

Milan Sekanina

O jistých rozkladových množinách roviny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 74--82

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117303>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O JISTÝCH ROZKLADOVÝCH MNOŽINÁCH ROVINY

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 10. února 1958)

DT: 519.52

Věnováno prof. Otakaru Borůvkovi, členu korespondentu ČSAV, k jeho šedesátým narozeninám.

Článek se zabývá rozkladovými množinami roviny, které jsou částí přímky s komplementem (vzhledem k přímce) o mohutnosti menší než mohutnost kontinua.

Podmnožina M roviny E_2 se nazývá *rozkladová množina* roviny E_2 , existuje-li na E_2 rozklad takový, že jeho prvky jsou množiny shodné s M (viz [1]). Přímky chápeme jako množiny bodů a značíme je malými latinskými písmeny p, l, \dots . Body značíme malými řeckými písmeny α, β, \dots . Průsečík přímek p_1 a p_2 zapisujeme též jako $p_1 \cap p_2$. Je-li $M \subset E_2$, $\text{card } M \geq 2$, potom $p(M)$ značí přímku (existuje-li), obsahující M .

Nechť nyní je l libovolně, ale pevně zvolená přímka v E_2 , M její podmnožina, $m = \text{card } M < 2^{\aleph_1}$. Předpokládejme, že $N = l - M$ je rozkladová množina roviny, \mathbf{R} nechť značí rozklad roviny E_2 v množiny shodné s N . Prvky tohoto rozkladu budeme značit N_i , $n_i = p(N_i)$. Protože $\text{card } (n_{i_1} - N_{i_1}) < 2^{\aleph_0}$ a že pro $i_k \neq i_1$ je $N_{i_k} \cap N_{i_1} = \emptyset$, je $n_{i_k} \neq n_{i_1}$ pro $i_k \neq i_1$. Množinu všech n_i označme \mathfrak{N} . τ_i nechť značí pro dané i libovolně, ale pevně zvolenou shodnost roviny takovou, že $\tau_i(N) = N_i$. V dalším budeme studovat strukturu rozkladu \mathbf{R} . Ukážeme, že přímky n_i tvoří dvě osnovy rovnoběžných přímek, z nichž jedna obsahuje všechny možné rovnoběžky s daným směrem, druhá právě m rovnoběžek.

Lemma 1. *Bodem $\alpha \in E_2$ prochází nejvýše $\max(m, \aleph_0)$ přímek n_i .*

Důkaz. Buď \mathfrak{U} množina všech přímek n_i , které procházejí bodem α . Předpokládejme, že $\text{card } \mathfrak{U} > \max(m, \aleph_0)$. Existuje právě jedna přímka n_{i_0} v \mathfrak{U} tak, že $\alpha \in N_{i_0}$. Označme $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} - \{n_{i_0}\}$. Pro $n_i \in \mathfrak{U}_1$ platí $\alpha \in n_i - N_{i_0}$. Tedy M není prázdná množina. Existuje tedy $\beta \in n_{i_0} - N_{i_0}$. Nechť $\beta \in N_{i_1}$. Přímka n_{i_1} pro-

¹⁾ Případem, že $\text{card } (l - M) < 2^{\aleph_1}$, jsem se zabýval v článku [1].

tíná všechny přímky z \mathfrak{U} s eventuální výjimkou jedné z nich (totiž té, která je s ní rovnoběžná). Tedy n protíná opět card \mathfrak{U} přímek z \mathfrak{U}_1 . Poněvadž card $(n_{i_1} - N_{i_1}) = m$, existuje mezi těmito přímkami card \mathfrak{U} přímek takových, že mají neprázdný průnik s N_{i_1} . Množinu těchto přímek označme \mathfrak{U}_2 . Pro $n_i \in \mathfrak{U}_2$ platí tedy $N_{i_1} \cap n_i \neq \emptyset$. Poněvadž též $\alpha \notin N_{i_1}$, musí být vzdálenost bodu $N_{i_1} \cap n_i$ a bodu α rovna vzdálenosti jisté dvojice bodů z M . Je-li m konečné, je $\binom{m}{2}$

dvojic různých bodů z M , je-li m nekonečné, je jich právě m , tedy je v obou případech tato mohutnost nanejvýš $\max(m, \aleph_0)$. Poněvadž body $N_{i_1} \cap n_i$ leží na přímce n_{i_1} a je jich více než $\max(m, \aleph_0) = 2 \max(m, \aleph_0)$, došli jsme ke sporu. Tím je lemma dokázáno.

