\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-1}\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_t, (\mathbf{C} - \lambda_t\mathbf{E})\,\mathbf{e}_t, \ldots, (\mathbf{C} - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\,\mathbf{e}_t$. *Minimální polynom vektoru* $\mathbf{e}_1$ *je určen jednoznačně pro libovolnou Jordanovu basi splňující* $\mathbf{v}'\mathbf{e}_1 \neq 0$, $\mathbf{v}'(\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 = \ldots = \mathbf{v}'\mathbf{e}_t = \ldots = \mathbf{v}'(\mathbf{C} - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\,.\,\mathbf{e}_t = 0$.

Důkaz. Basi ve znění věty označme stručně jako $\mathbf{e}$-basi. Vektor $\mathbf{e}_1$ má zřejmě minimální polynom $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}$. Mějme ještě jinou basi $\mathbf{f}_1, \ldots, (\mathbf{C} - \mu_1\mathbf{E})^{q_1-1}\mathbf{f}_1, \ldots$, splňující řečenou podmínku. Minimální polynom $\mathbf{f}_1$ jest $(\lambda - \mu_1)^{q_1}$; máme nyní dokázat $\mu_1 = \lambda_1$, $q_1 = p_1$. Předpokládejme naopak, že by bylo např. $q_1 < p_1$. Vyjádřeme $\mathbf{f}_1$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}$-base. V této rovnosti převeďme na levou stranu všechny vektory, jejichž minimální polynom je nějaká mocnina $(\lambda - \mu_1)$. Na pravé straně rovnosti tedy dostaneme celkem vektor, jehož minimální polynom už neobsahuje činitele $(\lambda - \mu_1)$, což je možné jedině tehdy, když lineární kombinace na obou stranách rovnosti jsou rovny 0. Tedy $\mathbf{f}_1$ se rovná lineární kombinaci pouze těch vektorů $\mathbf{e}$-base, jejichž minimální polynom je nějaká mocnina $(\lambda - \mu_1)$. Kdyby nyní v této kombinaci nebyl vektor $\mathbf{e}_1$, z předpokladu by plynulo $\mathbf{v}'\mathbf{f}_1 = 0$, což není pravda. To dokazuje, že v řečené lineární kombinaci musí být vektor $\mathbf{e}_1$ s nenulovým koeficientem, z čehož speciálně plyne $\mu_1 = \lambda_1$. Máme tedy rovnost

$$\mathbf{f}_1 = c_1\mathbf{e}_1 + c_2(\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 + \ldots + c_{p_1}(\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-1}\,\mathbf{e}_1 + \ldots,$$

kde $c_1 \neq 0$ a všechny vektory vpravo mají jako minimální polynom nějakou mocninu $(\lambda - \lambda_1)$. Na obě strany této rovnosti nyní aplikujeme operaci $(\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{E})^{q_1}$. Poněvadž $q_1 < p_1$, dostaneme, že 0 se rovná jakési lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}$-base, z čehož by plynulo $c_1 = 0$ a to je spor.

Dostáváme nyní toto tvrzení: *Minimální polynom, odpovídající* $\mathbf{u}$*-nenulovému řetězci nejmenší dimense, je určen jednoznačně, ať je Jordanova base jakákoliv.* Máme-li totiž dvě Jordanovy base, můžeme je předně pozměnit jako v důkazu věty 2, přičemž $\mathbf{u}$-nenulový řetězec nejmenší dimense se dostane na první místo v basi. Jeho minimální polynom je pak určen jednoznačně podle věty 3.

Následující větu budeme v dalším potřebovat pouze pro $j = 1$. Formulujme ji však pro zajímavost obecněji, neboť její důkaz se tím téměř nezmění.

