RECENSE

Štefan Schwarz: **Základy náuky o riešení rovníc.** Vydalo Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1958, stran 346, obr. 47, cena 28 Kčs.

Název „konkretní algebra", který autor položertem užil v předmluvě své nové knihy jako protějšku k pojmu algebry abstraktní, stručně vystihuje záměry autorovy i náplň jeho knihy. Nauka o řešení rovnic dává totiž mnoho příležitostí, jak seznámit začátečníka (zvyklého na převážně počtářské metody středoškolské matematiky) s pojetím matematiky vysokoškolské.

Úkolem Schwarzovy knihy, která je určena posluchačům nižších semestrů matematiky, inženýrům, přírodovědcům a středoškolským učitelům, je výklad základních pojmů teorie algebraických rovnic se zřetelem k jejich numerickému řešení. Zvlášť vřele jistě uvítali tuto novou publikaci posluchači dálkového studia, pro něž je stále na našem knižním trhu málo vhodné literatury. Schwarzova kniha je totiž psána velmi srozumitelně a je doplněna řadou příkladů rozřešených v textu, takže ji může číst i samouk. Více než 350 cvičení, z nichž mnohá jsou opatřena výsledkem nebo návodem k řešení, umožňuje, aby si čtenář samostatně promyslil prostudovanou látku. Při neustálém zřeteli na čtenáře začátečníka neslevuje však autor nic z matematické přesnosti výkladu, jak ještě uvedeme v dalším rozboru knihy.

Spis je rozdělen do devíti kapitol a doplněn dvěma dodatky. Všimněme si nyní podrobněji jeho obsahu.

Ačkoliv autor předpokládá, že počítání s komplexními čísly je čtenáři známé ze středn školy, věnuje první kapitolu své knihy shrnutí a doplnění této partie středoškolské matematiky. Není zde ovšem podána úplná matematická definice *komplexního čísla,* sou jen zopakovány (středoškolským způsobem) důvody, které vedou k dalšímu rozšiřování oboru reálných čísel. Zvláštní pozornost je věnována geometrickému znázornění komplexních čísel a násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru. V nynějších středoškolských učebnicích se nedefinuje odmocnina komplexního čísla, které není reálné, zatímco odmocnina reálného čísla je definována jednoznačně. Ve Schwarzově knize je n-tá odmocnina komplexního čísla z definována jako kterýkoliv z kořenů rovnice $\zeta^n = z$. Autor upozorňuje čtenáře na rozdílnost těchto dvou definicí, takže nemůže vzniknout nedorozumění ani u začátečníka.

Druhá kapitola si všímá základních vlastností *polynomů.* Autor zde nepředpokládá ani znalost pojmu funkce, nýbrž podává sám příslušnou definici. Pro účely dalších úvah se tu zavádí pojem komplexní funkce komplexní proměnné a jejího zvláštního případu — komplexního polynomu. O seriosnosti výkladu svědčí dvě důrazné poznámky (na str. 33): V první se konstatuje, že se v celé knize užívá slovního obratu „polynom jedné proměnné", který byl řádně definován; v tomto spojení je ovšem zbytečné (pro účely této knihy) pátrat dále po definici názvu „proměnná". Druhá poznámka upozorňuje na nedůslednost, s níž často směšujeme pojem „polynom f, který číslu x přiřazuje číslo $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$" s funkční hodnotou tohoto polynomu. Konstatuje se zde, že se pro stručnost vyjadřování ani úvahy této knihy nebudou většinou vyhýbat této nedůslednosti (u nás ostatně už vžité). V dalším paragrafu kapitoly se prvně setkáváme s pojmem *rovnice*. Upozorňuje se na nedílnost slovního vyjádření „rovnice o jedné neznámé", přičemž není třeba speciální definice pojmu „neznámá". Ekvivalence dvou rovnic je zavedena stejně jako na střední škole, přesto je však na několika příkladech věnována pozornost úpravám, při nichž by se mohl „ztratit" nějaký kořen. Paragraf věnovaný dělení dvou polynomů si všímá i technické stránky při takovém dělení a na příkladě seznamuje čtenáře s Hornerovým schematem. Důkaz fundamentální věty algebry odložil autor do samostatného dodatku I uvedeného na konci knihy, aby jím nebyly přerušeny úvahy druhé kapitoly. Tyto úvahy pokračují pak studiem některých vlastností algebraických rovnic s reálnými resp. racionálními koeficienty. Určování společného kořene dvou algebraických rovnic umožňuje Eukleidův algoritmus. Závěr druhé kapitoly popisuje Taylorův rozvoj polynomu a techniku hledání vícenásobných kořenů algebraické rovnice užitím derivace polynomu.