Nyní uvedeme tvrzení obecnější:

Budiž dáno pět různých přímek l_1, \dots, l_5 s těmito vlastnostmi:

l_1, l_2 se protínají v bodě α a l_3, l_4, l_5 neprocházejí bodem α . Necht dále platí (ϱ metrika v E_2) $\varrho(l_1 \cap l_i, l_2 \cap l_i) = r$ pro $i = 3, 4, 5$. Potom platí

Lemma 2. *Necht v_i je bod přímky l_i , $i = 3, 4, 5$, pro něžž platí $\varrho(l_1 \cap l_i, v_i) = d_1 \neq 0$, $\varrho(l_2 \cap l_i, v_i) = d_2 \neq 0$, kde d_1 a d_2 jsou kladná čísla nezávislá na i . Potom body v_i neleží v přímce.*

Důkaz plyne ihned ze známé věty (viz např. [2], odst. 72), že body v_i leží na elipse.

Přejdeme opět k vyšetřování rozkladu \mathbf{R} .

Lemma 3. *Necht $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}$ taková, že pro $n_{i_1} \in \mathfrak{U}$, $n_{i_2} \in \mathfrak{U}$, $n_{i_1} \neq n_{i_2}$ je $n_{i_1} \# n_{i_2}$. Potom card $\mathfrak{U} < 2^{\aleph_0}$.*

Důkaz. Pripustme, že existuje \mathfrak{U} tak, že card $\mathfrak{U} = 2^{\aleph_0}$. Zvolme libovolně, ale pevně tři různé přímky $n_{i_1}, n_{i_1'}, n_{i_1''} \in \mathfrak{U}$. Necht \mathfrak{U}_1 je množina těch přímek n_i z \mathfrak{U} , pro něž platí $N_{i_1} \cap n_i = \emptyset$. Je zřejmě v důsledku lemmatu 1 card $\mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$. Necht \mathfrak{U}_2 je množina těch přímek n_i z \mathfrak{U}_1 , pro něž $N_{i_1} \cap n_{i_1'} = \emptyset$. Je opět card $\mathfrak{U}_2 = 2^{\aleph_0}$. Je tedy pro $n_i \in \mathfrak{U}_2$

$$n_i \cap n_{i_1} = \tau_i(\alpha_i), \quad n_i \cap n_{i_1'} = \tau_i(\beta_i)$$

pro jisté $\alpha_i, \beta_i \in M$. Protože card $M < 2^{\aleph_0}$, existuje podmnožina $\mathfrak{U}_3 \subset \mathfrak{U}_2$ o mohutnosti n větší než $\max(m, \aleph_0)$ takových přímek n_i , že pro $n_i, n_{i'} \in \mathfrak{U}_3$ je $\alpha_i = \alpha_{i'}, \beta_i = \beta_{i'}$. Označíme-li totiž pro $\alpha, \beta \in M$ symbolem $I(\alpha, \beta)$ množinu těch indexů i , pro něž $\alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta$, dostáváme systém množin o mohutnosti nanejvýš rovné $\max(m, \aleph_0)$. Každý index i patří právě do jedné z množin $I(\alpha, \beta)$, totiž do $I(\alpha_i, \beta_i)$. Sjednocení všech množin $I(\alpha, \beta)$ má tedy mohutnost 2^{\aleph_0} a musí tedy existovat dvojice α_1, β_1 tak, že

$$\text{card } I(\alpha_1, \beta_1) > \max(m, \aleph_0).$$

\mathfrak{U}_3 je potom na příklad množina všech přímek $n_i \in \mathfrak{U}_2$, pro něž $i \in I(\alpha_1, \beta_1)$. Mezi přímkami n_i z \mathfrak{U}_3 je opět n takových, že $N_i \cap n_{i_0} = \emptyset$. Je tedy $N_i \cap n_{i_0} = \tau_i(\gamma_i)$ pro vhodné $\gamma_i \in M$. Existuje dále množina

$$\mathfrak{U}_4 \subset \mathfrak{U}_3, \quad \text{card } \mathfrak{U}_4 = n' > \max(m, \aleph_0)$$

taková, že pro $n_i, n_{i'} \in \mathfrak{U}_4$ je $\gamma_i = \gamma_{i'}$, což nahlédneme bezprostředně úpravou důkazu existence \mathfrak{U}_3 . Pro $n_i, n_{i'} \in \mathfrak{U}_4$ je tedy

