POZNÁMKA K PROJEKTIVNÍ DEFORMACI ROZVINUTELNÝCH NADPLOCH

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo dne 19. listopadu 1957) DT: 513.734.3

Určuje se geometrický význam Cartanem udaných rovnic pro projektivní deformaci rozvinutelných nadploch v S_4.

Každé dvě rozvinutelné nadplochy, vytvořené oskulačními rovinami křivek v projektivním čtyřdimensionálním prostoru, jsou v projektivní deformaci 2. řádu, při čemž tato deformace závisí na dvou funkcích jedné proměnné. É. CARTAN ve své práci *Sur la déformation projective des surfaces* (Annales de l'École Normal Supérieure, III ser., tom *37*, 1920) určil (bez důkazu) tuto korespondenci efektivně rovnicemi (118), jež přepíši následujícím způsobem:

Předpokládejme, že hrana vratu nadplochy (S) je $H(t)$ a souřadnice jsou tak normovány, že $[HH'H''H'''H'''']=1$, nadplocha je vytvořena body

$$A = H''(t) + u\,H'(t) + v\,H(t)\,; \tag{1}$$

nadplocha (Σ) buď podobně vytvořena body

$$B = K^{\cdot\cdot}(\bar{t}) + \bar{u}\,K^{\cdot}(\bar{t}) + \bar{v}\,K(\bar{t})\,, \tag{2}$$

kde $K(\bar{t})$ je její hrana vratu a $[KK^{\cdot}K^{\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot\cdot}]=1$. Při tom značím důsledně čárkou derivaci podle t a tečkou derivaci podle $\bar{t}$. Cartanem stanovené rovnice deformace jsou potom

$$\bar{t} = f(t)\,,$$

$$\bar{u} = \frac{u}{f'(t)} + \varphi(t)\,, \tag{3}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{f'^2(t)} + \frac{1}{2}\,u\left[\frac{\varphi(t)}{f'(t)} - \frac{f''(t)}{f'^3(t)}\right] + \frac{1}{4}\,\varphi^2(t) + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(t)}{f'(t)} - \frac{f'''(t)}{2f'^3(t)} + \frac{3f''^2(t)}{4f'^4(t)}\,.$$

Nyní ukáži, jak lze tuto korespondenci geometricky interpretovati. *Především si libovolně* (ovšem až na určité podmínky regularity) *zvolím korespondenci mezi hranami vratu obou nadploch a předepíši, aby určité křivce γ na rozvinutelné přímkové ploše s hranou vratu $H(t)$ odpovídala jistá křivka $\bar{\gamma}$ na rozvinutelné přímkové ploše s hranou vratu $K(\bar{t})$.* Protože korespondence mezi sobě odpovídajícími rovinami obou nadploch je nutně projektivita, stačí k dokonalému geometrickému popisu (3) konstruovati tuto projektivitu.

Označím E_2 *element 2. řádu hrany vratu nadplochy* (S), *ležící v určité její rovině,* p *buď tečna křivky* γ, *ležící v téže rovině. Podobný význam nechť mají* $\bar{E}_2$ *a* $\bar{p}$ *v odpovídající rovině nadplochy* (Σ). *Nyní existuje jediná projektivita mezi sobě odpovídajícími rovinami, v níž element* E_2 *přejde v* $\bar{E}_2$ *a* p *v* $\bar{p}$. *Projektivní deformace je pak souhrnem těchto projektivit.*

Dokáži tuto větu a tím i Cartanovy rovnice. Korespondence mezi hranami vratu buď (3_1). Nejobecnější kolineace, převádějící v sebe odpovídající si roviny a v nich body hran vratu a jejich tečny, je

$$TH = K\,, \quad TH' = aK + bK^{\cdot}\,, \quad TH'' = cK + dK^{\cdot} + eK^{\cdot\cdot}\,. \qquad (4)$$