Třetí kapitola je nazvána *Symetrické polynomy*. Úvahy počínají zavedením pojmu polynomu více proměnných, přičemž výklad už postupuje rychlejším tempem. Čtenář si zopakuje vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice a najde zobecnění těchto vztahů pro algebraickou rovnici n-tého stupně. Tyto vztahy přirozeně motivují užitečnost pojmu symetrického polynomu. Základní věta o symetrických polynomech je zde podána s důkazem a s řadou ilustračních příkladů. Zvláštní pozornost je pak věnována součtům k-tých mocnin.

Řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně je popsáno v kapitole čtvrté. V úvodním paragrafu si autor všímá různých transformací algebraických rovnic a jejich vlivu na kořeny dané rovnice. Paragraf o řešení kvadratické rovnice je vlastně též rozšířením středoškolské látky, neboť na jedenáctiletkách se neřeší kvadratické rovnice s komplexními koeficienty. Pro řešení rovnice 3. stupně jsou odvozeny Cardanovy vzorce, podrobně je diskutována kubická rovnice s reálnými koeficienty a casus irreducibilis se čtenář naučí řešit goniometricky. (Důkaz, že casus irreducibilis nejde „obejít" nějakým vhodnějším vzorcem s reálnými odmocninami, je uveden v závěru knihy v dodatku II.) Rovnice 4. stupně je řešena třemi metodami. Úvahy ve čtvrté kapitole dokresluje řada historických poznámek o algebraickém řešení rovnic.

Pátá kapitola si všímá některých speciálních typů algebraických rovnic. Jsou tu řešeny *rovnice reciproké a rovnice pro dělení kruhu*. V závěru kapitoly je věnována pozornost též tzv. „iracionálním" rovnicím, při jejichž řešení se obvykle nepracuje s ekvivalentními úpravami. Autor se tu spokojuje s propedeutickým zavedením iracionálních rovnic (obvyklým na střední škole), aniž by se pokoušel o matematickou definici tohoto pojmu.

Kapitola šestá, pojednávající o *numerickém řešení rovnic*, je nejobsáhlejší částí celého spisu. V přípravných úvahách na počátku kapitoly si čtenář zopakuje některé vlastnosti reálných čísel. Z názoru se vezme věta o průniku do sebe zapadajících uzavřených intervalů, jejichž délky konvergují k nule; ostatní úvahy jsou však už vedeny deduktivně. Čtenář se tu seznámí s geometrickým významem derivace polynomu s reálnými koeficienty a větou Rolleho (vyslovenou pro polynomy), jež uvádí souvislost mezi kořeny rovnice $f(x) = 0$ a rovnice $f'(x) = 0$. Vyšetřování průběhu funkce je uvedeno instruktivním příkladem ukazujícím, k jak falešným závěrům bychom mnohdy došli, kdybychom graf funkce konstruovali bod za bodem jen z tabulky hodnot. V tradičních knihách o matematické analyse se obvykle rozbor průběhu funkce redukoval na mechanicko-počtářskou otázku počítání funkčních hodnot derivací v bodech, jež by mohly být lokálními extrémy. Schwarzův výklad této partie se vědomě vyhýbá takovémuto zmechanisování, v němž se ztrácí matematická podstata věci. Čtenář zde jistě uvítá řadu numerických příkladů a instruktivních obrázků, jimiž je výklad doplněn. Důležitou pomůckou při numerickém řešení rovnic je separace kořenů. Vedle horních odhadů pro kladné kořeny rovnice je zde zejména probráno Descartovo pravidlo (s důkazem prof. K. Petra) a pak věta Sturmova pro počet reálných kořenů v daném intervalu. Ve zbývajících čtyřech paragrafech šesté kapitoly se čtenář seznámí s několika speciálními metodami k numerickému řešení rovnic. Je tu popsána Newtonova metoda a metoda tětiv (čili regula falsi), metoda řetězových zlomků, Gräffeho-Lobačevského metoda a konečně grafické řešení rovnic. I když zde výklad nejde do hloubky a mnohá úvaha se ilustruje jenom příkladem, přece tu nechybí podrobné zhodnocení uvedených metod se zvážením jejich předností i nevýhod.