Věta 4. *Budiž dán k matici* $\mathbf{C}$ *nějaký dolní Jordanův řetězec* $\mathbf{e}_k$, $(\mathbf{C} - \lambda_k\mathbf{E})\,\mathbf{e}_k, \ldots$, $\ldots, (\mathbf{C} - \lambda_k\mathbf{E})^{p-1}\,\mathbf{e}_k$ *a označme* $\mathbf{l}$ *cyklický invariantní podprostor, vytvořený tímto řetězcem. Pak pro libovolné číslo* $\lambda_0 \neq \lambda_k$ *a pro* $j \geqq 1$ *vektory* $(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^j\,\mathbf{e}_k$, $(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^{j+1}\,\mathbf{e}_k, \ldots, (\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^{j+p-1}\,\mathbf{e}_k$ *tvoří basi pro* $\mathbf{l}$.

Důkaz. Pro libovolné přirozené i máme $(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k = (\mathbf{C} - \lambda_k\mathbf{E} + \lambda_k\mathbf{E} - \lambda_0\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k = (\mathbf{C} - \lambda_k\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k + \binom{i}{1}(\lambda_k - \lambda_0)(\mathbf{C} - \lambda_k\mathbf{E})^{i-1}\,\mathbf{e}_k + \ldots + (\lambda_k - \lambda_0)^i\,\mathbf{e}_k$. Tedy vektory $(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k$, $i = j, j + 1, \ldots, j + p - 1$, patří do $\mathbf{l}$. Poněvadž těchto vektorů je právě p, zbývá pouze dokázat, že jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme, že naopak by bylo $d_1(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^j\,\mathbf{e}_k + d_2(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^{j+1}\,\mathbf{e}_k + \ldots + d_p(\mathbf{C} - \lambda_0\mathbf{E})^{j+p-1}\,\mathbf{e}_k = 0$, přičemž aspoň jedno d_i by bylo nenulové. Polynom $d_1(\lambda - \lambda_0)^j + d_2(\lambda - \lambda_0)^{j+1} + \ldots + d_p(\lambda - \lambda_0)^{j+p-1}$ je tedy anulujícím polynomem vektoru $\mathbf{e}_k$ a musí být dělitelný minimálním polynomem $(\lambda - \lambda_k)^p$. Pro jakýsi polynom $\varphi(\lambda)$ máme tedy

$$d_1(\lambda - \lambda_0)^j + d_2(\lambda - \lambda_0)^{j+1} + \ldots + d_p(\lambda - \lambda_0)^{j+p-1} = (\lambda - \lambda_k)^p\,\varphi(\lambda)\,.$$

Na levé straně jest možno vytknouti alespoň $(\lambda - \lambda_0)^j$, čímž dostaneme

$$(\lambda - \lambda_0)^j[d_1 + d_2(\lambda - \lambda_0) + \ldots + d_p(\lambda - \lambda_0)^{p-1}] = (\lambda - \lambda_k)^p\,\varphi(\lambda)\,.$$

Nyní $\varphi(\lambda)$ musí být dělitelné $(\lambda - \lambda_0)^j$, čili $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^j\,\psi(\lambda)$, kde $\psi(\lambda)$ je nějaký polynom. Kdyby $\psi(\lambda)$ byl nenulový, měla by pravá strana rovnosti stupeň nejméně $p + j$, zatím co levá strana rovnosti má stupeň nejvýše $p + j - 1$. Tedy $\psi(\lambda)$ je nulový polynom, z čehož ihned již vidíme, že $d_p = \ldots = d_2 = d_1 = 0$, což bylo dokázati.

3. Elementární dělitelé matice $\mathbf{A} + \mathbf{uh}'$

Tento odstavec doplňuje větu Brauerovu, citovanou v úvodu, zjištěním elementárních dělitelů matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{uh}' = (a_{ij} + u_i h_j)$.