$$\begin{aligned} \varrho(n_i \cap n_{i_0}, n_i \cap n_{i_0'}) &= \varrho(n_{i'} \cap n_{i_0}, n_{i'} \cap n_{i_0'}) = \varrho(\alpha_i, \beta_i), \\ \varrho(n_i \cap n_{i_0'}, n_i \cap n_{i_0}) &= \varrho(n_{i'} \cap n_{i_0'}, n_{i'} \cap n_{i_0}) = \varrho(\gamma_i, \beta_i), \\ \varrho(n_i \cap n_{i_0'}, n_i \cap n_{i_0}) &= \varrho(n_{i'} \cap n_{i_0'}, n_{i'} \cap n_{i_0}) = \varrho(\gamma_i, \alpha_i). \end{aligned}$$

Ale $\text{card } \mathfrak{U}_4 = n' > \max(m, \aleph_0)$. Bodem $n_{i_0} \cap n_{i_0'}$ může procházet podle lemmatu 1 maximálně $\max(m, \aleph_0)$ přímek z \mathfrak{U}_4 . V \mathfrak{U}_4 existují l_3, l_4, l_5 tak, že neprocházejí bodem $n_{i_0} \cap n_{i_0'}$. Tyto přímky spolu s $n_{i_0} = l_1$ a $n_{i_0'} = l_2$ splňují předpoklady lemmatu 2. Při tom body $v_i = l_i \cap n_{i_0'}$ leží na přímce $n_{i_0'}$, což je spor s tvrzením lemmatu 2.

Lemma 4. *Existují přímky p_1, p_2 tak, že každá přímka $n_i \in \mathfrak{N}$ je buď rovnoběžná s p_1 nebo s p_2 .*

Důkaz. Nechť \mathfrak{U}' je množina takových přímek $n_{i'}$, že každá přímka n_i z \mathfrak{R} je rovnoběžná právě s jednou přímkou $n_{i'}$ z \mathfrak{U}' . Podle lemmatu 3 je $\text{card } \mathfrak{U}' < 2^{\aleph_0}$. Je-li $n_{i'} \in \mathfrak{U}'$, označíme symbolem $\mathfrak{U}(n_{i'})$ množinu všech přímek z \mathfrak{N} rovnoběžných s $n_{i'}$. Poněvadž všech přímek n_i je 2^{\aleph_0} a $\mathfrak{N} = \bigcup_{n_{i'} \in \mathfrak{U}'} \mathfrak{U}(n_{i'})$, existuje n_{i_1} tak, že

$$\text{card } \mathfrak{U}(n_{i_1}) = n > \max(m, \aleph_0).$$

Označme jednodušeji $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(n_{i_1})$. Pripusťme, že tvrzení lemmatu 4 neplatí. Potom existují dvě přímky $n_{i_1}, n_{i_2} \in \mathfrak{N} - \mathfrak{U}$ tak, že $n_{i_1} \neq n_{i_2}$. Nechť $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$ je množinou všech takových přímek n_i z \mathfrak{U} , že $N_i \cap n_{i_1} = \emptyset, N_i \cap n_{i_2} = \emptyset$. Snadno zjistíme, že $\text{card } \mathfrak{U}_1 = n$. Při tom $\varrho(n_i \cap n_{i_1}, n_i \cap n_{i_2})$ může nabýt maximálně $\max(m, \aleph_0)$ hodnot. Pro $n_i \in \mathfrak{U}_1$ existuje však maximálně ještě jedna přímka $n_{i'} \in \mathfrak{U}_1$ tak, že $\varrho(n_i \cap n_{i_1}, n_i \cap n_{i_2}) = \varrho(n_{i'} \cap n_{i_1}, n_{i'} \cap n_{i_2})$ (a to rovnoběžka s $n_{i'}$, která má od průsečíku $n_{i_1} \cap n_{i_2}$ tutéž vzdálenost jako n_i). Tím jsme došli ke sporu.

Věta 1. *Nechť p_1 a p_2 jsou přímky z lemmatu 4. Nechť \mathfrak{N}_1 (\mathfrak{N}_2) je množina těch přímek n_i z \mathfrak{N} , pro něž $n_i \parallel p_1$ ($n_i \parallel p_2$). Pak lze označení zvolit tak, že*

1. existuje $n_1 \in \mathfrak{N}_1$ tak, že pro $n_i \in \mathfrak{N}_2$ je $N_i \cap n_1 \neq \emptyset$,
2. \mathfrak{N}_1 obsahuje všechny rovnoběžky s p_1 , $\text{card } \mathfrak{N}_2 = m$.