V kapitole sedmé se rozšiřuje problematika na *soustavy rovnic* o více neznámých. Soustav lineárních rovnic si všímá autor jen ukázkově, neboť zevrubný výklad by vyžadoval probrání teorie determinantů, které se kniha vyhýbá. Je uveden geometrický význam řešení soustavy a bez důkazu je vyslovena Bezoutova věta.[1]) Zvláštní pozornost je pak věnována soustavám dvou rovnic o dvou neznámých, pro něž je též zaveden pojem resultanty. Závěr sedmé kapitoly si všímá komplexních kořenů soustavy.

Osmá kapitola obsahuje už úvahy náročnější, je totiž věnována otázce *neřešitelnosti algebraické rovnice* stupně aspoň pátého. Čtenář se seznámí s pojmem číselného tělesa a s reducibilitou a ireducibilitou polynomů. Velmi zevrubně je vyložen pojem algebraického řešení rovnice; při tom se vychází z intuitivní představy, kterou si jistě většina čtenářů o tomto pojmu přináší ze střední školy, a tato představa se zpřesní. Ukazuje se, že binomická rovnice je algebraicky řešitelná a odvozuje se Kroneckerova věta o rovnici 5. stupně s racionálními koeficienty, jejíž levá strana (v anulovaném tvaru) je ireducibilní nad tělesem racionálních čísel (označovaným R) a která se dá řešit pomocí radikálů. Z této věty se snadno odvodí existence rovnice 5. stupně s racionálními koeficienty, která není algebraicky řešitelná nad R. Osmou kapitolu uzavírají historické poznámky.

Poslední, devátá kapitola si všímá *geometrických konstrukcí* užitím pravítka a kružítka. Abychom tyto konstrukce mohli podrobit zevrubnějšímu zkoumání, je nejprve nutné přesně vymezit, co rozumíme konstrukcí užitím uvedených dvou rýsovacích pomůcek. Od přesné definice je pak už jen krok k analytické formulaci problému. Klasickými úlohami, jimž věnovali pozornost již matematikové minulých století, jsou delfský problém a trisekce úhlu. Také konstrukce pravidelných mnohoúhelníků pravítkem a kružítkem má svou historii. Všechny tyto problémy jsou objasněny v hlavním textu deváté kapitoly, zatímco ve cvičeních najdeme další úlohy z elementární geometrie, které se nedají řešit užitím pravítka a kružítka. Knihu uzavírají dva dodatky, o jejichž obsahu jsme se už zmínili.

Schwarzův spis patří jistě k těm publikacím, které nepotřebují přílišné reklamy, neboť si samy najdou cestu mezi nejširší okruh čtenářů.

Jiří Sedláček, Praha

V. P. Minorskij: **Sbírka úloh z vyšší matematiky.** SNTL, Praha 1958. Stran 298, náklad 4200, cena váz. výtisku 32,— Kčs. Z 3. vydání ruského originálu (Gostechizdat, Moskva 1955) přeložil dr. *Miroslav Fiedler.*

Překlad Minorského sbírky úloh je určen především studentům našich vysokých škol technických. I když je podle výnosu ministerstva školství schválen jako vysokoškolská příručka jen pro elektrotechnické fakulty, není jeho použití nijak omezeno jen na ně; výběrem látky i volbou úloh přinese kniha užitek při vyučování matematice i na ostatních fakultách technického směru.

[1]) Tisková chyba v rejstříku klade Bezoutovu větu na str. 223 (místo 233).