Věta 5. *Budiž* $\mathbf{A}$ *matice,* $\mathbf{Au} = \lambda_1\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq 0$. *Nechť* $\mathbf{h}$ *je libovolný vektor a označme* $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{uh}'$. *Při přechodu od* $\mathbf{A}$ *k* $\mathbf{B}$ *elementární dělitelé* $\mathbf{A}$ *se změní takto:* 1. *Od elementárního dělitele* $(\lambda - \lambda_1)^p$, *odpovídajícího* $\mathbf{u}$*-nenulovému řetězci nejmenší dimense, se odtrhne činitel* $(\lambda - \lambda_1)$, *takže vznikne* $(\lambda - \lambda_1)^{p-1}$. 2. *Tento činitel se změní na* $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$. 3. *Buď se vytvoří nový elementární dělitel* $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$ *nebo v případě, že* $\lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}$ *je rovno některému vlastnímu číslu* λ_0 *matice* $\mathbf{A}$, *může se uvedený činitel připojit k jistému elementárnímu děliteli* $(\lambda - \lambda_0)^q$, *takže vznikne* $(\lambda - \lambda_0)^{q+1}$. 4. *Kromě těchto nejvýše dvou všichni ostatní elementární dělitelé zůstanou beze změny.*

Předně připojme několik drobných poznámek. Myšlenka, na jejímž základě je proveden důkaz věty 5, je podobná konstrukci Jordanovy base, které se užívá např. v knize I. M. Gelfanda [4]. Poněvadž důkaz je konstruktivní, lze z něho též zjistit, kdy se vytvoří nový dělitel $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$ nebo kam se tento činitel připojí; do znění věty jsme to neuvedli, aby se příliš nekomplikovalo. Poznamenejme také, že ovšem může nastat případ (pro $\mathbf{h}'\mathbf{u} = 0$), kdy $(\lambda - \lambda_1)$ se od jistého dělitele odtrhne, ale k témuž děliteli se připojí, tj. vlastně všichni elementární dělitelé zůstanou beze změny. Dále dělitel, od něhož se odtrhuje $(\lambda - \lambda_1)$, samozřejmě nezávisí na zvolené Jordanově basi; v tvrzení za větou 3 jsme ukázali, že elementární dělitel, odpovídající $\mathbf{u}$-nenulovému řetězci nejmenší dimense, je určen jednoznačně. Že výslední elementární dělitelé nezávisí na zvolené Jordanově basi, to je známo.

Ve větě nelze vynechat podmínku „$\mathbf{u}$-nenulovosti řetězce“. Snadno lze totiž konstruovat příklady, v nichž dělitel $(\lambda - \lambda_1)^p$, odpovídající $\mathbf{u}$-nenulovému řetězci nejmenší dimense, je různý od nejmenšího elementárního dělitele s vlastním číslem λ_1.

Důkaz věty 5. Můžeme se zabývat transponovanými maticemi, neboť elementární dělitelé $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$ jsou stejní jako $\mathbf{A}'$, resp. $\mathbf{B}'$. Pro stručnost označme $\lambda_0 = \lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}$; dále označme N množinu vektorů $\mathbf{x}$, pro něž $\mathbf{u}'\mathbf{x} = 0$; N je zřejmě lineární podprostor dimense $n - 1$.

Všimněme si nyní dolní Jordanovy base $\mathbf{e}_1, (\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-1}\,.\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_t, (\mathbf{A}' - \lambda_t\mathbf{E})\,\mathbf{e}_t, \ldots, (\mathbf{A}' - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\,\mathbf{e}_t$ k matici $\mathbf{A}'$, která je konstruována ve větě 2. Pro vektory $(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k$ z této base ($k = 1, \ldots, t$; $i = 0, 1, \ldots, p_k - 1$) kromě prvního vektoru $\mathbf{e}_1$, dostáváme

$$(\mathbf{B}' - \lambda_k\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k = (\mathbf{A}' + \mathbf{h}\mathbf{u}' - \lambda_k\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\,\mathbf{e}_k = (\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^{i+1}\mathbf{e}_k\,.$$

