Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O LEXIKOGRAFICKÉM SOUČTU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

KAREL ČULÍK, Brno

(Došlo dne 11. listopadu 1957) DT: 519.513

V článku je ukázáno, že nikoli každá částečně uspořádaná množina je lexikografickým součtem systému částečně uspořádaných a lexikograficky nerozložitelných (3) množin přes částečně uspořádanou a lexikograficky nerozložitelnou množinu. Dále se tu studují základní vlastnosti vložených (1) částečně uspořádaných podmnožin, rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné částečně uspořádané podmnožiny a faktorové (2) částečně uspořádané množiny, které jsou lexikograficky nerozložitelné, na dané částečně uspořádané množině.

O částečně uspořádané (zkráceně část. usp.) podmnožině $P \neq \emptyset$ část. usp. množiny M řekneme, že je *vložená v* M, jestliže platí

$$\{x, y \in P,\ z \in M - P\} \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ i } \{z < x \Leftrightarrow z < y\}\ . \tag{1}$$

Podmínka (1) říká, že prvek $z \in M - P$ se chová vzhledem k relaci částečného uspořádání ke všem prvkům z P stejně.

Část. usp. množinu M a každou její jednoprvkovou podmnožinu nazýváme *triviálními vloženými* část. usp. množinami v M.

Rozklad $\overline{M}$ na část. usp. množině M nazýváme *rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny*, jestliže každý jeho prvek je část. usp. podmnožinou vloženou v M. Zejména nejmenší a největší rozklad (viz [2] str. 14) na část. usp. množině je vždy jejím rozkladem ve vložené (totiž triviální) část. usp. podmnožiny.

Vzhledem k podmínce (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M definovat částečné uspořádání takto

$$P, Q \in \overline{M}, P \not\equiv Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \text{ když } x \in P,\ y \in Q\}\ . \tag{2}$$

Pak část. usp. množinu definovanou na $\overline{M}$ s částečným uspořádáním (2) označujeme stručně zase $\overline{M}$ a nazýváme *faktorovou část. usp. množinou na část. usp. množině* M. Existuje tedy na každé část. usp. množině alespoň jedna její faktorová část. usp. množina a má-li daná část. usp. množina alespoň dva prvky, existují vždy alespoň dvě její faktorové část. usp. množiny (definované na nejmenším a největším rozkladu, které jsou v tomto případě různé). Faktorová část. usp. množina definovaná na největším příp. nejmenším rozkladu je isomorfní s jednoprvkovou příp. s danou část. usp. množinou.

Jsou-li prvky x, y v část. usp. množině nesrovnatelné, píšeme $x \parallel y$. Totožnost příp. isomorfismus dvou část. usp. množin označujeme symbolem $\equiv$, příp. $=$.

Věta 1. *Část. usp. množina M je lexikografickým součtem systému část. usp. množin $M_u \neq \emptyset$ přes část. usp. množinu $N \neq \emptyset$ tj. platí $M \equiv \sum_N M_u$, $u \in N$ právě tehdy, když M_u je část. usp. množina vložená v M pro každé $u \in N$ a N je isomorfní faktorové část. usp. množině definované na rozkladu ve vložené podmnožiny M_u.*

Důkaz. Nechť nejdříve platí $M \equiv \sum_N M_u$. Pak podle definice lexikografického součtu (srv. [1], str. 27) platí $M_u \cap M_v = \emptyset$ pro $u \neq v$ a také $\bigcup_{u \in N} M_u \equiv M$, takže podmnožiny M_u jsou prvky jistého rozkladu $\overline{M}$ na M. Nechť $z \in M - M_a$, tj. $z \in M_b$ pro vhodné $b \neq a$, kde $a, b \in N$ a nechť $x, y \in M$. Platí-li nyní $x < z$ příp. $z < x$ v $M \equiv \sum_N M_u$, pak podle definice lexikografického součtu musí platit $a < b$ příp. $b < a$ v N a tedy také $y < z$ příp. $z < y$ v M. Tedy M_a splňuje podmínku (1) a proto je část. usp. množinou vloženou v M pro každý $a \in N$, takže rozklad $\overline{M}$ je rozkladem ve vložené část. usp. množiny v M. Zobrazení část. usp. množiny N na faktorovou část. usp. množinu $\overline{M}$, které zobrazuje prvek $a \in N$ na prvek $M_a \in \overline{M}$ je zřejmě prosté. Platí-li $a < b$ v N, pak podle definice lexikografického součtu platí také $x < y$ pro $x \in M_a$, $y \in M_b$ a tedy podle (2) je $M_a < M_b$ v $\overline{M}$. Platí-li naopak $M_a < M_b$ v $\overline{M}$, pak podle (2) platí $x < y$ pro $x \in M_a$, $y \in M_b$ a tedy podle definice lexikografického součtu je $a < b$ (neboť platí $a \neq b$). Tím je ukázáno, že uvažované zobrazení je isomorfismem (srv. definice isomorfismu [1], str. 18—19) mezi N a $\overline{M}$.