Kniha obsahuje 2570 úloh z analytické geometrie a matematické analysy. Je rozdělena do čtrnácti kapitol. První čtyři jsou věnovány analytické geometrii (rovinné i prostorové) a algebře (soustavy lineárních rovnic, determinanty, rovnice vyšších stupňů), ostatní matematické analyse. Kapitoly 5 až 7 obsahují úlohy z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné (limita, spojitost, derivace, průběh funkce), kapitoly 8 a 9 úlohy z integrálního počtu funkcí jedné proměnné, kapitola 10 pak obsahuje úlohy z diferenciální geometrie rovinných a prostorových křivek. V dalších dvou kapitolách najdeme úlohy z diferenciálního počtu funkcí více proměnných a z diferenciálních rovnic. Kapitola o diferenciálních rovnicích obsahuje kromě úloh z obyčejných diferenciálních rovnic také několik příkladů na lineární parciální rovnice druhého řádu. Poslední dvě kapitoly jsou věnovány dvojným, trojným a křivkovým integrálům a řadám. Kniha je doplněna dvěma dodatky; v prvním jsou vyobrazeny některé rovinné křivky a udány jejich rovnice, v druhém jsou uvedeny stručné tabulky goniometrických, hyperbolických funkcí, tabulky převrácených hodnot, druhých a třetích odmocnin, logaritmů a hodnot funkce e^x. Na konci knihy (před dodatky) jsou udány výsledky téměř všech úloh.

Z uvedeného obsahu sbírky je patrné, že výběrem látky kniha dobře vyhovuje potřebám našich vysokých škol technických, neboť svým rozsahem vcelku odpovídá osnovám základního čtyřsemestrového kursu matematiky na těchto školách. Úlohy jsou voleny tak, aby si na nich mohl průměrný student přístupně a systematicky procvičit studovanou látku a aby z nich bylo dobře patrné použití matematických výsledků v technických disciplinách. Úlohy jsou skoro až příliš jednoduché a snadné; řešení je usnadněno ještě tím, že na začátku skoro každého článku jsou stručně uvedeny základní pojmy, vzorce a věty, potřebné k řešení úloh obsažených v článku.

Český překlad knihy je proveden velmi pozorně. Překladatel opravil tiskové chyby originálu, pečlivě přeložil odborné termíny, zpřesnil, doplnil a místy přepracoval úvodní vysvětlivky v jednotlivých článcích a doplnil je ještě seznamem doporučené literatury, uvedeným na konci knihy.

Překladem Minorského sbírky úloh se dostává našim technikám užitečné a velmi potřebné účební pomůcky, jejíž užitek by se ještě zvýšil, kdyby se — jak navrhuje v předmluvě překladatel — obsah sbírky v příštích vydáních rozšířil o úlohy z funkcí komplexní proměnné, parciálních diferenciálních rovnic a lineární algebry. Pro příští vydání by bylo dále účelné, aby se kniha stala schválenou příručkou pro vysoké školy technické vůbec a ne jen pro elektrotechnickou fakultu. Pak by snad mohla vyjít ve vyšším nákladu a stát se cenově přístupnější.

Václav Vilhelm, Praha

Fumitomo Maeda: **Kontinuierlich Geometrien.** Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 95. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958; X, 224 str. Přeložili z japonského originálu *Sibylla Crampe*, Tübingen; prof. *Günter Pickert*, Tübingen; dr. *Rudolf Schauffler*, Urach.

V předmluvě nejprve je vylíčeno, jak překlad vznikl. Z překladatelů jedině dr. R. Schauffler ovládal japonštinu. Od něho se naučila pí S. Crampe tolik, že mohla s jeho pomocí dílo Maedovo přeložit. Prof. Pickert pak překlad přepracoval, aniž použil japonského originálu. Prof. Maedovi vděčí překladatelé za to, že odpověděl na mnohé otázky, které se při přepracování vyskytly. Vzhledem k velké strukturální různosti mezi japonštinou a němčinou bylo při překladu použito jisté volnosti.