Těchto $n - 1$ vektorů tedy tvoří „neúplnou“ Jordanovu basi pro matici $\mathbf{B}'$; je to base v podprostoru N. Přitom též $(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, (\mathbf{B}' - \lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, \ldots, (\mathbf{B}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-2}(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1$ tvoří Jordanův řetězec k $\mathbf{B}'$. Naším úkolem nyní bude najít ještě nějaký vektor v komplementu N, který by doplnil uvedených $n - 1$ vektorů. Máme $\mathbf{u}'(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' + \mathbf{h}\mathbf{u}' - \lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{h}'\mathbf{u}\mathbf{E})\,.\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{u}'\mathbf{h}\mathbf{u}'\mathbf{e}_1 - (\mathbf{h}'\mathbf{u})\mathbf{u}'\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{h} - \mathbf{h}'\mathbf{u} = 0$, a proto $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1$ patří do N.

Utvořme nyní tuto pomocnou basi v N. U cyklických podprostorů v N s vlastním číslem λ_0 (existují-li takové), ponechme původní basi $\mathbf{e}_l, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_l, \ldots, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_l-1}\,\mathbf{e}_l$; u cyklických podprostorů s jiným vlastním číslem $\lambda_k \neq \lambda_0$ vezměme podle věty 4 basi $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_k, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2\,\mathbf{e}_k, \ldots, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_k}\,.\,\mathbf{e}_k$. Vektor $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1$ lze vyjádřit jako určitou lineární kombinaci vektorů této pomocné base. Napišme ji např. pro případ $\lambda_0 \neq \lambda_1$ (jiné případy by se řešily obdobně).

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 = {} & c_0^{(l)}\mathbf{e}_l + c_1^{(l)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_l + \ldots + c_{p_l-1}^{(l)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_l-1}\,\mathbf{e}_l + \ldots + \\ & + c_1^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\,\mathbf{e}_k + c_2^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2\,\mathbf{e}_k + \ldots + c_{p_k}^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_k}\mathbf{e}_k + \\ & + \ldots + c_1^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 + c_2^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 \\ & + \ldots + c_{p_1-1}^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_1-1}(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1\,.\end{aligned}$$

Místo vektoru $\mathbf{e}_1$ vezměme nyní

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 = \mathbf{e}_1 &- c_1^{(l)}\mathbf{e}_l - \ldots - c_{p_l-1}^{(l)}(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})^{p_l-2}\,\mathbf{e}_l - \ldots - \\ &- c_1^{(k)}\mathbf{e}_k - c_2^{(k)}(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})\,\mathbf{e}_k - \ldots - c_{p_k}^{(k)}(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})^{p_k-1}\,\mathbf{e}_k - \ldots - \\ &- c_1^{(1)}(\boldsymbol{A}' - \lambda_1\boldsymbol{E})\,\mathbf{e}_1 - c_2^{(1)}(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}' - \lambda_1\boldsymbol{E})\,\mathbf{e}_1 - \ldots - \\ &- c_{p_1-1}^{(1)}(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})^{p_1-2}(\boldsymbol{A}' - \lambda_1\boldsymbol{E})\,\mathbf{e}_1\,. \end{aligned}$$

Zřejmě $\boldsymbol{f}_1$ patří do komplementu N a jest

$$(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{f}_1 = c_0^{(l)}\mathbf{e}_l + c_0^{(m)}\mathbf{e}_m + \ldots,$$

kde v této lineární kombinaci se vyskytují už pouze první vektory z Jordanových řetězců s vlastním číslem λ_0. Jestliže v této rovnosti určitý koeficient $c_0^{(l)} \neq 0$, pak odpovídající řetězec nazveme pro stručnost třeba podstatným. Když žádný podstatný řetězec neexistuje (což nastane speciálně také, když λ_0 je různé od všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$), zřejmě $\boldsymbol{f}_1$ je vlastní vektor matice $\boldsymbol{B}'$ a Jordanova base pro $\boldsymbol{B}'$ je tím konstruována.