Důkaz. Podle lemmatu 4 má aspoň jedna z množin \mathfrak{N}_1 a \mathfrak{N}_2 mohutnost 2^{\aleph_0} . Označení lze volit tak, že je to \mathfrak{N}_1 . Je-li $M = \emptyset$, potom $\mathfrak{N}_2 = \emptyset$ a lemma je dokázáno. Je-li $M \neq \emptyset$, existuje $n_{i_1} \in \mathfrak{N}_2$. Nechť \mathfrak{U} je množina všech těch přímek $n_i \in \mathfrak{N}_1$, pro něž $N_{i_1} \cap n_i \neq \emptyset$. Je $\text{card } \mathfrak{U} = 2^{\aleph_0}$. Množinu \mathfrak{U} rozložíme nyní ve dvě

třídy $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ takto: dvě přímky $n_i, n_{i'}$ z \mathfrak{U} patří do téže třídy právě tehdy, když existuje translace τ^* , pro niž $\tau^*(N_i) = N_{i'}$. Označení budiž zvoleno tak, že $\text{card } \mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$. Zvolme libovolně, ale pevně $n_{i_2} \in \mathfrak{U}_1$, a pro každé $n_i \in \mathfrak{U}_1$ translaci τ_i^* tak, že $\tau_i^*(N_{i_2}) = N_i$. Z definice množiny \mathfrak{U}_1 plyne, že pro $n_i \in \mathfrak{U}_1$ je $n_i \cap n_{i_1} = \tau_i^*(\alpha_i)$ pro jisté $\alpha_i \in n_{i_2} - N_{i_2}$. Poněvadž $\text{card } \mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$ a $\text{card } (n_i - N_i) = m < 2^{\aleph_0}$, existuje podmnožina $\mathfrak{U}'_1 \subset \mathfrak{U}_1$, $\text{card } \mathfrak{U}'_1 = n' > m$ takových n_i , že pro $n_i, n_{i'} \in \mathfrak{U}'_1$ je $\alpha_i = \alpha_{i'} = \alpha$. Pripusťme nyní, že existuje $n_{i_3} \in \mathfrak{N}_2$ tak, že pro $n_{i_4} \in \mathfrak{U}'_1$ platí $N_{i_3} \cap n_{i_4} = \emptyset$. Potom je pro $n_i \in \mathfrak{U}'_1$ také $N_{i_3} \cap n_i = \emptyset$. Kdyby totiž pro některé $n_i \in \mathfrak{U}'_1$ platilo $N_{i_3} \cap n_i \neq \emptyset$, potom by z $N_{i_3} \cap n_i \in N_{i_3}$ plynulo $N_{i_3} \cap n_i \text{ non } \in N_i$ a tedy $N_{i_3} \cap n_i \in n_i - N_i$. Existuje pak $\beta \in n_{i_2} - N_{i_2}$ tak, že $\tau_i^*(\beta) = N_{i_3} \cap n_i$. Je však

$$\varrho(n_{i_3} \cap n_{i_4}, n_{i_1} \cap n_{i_4}) = \varrho(n_{i_3} \cap n_i, n_{i_1} \cap n_i)$$

(jedná se o protější strany rovnoběžníka), tedy

$$\tau_{i_4}^*(\beta) = n_{i_3} \cap n_{i_4} \quad \text{a} \quad n_{i_3} \cap n_{i_4} \in n_{i_4} - N_{i_4} \Rightarrow n_{i_3} \cap n_{i_4} \text{ non } \in N_{i_4},$$

čili $n_{i_3} \cap n_{i_4} \in N_{i_4}$ a $N_{i_3} \cap n_{i_4} \neq \emptyset$, což je ve sporu s naším předpokladem. Tím jsme shora uvedené tvrzení pro n_i dokázali. Ale máme opět spor, protože takových rovnoběžných přímk n_i může existovat v \mathbf{R} pouze m . Za n_1 můžeme tedy položit libovolnou přímku z \mathfrak{U}'_1 . Pro každé $n_i \in \mathfrak{N}_2$ je $N_1 \cap n_i = \emptyset$, tedy $\text{card } \mathfrak{N}_2 = m$. Tvrzení o \mathfrak{N}_1 je potom evidentní. Tím je věta dokázána.

Věta 2. Pro $\zeta \in M$ existuje translace τ přímky l tak, že $\tau(M) \subset M$, $\zeta \text{ non } \in \tau(M)$.