Dále je v předmluvě popsána projektivní geometrie konečného stupně jako ireducibilní komplementární modulární svaz a vylíčen pak vznik geometrie kontinuitní a její další vývoj:

„Za základní pojmy projektivní geometrie byly dosud považovány bod, přímka atd.

a zdálo se, že není možno od těchto pojmů upustit. BIRGHOFF a MENGER ukázali (v r. 1935), že projektivní geometrie je z hlediska teorie svazů ireducibilní komplementární modulární svaz, jehož rozměr je konečné číslo. V tomto případě je základní pojem „uspořádání", který např. vyjadřuje, že bod „je obsažen" v přímce. Okolnost, že se vyskytují body, přímky atd. je umožněna tím, že rozměr je konečné číslo. Je tedy nasnadě otázka, bylo-li by možno vybudovat geometrii, která by z hlediska teorie svazů byla utvořena podobně jako projektivní geometrie, v níž by však nebyly ani body ani přímky. Tento obtížný problém rozřešil J. von NEUMANN (v letech 1936—1937). Změníme-li trochu označení, můžeme přiřadit lineárním prostorům (bodům, přímkám atd) v $(n - 1)$-rozměrné projektivní geometrii hodnoty $0, 1/n, 2/n, \ldots, n - 1/n, 1$, takže dimenze prázdného prostoru je 0, bodu je $1/n$, přímky je $2/n$ atd. a celý prostor má dimenzi 1. Von Neumann ukázal, že za dimenzi prvků spojitého ireducibilního komplementárního modulárního svazu lze volit všechna reálná čísla z uzavřeného intervalu od 0 do 1. Ježto pak existují prvky, jejichž dimenze je číslo libovolně blízké 0, nemůže se „bod" jako prvek vyskytovat. Tak jsme dostali *kontinuitní geometrii* (v užším smyslu). Na druhé straně je známo, že v geometrii projektivní o třech a více rozměrech je možno zavést souřadnice tvořící těleso (popř. i nekomutativní) a že svaz tvořený lineárními podprostory projektivní geometrie je izomorfní se svazem pravoideálů maticového okruhu nad tímto tělesem. Von Neumann zobecnil tento výsledek a ukázal, že komplementární modulární svaz čtvrtého a vyšších rozměrů je izomorfní se svazem hlavních pravoideálů maticového okruhu nad jistým okruhem. To je právě von Neumannova kontinuitní geometrie (v širším smyslu). Lze tedy založit teorii kontinuitních geometrií na teorii dimenze a na teorii znázornění. V teorii dimenze rozřešil von Neumann úplně případ ireducibilní; pro reducibilní případ podal sice základní věty, nemohl však s konečným výsledkem nic říci o tom, v jakém tvaru by se dala vyjádřit dimenze. T. IWAMURA ukázal (r. 1943), že lze vyjádřit dimenzi jako spojitou funkci v Booleově prostoru, který je reprezentací centra spojitého komplementárního modulárního svazu. V této souvislosti ukázal dále, že lze rozložit reducibilní spojitý komplementární modulární svaz na subdirektní součin takových ireducibilních svazů. Výsledky Iwamurovy doplnili později Y. KAWADA, K. HIGUČI a Y. MATSUŠIMA. Tím lze teorii kontinuitních geometrií považovat za zhruba uzavřenou."

K tomu ještě připojuji:

V kapitole I podán dostatečně obsáhlý úvod do teorie svazů. Tím dosaženo, že je kniha skoro úplně srozumitelná bez předběžných vědomostí.

V dodatku II podán důkaz ekvivalence axiomu výběru, věty o dobrém uspořádání a Zornova lematu. Jako pramen je citována kniha NAKAYAMOVA „Množiny, topologie, algebra" (Tokio 1949), která vyšla jen japonsky.

I jinak je z knihy Maedovy vidět, že je dosti důležitých prací, které byly uveřejněny jen japonsky, ač se Japonci snaží co nejvíce seznámit světovou matematickou veřejnost se svými pracemi tím, že vydávají časopisy přinášející jejich práce a dokonce i některé knihy anglicky, v menším počtu již německy a francouzsky. Viděli jsme, s jakými obtížemi je spojen překlad z japonštiny. To má za následek, že o pracích publikovaných jen japonsky se ostatní svět doví jen něco málo z referujících časopisů.

Karel Rychlík, Praha