Nechť tedy existují podstatné řetězce, např. budiž $c_0^{(l)} \neq 0$, $c_0^{(m)} \neq 0$. (Kdyby byl pouze jeden podstatný řetězec, dokončil by se důkaz zřejmým jednodušším způsobem.) Předpokládejme, že označení je voleno tak, že index l označuje řetězec, který má z podstatných řetězců největší dimensi. Místo vektoru $\mathbf{e}_l$ nyní volíme vektor $\boldsymbol{f}_l = c_0^{(l)}\mathbf{e}_l + c_0^{(m)}\mathbf{e}_m + \ldots$ a příslušným způsobem změníme též Jordanův řetězec na $\boldsymbol{f}_l$, $(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{f}_l, \ldots$ Ostatní Jordanovy řetězce ponecháme beze změny. Podobně jako v důkazu věty 2 se nyní přesvědčíme, že po uvedené změně dostaneme skutečně Jordanův řetězec stejné dimense a že všechny vektory jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří basi v N. Konečně však $(\boldsymbol{B}' - \lambda_0\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_l$, tedy podstatný řetězec největší dimense zvětší svou dimensi o jedničku. Tím je konstruována Jordanova base pro $\boldsymbol{B}'$ a důkaz věty 5 je tím dokončen.

4. Aplikace na zmenšení řádu matice

V dalším budeme stále užívat označení a poznatků z věty 5 a jejího důkazu.

Věta 6. *Budiž $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ matice n-tého řádu, $\boldsymbol{Au} = \lambda_1\boldsymbol{u}$ a nechť l-tá souřadnice $u_l \neq 0$. Definujme matici $(n-1)$-tého řádu $\tilde{\boldsymbol{B}} = \left(a_{ij} - \dfrac{1}{u_l}\,u_i a_{lj}\right)$, $i, j = 1, \ldots, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n$. Při přechodu od matice $\boldsymbol{A}$ k $\tilde{\boldsymbol{B}}$ elementární dělitel $(\lambda - \lambda_1)^p$, odpovídající $\boldsymbol{u}$-nenulovému řetězci nejmenší dimense, se změní na $(\lambda - \lambda_1)^{p-1}$, ostatní elementární dělitelé zůstanou beze změny.*

Důkaz. Položíme ve větě 5 $h_j = -\dfrac{1}{u_l}\,a_{lj}$. Matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{uh}'$ má pak l-tý řádek nulový. Přečíslujeme nyní souřadnice tak, že z l-té souřadnice se stane první; to odpovídá v maticích přeřazení l-tého řádku do prvního řádku a l-tého sloupce do prvního sloupce. Takto pozměněné vektory a matice označme indexem 1. Matice $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{h}_1'$ má tedy první řádek nulový. Konstruujeme nyní k matici $\mathbf{A}_1'$ dolní Jordanovu basi $\mathbf{e}_1, (\mathbf{A}_1' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, \ldots, \ldots, (\mathbf{A}_1' - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\,\mathbf{e}_t$ podle věty 2. Z důkazu věty 5 vidíme, že $(\mathbf{A}_1' - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1, \ldots, \ldots, (\mathbf{A}_1' - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\,\mathbf{e}_t$ tvoří „neúplnou" Jordanovu basi dimense $n - 1$ pro matici $\mathbf{B}_1'$. Vynecháme nyní ve vektorech této base první souřadnici, v matici $\mathbf{B}_1'$ vynecháme první řádek a první sloupec, čímž dostaneme zřejmě matici $\tilde{\mathbf{B}}'$. Poněvadž $\mathbf{B}_1'$ má první sloupec nulový a takto upravené vektory o $n - 1$ souřadnicích jsou lineárně nezávislé, jak bychom snadno nahlédli, proto zmíněných $n - 1$ vektorů tvoří Jordanovu basi pro $\tilde{\mathbf{B}}'$. Důkaz věty 6 je tím dokončen.