Důkaz. Necht \mathfrak{N}_1 a \mathfrak{N}_2 jsou množiny z věty 1, n_1 přímka z tvrzení 1 věty 1. Necht $\eta \in n_1 - N_1$. Existuje $n_{i_2} \in \mathfrak{N}_2$ tak, že $\eta \in N_{i_2}$. Dále existuje $\eta' \in n_{i_2} - N_{i_2}$. Necht $\eta' \in N_{i_3}$ (při tom $n_{i_3} \in \mathfrak{N}_1$). Necht τ' je translace roviny E_2 ve směru p_2 (definici p_2 viz v lemmatu 4), která převádí přímku n_{i_3} v n_1 . Z tvrzení 1 věty 1 o n_1 ihned plyne, že

$$\tau'(n_{i_3} - N_{i_3}) \subset n_1 - N_1 \quad \text{a} \quad \eta \text{ non } \in \tau'(n_{i_3} - N_{i_3}).$$

Dále je

$$\tau'(n_{i_3} - N_{i_3}) \cong n_1 - N_1,$$

tj. existuje shodnost τ'' přímky n_1 tak, že

$$\tau''(\tau'(n_{i_3} - N_{i_3})) = n_1 - N_1.$$

Protože $\tau'(n_{i_3} - N_{i_3})$ je vlastní podmnožina v $n_1 - N_1$, je τ'' translací. Tvrzení věty pak plyne ze shodnosti $M \cong n_1 - N_1$.

Ukážeme, že podmínka vyslovená ve větě 2, je podmínkou dostatečnou při $m = \aleph_0$ pro to, aby $N = l - M$ byla rozkladovou množinou roviny. Uvedme nejprve pomocné tvrzení:

Lemma 5. Necht p je přímka, $M \subset p$, $\text{card } M = \aleph_0$. Necht je splněna následující vlastnost (V):

Pro $\zeta \in M$ existuje translace τ přímky p tak, že $\zeta \text{ non } \in \tau(M) \subset M$.

Potom existuje posloupnost podmnožin $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ taková, že

1. pro M_n existuje translace σ_n přímky p tak, že $\sigma_n(M) = M_n \subset M$,
2. $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$,
3. $\prod_{n=0,1,\dots} M_n = \emptyset$.

Důkaz. Ad 1. Uspořádejme body z M do posloupnosti $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$. Existuje translace na p τ_1 tak, že $\xi_1 \text{ non } \in \tau_1(M) \subset M$. Položme $\varphi_1 = \tau_1$. Budtež definovány translace φ_k pro $k < n$ tak, že $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}(M) \subset M$. Nechť n_1 je první index, pro nějž $\xi_{n_1} \in \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}(M)$. Existuje translace τ_{n_1} na p tak, že $\xi_{n_1} \text{ non } \in \tau_{n_1}(M) \subset M$. Položíme $\varphi_n = \tau_{n_1}$. Je

$$\varphi_1 \dots \varphi_{n-1} \varphi_n(M) = \varphi_n[\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}(M)] \subset \varphi_n(M) \subset M.$$

Položíme $\sigma_n = \varphi_1 \dots \varphi_n$, $M_n = \sigma_n(M)$, $M_0 = M$.

Ad 2. $M_{n+1} = \sigma_{n+1}(M) = \sigma_n \cdot \varphi_{n+1}(M) \subset \sigma_n(M) = M_n$.

Ad 3. Nechť $\xi_n \in M_{n-1}$. Potom $n_1 = n$ a $\xi_n \text{ non } \in \sigma_n(M) = M_n$. Tedy $\xi_n \text{ non } \in \prod_{n=0,1,\dots} M_n$.

Poznámka. Je-li C množina všech celých čísel a $C + n\pi$ (π libovolné iracionální číslo) značí množinu, která vznikne z C translací o $n\pi$, pak $\mathbf{U}(C + n\pi)$, při čemž se sčítá přes přirozená n , je příklad množiny s vlastností (V).

Věta 3. Nechť $M \subset p$ má vlastnost (V), $\text{card } M = \aleph_0$. Potom $p - M$ je rozkladovou množinou roviny E_2 .