TE_2 a $\bar{E}_2$ mají analytický styk 2. řádu právě tehdy, když existuje λ, μ tak, že

$$TH = K\,, \quad TH' = K' + \lambda K\,, \quad TH'' = K'' + 2\lambda K' + \mu K\,. \qquad (5)$$

Z $K^{\cdot} = f'^{-1}K'\,, \quad K^{\cdot\cdot} = -f''f'^{-3}K' + f'^{-2}K''$ a (5) plyne

$$TH = K\,, \quad TH' = aK + f'K^{\cdot}\,, \quad TH'' = cK + (f'' + 2af')\,K^{\cdot} + f'^2K^{\cdot\cdot}\,. \qquad (6)$$

Za křivku γ zvolím nyní křivku $H'(t)$ a za $\bar{\gamma}$ křivku

$$\frac{1}{2}\left(\varphi f' - \frac{f''}{f'}\right) K + f'K^{\cdot}\,, \qquad (7)$$

kde $\varphi(t)$ je libovolná funkce. Snadno se zjistí, že kolineace (6) převádí v sebe tečny křivek γ a $\bar{\gamma}$ právě tehdy, když

$$c = \frac{1}{4}\,\varphi^2 f'^2 + \frac{1}{2}\,\varphi' f' - \frac{1}{2}\,\frac{f'''}{f'} + \frac{3}{4}\,\frac{f''^2}{f'^2}\,. \qquad (8)$$

Píši-li nyní $T(H'' + uH' + vH) = f'^3(K^{\cdot\cdot} + \bar{u}K^{\cdot} + \bar{v}K)$, dostanu srovnáním vztahy $(3_{2,3})$.

Vhodnějším analytickým vyjádřením křivky $\bar{\gamma}$ by se Cartanovy rovnice zjednodušily.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРОЕКТИВНОМУ ИЗГИБАНИЮ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

АЛОИС ШВЕЦ, (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

Э. Картан (Annales l'Éc. N. Sup., *37*, 1920) ввел проективное изгибание двух развертывающихся гиперповерхностей (1) и (2) в S_4 при помощи уравнений (3). В настоящей статье указано геометрическое построение

этого изгибания. Возьмем какое-либо соответствие между кривыми $H(t)$ и $K(t)$; пусть E_2 и $\overline{E}_2$ — соответственно элементы второго порядка кривых $H(t)$ и $K(\bar{t})$ в соответствующих друг другу плоскостях. На развертывающейся поверхности с ребром возврата $H(t)$ возьмем кривую γ; пусть этой кривой соответствует кривая $\bar{\gamma}$ на развертывающейся поверхности с ребром возврата $K(\bar{t})$; пусть p и $\bar{p}$ — касательные к кривым γ и $\bar{\gamma}$ в соответственных точках. Существует единственное проективное соответствие между соответствующими друг другу плоскостями, при котором E_2 переходит в $\overline{E}_2$, а p в $\bar{p}$. Тогда проективное изгибание является совокупностью этих проективных соответствий.

Résumé

REMARQUE SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 19 novembre 1957)

É. Cartan (Annales de l'Éc. N. Sup., *37*, 1920) a trouvé les équations (3) qui donnent la déformation projective d'ordre 2 la plus générale des hypersurfaces développables plongées dans S_4. J'ai trouvé l'interprétation géométrique: Soit choisie une correspondance entre les courbes $H(t)$ et $K(\bar{t})$, E_2 et $\overline{E}_2$ soient les élements correspondants d'ordre 2 des courbes $H(t)$ et $K(\bar{t})$. Sur la surface développable avec l'arrête de rebroussement $H(t)$ soit choisie une courbe γ et soit $\bar{\gamma}$ la courbe correspondante de la surface développable avec l'arrête de rebroussement $K(\bar{t})$; p et $\bar{p}$ soient les tangentes des courbes γ et $\bar{\gamma}$ aux points correspondants. Il existe une seule homographie entre les plans correspondants qui transforme E_2 en $\overline{E}_2$ et p en $\bar{p}$. La déformation projective est l'ensemble des homographies considérées.