Věty 6 lze výhodně užíti při některých zkoumáních spektrálních vlastností matic. Známe-li jeden vlastní vektor $\mathbf{u}$ k vlastnímu číslu λ_1 matice $\mathbf{A}$ řádu n, můžeme utvořit ihned matici $\tilde{\mathbf{B}}$ řádu $n - 1$, která má stejná vlastní čísla se stejnými násobnostmi jako $\mathbf{A}$, s výjimkou čísla λ_1, které má násobnost o jedničku nižší. Věta 6 nám dokonce umožňuje činit určitá tvrzení o elementárních dělitelích.

5. Aplikace na zobecněné stochastické matice

Podle Brauera [2] definujeme:

Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ s komplexními prvky nazveme zobecněnou stochastickou maticí se součty s, jestliže všechny její řádkové součty jsou rovny komplexnímu číslu s, tj. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s$. Dále matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nazveme zobecněnou dvakrát stochastickou maticí se součty s, jestliže všechny její řádkové i sloupcové součty jsou rovny s, tj. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s$.

Zobecněné stochastické matice, které zahrnují obvyklé stochastické matice, jsou důležitou ukázkou pro aplikaci předcházejících vět. U těchto matic totiž triviálně známe vlastní číslo s a odpovídající vlastní vektor $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, \ldots, 1)$. Speciálně zde může nalézt dobré uplatnění věta 6. Pro každé l zde je $u_l = 1 \neq 0$ a matice $\tilde{\mathbf{B}}$ je rovna $(a_{ij} - a_{lj})$. To usnadňuje hledání ostatních netriviálních vlastních čísel.

Leckdy se též pracuje dobře s dvakrát stochastickými maticemi. Dokažme pro obdobné zobecněné matice dvě drobné věty.

Věta 7. *Zobecněná dvakrát stochastická matice $\mathbf{A}$ se součty s má aspoň jednoho elementárního dělitele $(\lambda - s)$.*

Důkaz. Kdyby všichni elementární dělitelé s číslem s byli stupně vyššího než prvního, podle věty 1 by pro každý vlastní vektor $\mathbf{y}$ matice $\mathbf{A}'$ bylo $\mathbf{u}'\mathbf{y} = 0$, tj. souřadnicový součet $\mathbf{y}$ by byl 0. To však není pravda, neboť $\mathbf{A}'$ má vlastní vektor $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Věta 8. *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je zobecněná stochastická matice se součty* s *a položme* $h_j = \frac{1}{n}\left(r - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$, *kde* r *je libovolné komplexní číslo. Matice* $\mathbf{B} = (a_{ij} + h_j)$ *je zobecněná dvakrát stochastická matice se součty* r *a činitel* $(\lambda - r)$, *který podle věty* 5 *vznikne odtržením od jistého elementárního dělitele* $(\lambda - s)^k$, *se nikam nepřipojí, tedy vznikne nový elementární dělitel* $(\lambda - r)$.

Důkaz. První tvrzení se získá přímým výpočtem:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + h_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + nh_j = r\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + h_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\left(r - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = s + \frac{1}{n}(nr - ns) = r\,.$$

Druhé tvrzení vyplyne okamžitě z důkazu věty 5. V nynějším speciálním případě totiž $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ a tento vektor $\mathbf{u}$ je také vlastním vektorem pro $\mathbf{B}'$ a patří do komplementu N. Společně se známou „neúplnou" Jordanovou basí v N tedy dostaneme celou Jordanovou basi.

LITERATURA

[1] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц. Москва 1954.

[2] *A. Brauer:* Limits for the characteristic roots of a matrix. IV: Applications to stochastic matrices. Duke Math. J. *19* (1952), 75—91.

[3] *H. Perfect:* Methods of constructing certain stochastic matrices. Duke Math. J. *20* (1953), 395—404.