Důkaz. Zavedme v E_2 kartézskou soustavu souřadnic. Nechť např. p splyne s osou souřadnic x , body z M ztotožníme s jejich souřadnicemi x_1, \dots, x_n, \dots . Nechť dále $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$ je posloupnost z lemmatu 5. Nechť $x \in p$. Potom nechť $n(x)$ je první index takový, že $x \text{ non } \in M_{n(x)}$. $n(x)$ existuje, což plyne z vlastnosti 3 lemmatu 5. Položme pro $x_i \in M$ $p_i \equiv x = x_i$; nechť R_i je množina bodů (x_i, y) , kde $y \in p - M_{n(x_i)-1}$, $l_k \equiv y = k$ (k reálné číslo), P_k budiž množina bodů (y, k) , kde $y \in p - M_{n(k)}$.

Ukážeme, že systém všech množin P_k a R_i tvoří rozklad na E_2 :

1. P_k, R_i jsou neprázdné. 2. $P_k \cap R_i = \emptyset$.

Důkaz. Jedná se o to, že průsečík přímek l_k a $p_i(x_i, k)$ nepatří do $P_k \cap R_i$. Rozlišíme dva případy:

$$\text{a) } n(k) < n(x_i), \quad \text{b) } n(k) \geq n(x_i).$$

Ad a): Potom $x_i \in M_{n(k)}$, tedy $x_i \text{ non } \in p - M_{n(k)}$, tedy bod $(x_i, k) \text{ non } \in P_k$.

Ad b): Potom $k \in M_{n(x_i)-1}$, tedy $k \text{ non } \in p - M_{n(x_i)-1}$, tedy $(x_i, k) \text{ non } \in R_i$.

$$3. \mathbf{U}R_i \cup \mathbf{U}P_k = E_2.$$

Důkaz. Uvažujme o bodu (a, b) :

a) nechť $a \text{ non } \in M$. Potom $(a, b) \in P_b$.

b) $a = x_i$ pro jisté i , $b \text{ non } \in M$. Potom $(a, b) \in R_i$.

c) $a, b \in M$, $a = x_i$, $b = x_j$.

c') Nechť $n(b) < n(a)$. Potom $b \text{ non } \in M_{n(a)-1}$, tedy $(a, b) \in R_i$.

c'') Nechť $n(b) \geq n(a)$. Potom $a \in p - M_{n(b)}$, tedy $(a, b) \in P_b$. Je zřejmě $P_k \cong p - M \cong R_i$. Tím je věta 3 dokázána.

Ukážeme, že věta 3 obecně neplatí pro m , když $\aleph_0 < m < 2^{\aleph_0}$. Nechť tedy m je kardinální číslo, pro něž platí $\aleph_0 < m < 2^{\aleph_0}$. Budiž H Hamelova base,²⁾ M množina indexů, $\text{card } M = m$. Nechť $G \subset H$, $\text{card } G = m$. Budeme též psát $G = \{p_i\}$, $i \in M$. Položme $G_i = G - \{p_i\}$. Nechť $H_1 \subset H$, $\text{card } H_1 = m$, $G \cap H_1 = \emptyset$ (H_1 zřejmě existuje). Budeme psát $H_1 = \{x_i\}$, $i \in M$. Nechť $\mathbb{G}_i = [G_i]$ je aditivní grupa vytvořená množinou G_i ,

$$\mathcal{G}_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} (x_i + \mathbb{G}_i + np_i)$$

($x_i + \mathbb{G}_i + np_i$ znamená množinu všech čísel tvaru $x_i + g + np_i$, $g \in \mathbb{G}_i$), $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in M} \mathcal{G}_i$. Je $\text{card } \mathcal{G} = m$. Ukážeme, že $E_1 - \mathcal{G}$ není rozkladovou množinou na E_2 (E_1 zde značí množinu všech reálných čísel), ačkoli má vlastnost (V). Důkaz provedeme pomocí několika dílčích tvrzení:

a) \mathcal{G}_i jsou navzájem disjunktí.

b) $\mathcal{G}_i + np_k = \mathcal{G}_i$, n celé, $i \neq k$.

c) $x_i + g + np_i \text{ non } \in \mathcal{G}_i + (n+1)p_i \subset \mathcal{G}_i$, n celé nezáporné, $g \in \mathbb{G}_i$.

Důkaz tvrzení a), b), c) je evidentní z definice \mathcal{G}_i .

d) \mathcal{G} má vlastnost (V). Důkaz plyne z b) a c).

e) Nechť $\mathcal{G} + t \subset \mathcal{G}$. Potom $\mathcal{G}_i + t \subset \mathcal{G}_i$ a $t = \sum k_j p_j$, $k_j \geq 0$ celé, při čemž se sčítá přes všechna p_j a jen konečně mnoho k_j je větších než nula.