[4] *I. M. Gelfand:* Lineární algebra. Praha 1953.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ОТНОШЕНИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦЫ К ЕЕ СОБСТВЕННОМУ ВЕКТОРУ

ЗБЫНЕК ШИДАК (Zbyněk Šidák), Прага

(Поступило в редакцию 11/VII 1958 г.)

А. Брауэр в [2] доказал следующую теорему, которую мы приводим в уточненной формулировке по работе [3]:

Пусть $\mathbf{A}$ — матрица с комплексными элементами, которая имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Пусть $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор (столбец) матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующий λ_1, $\boldsymbol{h}$ — произвольный комплексный вектор. Тогда матрица $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$ (где штрих обозначает транспозицию) имеет собственные числа $\lambda_1 + \boldsymbol{h}'\boldsymbol{u}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратностей 1, $m_1 - 1$, $m_2, \ldots, m_s$.

Статья посвящена некоторым дополнениям к этой теореме.

В параграфе 2 доказываются некоторые вспомогательные теоремы о жордановых базисах, касающиеся главным образом скалярных произведений векторов этих базисов и вектора $\boldsymbol{u}$.

Параграф 3 дополняет приведенную теорему Брауэра пояснением, каким образом изменяются элементарные делители матрицы $\boldsymbol{A}$ при переходе к матрице $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$. Между прочим видно, что не изменяется более двух элементарных делителей. Метод доказательства отличается от [2] и [3]; он основан по существу на идее, употребленной, например, Гельфандом в [4] для конструкции жорданова базиса.

Далее приводятся некоторые простые применения теоремы. Если мы знаем у матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n одно собственное число λ_1 и соответствующий вектор $\boldsymbol{u}$, то можем легко получить матрицу порядка $n - 1$, которая имеет те же собственные числа за исключением λ_1, кратность которого меньше на единицу. Эта идея и ее дополнение относительно элементарных делителей разбираются в параграфе 4. Наконец, в параграфе 5 приводятся применения к обобщенным стохастическим матрицам.

Summary

ON SOME RELATIONS OF THE ELEMENTARY DIVISORS OF A MATRIX TO ITS CHARACTERISTIC VECTOR

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Received July 11, 1958)

A. Brauer has proved in [2] the following theorem which we quote in a more precise formulation according to [3]:

Let $\boldsymbol{A}$ be a matrix with complex elements which has the characteristic roots $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ of multiplicities $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Let $\boldsymbol{u}$ be a characteristic column vector of the matrix $\boldsymbol{A}$ belonging to λ_1, $\boldsymbol{h}$ an arbitrary complex vector. Then the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$ (where the dash denotes transposition) has characteristic roots $\lambda_1 + \boldsymbol{h}'\boldsymbol{u}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ of multiplicities $1, m_1 - 1, m_2, \ldots, m_s$.

This paper is devoted to some supplements to this theorem.

In § 2 some auxiliary theorems on Jordan bases are proved, mainly concerning the scalar products of the vectors of these bases with the vector $\boldsymbol{u}$.

In § 3 Brauer's theorem is supplemented with the determination of the manner in which the elementary divisors of the matrix $\boldsymbol{A}$ are changed by the transition to the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{uh}'$. Particularly, it is seen that no more than two elementary divisors can change. The method of proof is different from that of [2] as well as [3]; it is based on the idea used e. g. by I. M. GELFAND [4] for the construction of a Jordan basis.

Further some simple applications of the theorem are discussed. Knowing one characteristic root λ_1 and an associated characteristic vector $\boldsymbol{u}$ of the matrix $\boldsymbol{A}$ of degree n, we can easily obtain a matrix of degree $n - 1$ which has the same characteristic roots except λ_1, the multiplicity of which is smaller by one. This idea and its supplement concerning the elementary divisors are dealt with in § 4. Finally, in § 5 the theorems are applied to generalized stochastic matrices.