Důkaz. Nechť

$$x_i + g + n_i p_i + t = x_k + g' + m_k p_k, \quad x_k + g' + m_k p_k + t = x_l + g'' + r_l p_l,$$

při čemž $g \in \mathbb{G}_i$, $g' \in \mathbb{G}_k$, $g'' \in \mathbb{G}_l$.

Připustme, že $i \neq k$. Potom

$$t = x_k - x_i + g' - g + m_k p_k - n_i p_i,$$

$$t = x_l - x_k + g'' - g' + r_l p_l - m_k p_k,$$

²⁾ Množina reálných čísel $H = \{a_0, a_1, \dots\}$ se nazývá Hamelovou basí, když každé reálné číslo a se dá vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $a = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ jsou racionální čísla, při čemž jich je jen konečně mnoho různých od nuly. Je $\text{card } H = 2^{\aleph_0}$ (viz G. HAMEL: Eine Basis aller Zahlen..., Math. Annalen, 60 459–462).

což je spor s tím, že $x_i, x_k, x_i \in H_1$ a $H_1 \cap G = \emptyset$. Tím je dokázáno prvé tvrzení. Dále plyne, že

$$t = (g' - g) + (n_i - m_i) p_i.$$

Je $x_i + t = x_i + (g' - g) + (n_i - m_i) p_i \in \mathcal{G}_i$. Odtud $n_i - m_i \geq 0$. Číslo $g' - g$ jakožto prvek grupy $[G]$ vzniklo sečtením konečného počtu p_i resp. $-p_i$. Tím je tvrzení e) dokázáno.

Označme ještě množinu indexů $j \in M$, pro něž $k_j > 0$, symbolem $N[t]$.

f) *Nechť $\mathcal{G} + t \subset \mathcal{G}$, $x_i + g + np_i \text{ non } \in \mathcal{G} + t$ pro jisté $i \in M$, $g \in \mathfrak{G}_i$ a celé nezáporné. Potom $x_i + g' + np_i \text{ non } \in \mathcal{G} + t$ pro každé $g' \in \mathfrak{G}_i$ a $0 \leq m \leq n$.*

Důkaz. Nechť $t = \sum k_j p_j$. Pripustíme, že $k_i \leq n$.

Potom

$$t = g'' + (n - k_i) p_i, \quad g'' \in \mathfrak{G}_i.$$

\mathfrak{G}_i je grupa, tedy $g' - g'' \in \mathfrak{G}_i$ a

$$x + g - g'' + k_i p_i + g'' + (n - k_i) p_i = x + g + np_i \in \mathcal{G} + t,$$

což je spor s předpokladem. Tedy $k_i > n$. $x \in \mathcal{G}_i + t \Rightarrow x = x_i + g_1 + mp_i$, kde $g_1 \in \mathfrak{G}_i$ a $m > n$.

g) *Nechť $\mathcal{G} \supset \mathcal{G} + t_1, \mathcal{G} \supset \mathcal{G} + t_2, \dots, \mathcal{G} \supset \mathcal{G} + t_n, \dots$*

Potom $\prod_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G} + t_n) \neq \emptyset$.

Důkaz. Existuje index $k \in M$, pro nějž platí $k \text{ non } \in N[t_n]$ pro všechna přirozená n . Je potom podle b) $\mathcal{G}_k + t_n = \mathcal{G}_k$ pro všechna přirozená n . Tedy $\mathcal{G}_k \subset \prod_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G} + t)$.

Věta. *Množina $E_1 - \mathcal{G}$ není rozkladovou množinou roviny.*

Důkaz. Pripustíme, že existuje rozklad \mathbf{R} na rovině v množiny shodné s $E_1 - \mathcal{G}$. Nechť \mathfrak{N}_1 a \mathfrak{N}_2 jsou množiny přímk z věty 1, n_1 z téže věty zvolme za osu x kosouhlých souřadnic, za osu y zvolme přímku rovnoběžnou s přímkami z \mathfrak{N}_2 a počátek a orientaci zvolme tak, aby prvek rozkladu \mathbf{R} ležící nyní v ose x měl za množinu svých x -ových souřadnic množinu $E_1 - \mathcal{G}$. Projekci množiny $N \subset E_2$ na osu x (resp. y) označíme jako $N(x)$ (resp. $N(y)$).

Zvolme nyní libovolně, ale pevně $i \in M$ a uvažujme o bodech

$$(x_i, 0), (x_i + p_i, 0) \dots, (x_i + np_i, 0), \dots, \text{ kde je } n \text{ celé nezáporné.} \quad (1)$$

Uvažujme dále o přímkách ${}^n m \equiv x = np_i + x_i$. Z toho, že body (1) neleží v $n_1 - \mathcal{G}$, plyne, že v přímce ${}^n m$ leží prvek rozkladu \mathbf{R} ; označme jej ${}^n M$. Nechť nyní bod $(np_i + x_i, c)$ není prvkem ${}^n M$. Potom tento bod leží v jistém $M \in \mathbf{R}$, M pak leží v přímce $p \equiv y = c$. Z vlastnosti přímky n_1 plyne, že $E_1 - M(x) \subset \mathcal{G}$. Protože $np_i + x_i \text{ non } \in E_1 - M(x)$, je podle f) $n' p_i + x_i \text{ non } \in E_1 - M(x)$

pro n' , $0 \leq n' \leq n$. Z toho plyne, že $(n'p_i + x_i, c) \in M$, a tedy $(n'p + x_i, c)$ non $\in^{n'} M$. Je potom

$$({}^0m - {}^0M)(y) \supset ({}^1m - {}^1M)(y) \supset \dots \supset ({}^nm - {}^nM)(y) \dots$$

Poněvadž $({}^nm - {}^nM)(y) \cong \mathcal{G}$, existuje podle g) $y^* \in \prod_{n=0}^{\infty} ({}^nm - {}^nM)(y)$. V přímce $p^* \equiv y = y^*$ nechť leží $Y^* \in \mathbf{R}$. Podle volby y^* jsou body

$$(np_i + x_i, y^*) \in Y^* \text{ pro } n \text{ celé nezáporné.} \quad (2)$$

Dále je $(p^* - Y^*)(x) = \mathcal{G} + t$ pro vhodné t , $(p^* - Y^*)(x) \subset \mathcal{G}$ a podle e) $\mathcal{G}_i + t \subset \mathcal{G}_i$. Ale podle f) v důsledku (2) je $\mathcal{G}_i \cap (p^* - Y^*)(x) = \emptyset$. Došli jsme tedy ke sporu. Věta je tím dokázána.

LITERATURA

- [1] *M. Sekanina*: O rozkladech v eukleidovských prostorech, Časopis pro pěstování matematiky, 83 (1958), 70—79.
 [2] *H. Wieleitner*: Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 10/II 1958 г.)

В статье рассматриваются разложения \mathbf{R} евклидовой плоскости E_2 на множества, конгруэнтные с подмножеством N прямой l , причем $m = \text{card}(l - N) < 2^{\aleph_0}$. В том случае, когда такое разложение существует, называем N множеством разложения E_2 .

Пусть \mathfrak{N} обозначает множество тех прямых, на которых лежат элементы \mathbf{R} . Тогда \mathfrak{N} состоит из двух подмножеств $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, из которых одно состоит из всех параллельных прямых определенного направления, а другое содержит в точности m параллельных прямых другого направления (теорема 1).

В теореме 2 доказывается, что для того, чтобы N было множеством разложения E_2 , необходимо, чтобы для каждой точки ξ множества $l - N$ существовало сдвигание τ прямой l такое, что $\tau(l - N) \subset l - N$, ξ non $\in \tau(l - N)$. Если $m = \aleph_0$, то это условие является также достаточным; в случае $\aleph_0 < m$ это не имеет места.

Summary

ON CERTAIN DECOMPOSITION SETS OF THE PLANE

MILAN SEKANINA, Brno

(Received February 10, 1958)

The paper is concerned with the decompositions \mathbf{R} of the euclidean plane E_2 into the sets congruent with a given subset N of the straight line l , when $m = \text{card}(l - N) < 2^{\aleph_0}$. When such a decomposition exists, we say that N is a decomposition set of E_2 .

Let \mathfrak{N} be the set of the straight lines, in which elements of \mathbf{R} are contained. It is proved, that \mathfrak{N} consists of two subsets $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, one of which consists of all straight lines parallel to a given direction, the other contains exactly m straight lines parallel to another direction (theorem 1).

In theorem 2 we prove that the following condition is necessary for N being a decomposition set of E_2 :

If ξ is a point of $l - N$, there exists a translation τ of l such that $\tau(l - N) \subset l - N$, $\xi \text{ non } \in \tau(l - N)$. In the case $m = \aleph_0$ this condition is sufficient, but this is not the case for $m > \aleph_0$.