Nechť nyní část. usp. množina N je isomorfní s faktorovou část. usp. množinou $\overline{M}$ na část. usp. množině M a nechť v předpokládaném isomorfismu si odpovídají prvky $a \in N$, $N_a \in \overline{M}$. Pak část. usp. množiny M_a jsou vložené v M. Z definice lexikografického součtu především plyne, že množiny M a $\bigcup_{a \in N} M_a$ jsou stejné. Nechť konečně $x, y \in M$, tj. platí $x \in M_a$, $y \in M_b$ pro vhodné $a, b \in N$. Pak každé z následujících tvrzení je zřejmě ekvivalentní s předcházejícím

(a) $x < y$ v $\sum_N M_u$,

(b) $a < b$ v N nebo $a = b$,

(c) $M_a < M_b$ v $\overline{M}$ nebo $x < y$ v M_a,

(d) $x < y$ v M.

Tím je dokázáno, že $\sum_N M_u \equiv M$.

Řekneme, že část. usp. množina M je *lexikograficky nerozložitelná* příp. *lexikograficky skoronerozložitelná*, jestliže splňuje podmínku

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{buď } \operatorname{kard} M_x = 1 \text{ pro každý } x \in N \text{ nebo } \operatorname{kard} N = 1\,, \tag{3}$$

příp.

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{buď existuje } M_x \text{ taková, že } M_x = M \text{ nebo } N = M\,. \tag{4}$$

Věta 2. *Pro část. usp. množinu M jsou ekvivalentní tvrzení*

a) *M je lexikograficky nerozložitelná.*

b) *Každá část. usp. podmnožina vložená v M je triviální.*

c) *Na M existují nejvýše dvě faktorové část. usp. množiny.*

Důkaz plyne jednoduchou úvahou z použitých definic a z věty 1.

Věta 3. *Část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná je také lexikograficky skoronerozložitelná. Konečná část. usp. množina, která je lexikograficky skoronerozložitelná je také lexikograficky nerozložitelná. Existují nekonečné část. usp. množiny, které jsou lexikograficky skoronerozložitelné ale nejsou lexikograficky nerozložitelné.*

Důkaz. I. Ihned se vidí, že (3) $\Rightarrow$ (4).

II. Nechť část. usp. množina M je konečná a lexikograficky skoronerozložitelná. Předpokládejme dále, že existuje část. usp. podmnožina P, která je netriviální vložená v M. Pak zřejmě existuje rozklad $\overline{M}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v M takový, že $P \in \overline{M}$. Nechť část. usp. množina N je isomorfní s faktovou část. usp. množinou $\overline{M}$ a v příslušném isomorfismu nechť si odpovídají prvky $a \in N$, $M_a \in \overline{M}$. Podle věty 1 je $M \equiv \sum_N M_x$, avšak $\operatorname{kard} \overline{M} < \operatorname{kard} M$, takže $N \neq \overline{M}$ a také $\operatorname{kard} M_x < \operatorname{kard} M$ čili $M_x \neq M$ pro každý $x \in N$. Tedy neplatí (4) a to je spor. Tím je ukázáno, že každá část. usp. podmnožina vložená v M musí být triviální a tedy podle věty 2 je část. usp. množina M lexikograficky nerozložitelná.

III. Snadno se nahlédne, že řetězec typu ω nebo typu ω^* a také nekonečná množina prvků, z nichž každé dva jsou nesrovnatelné, jsou část. usp. množiny lexikograficky skoronerozložitelné, ale nejsou zřejmě lexikograficky nerozložitelné.

Nyní se přirozeně nabízí otázka, zda lze každou část. usp. množinu plně charakterisovat s pomocí operace lexikografického součtu a s pomocí část. usp. množin, které jsou lexikograficky nerozložitelné případně jenom lexikograficky skoronerozložitelné, tj. zda lze ke každé část. usp. množině M najít takové vyjádření ve tvaru lexikografického součtu $M \equiv \sum_N M_x$, aby část. usp. množiny M_x pro každý $x \in N$ i část. usp. množina N byly lexikograficky nerozložitelné případně jenom lexikograficky skoronerozložitelné. Odpověď je však v obou případech záporná. Je-li totiž M pětiprvkovou množinou navzájem nesrovnatelných prvků a má-li N být lexikograficky nerozložitelná, musí být kard $N \leqq 2$, neboť jedině jednoprvková a dvouprvkové faktorové část. usp. množiny na M jsou lexikograficky nerozložitelné. Je-li však (podle věty 1) $N = \overline{M}$, kde $\overline{M}$ je příslušná faktorová část. usp. množina, existuje alespoň jeden $M_x \in \overline{M}$ takový, že kard $M_x > 2$ a tedy M_x není lexikograficky nerozložitelná. A podle věty 3 pro konečné část. usp. množiny jsou pojmy lexikografické nerozložitelnosti a skoro nerozložitelnosti ekvivalentní.

Tážeme-li se však, zda ke každé část. usp. množině M existuje její vyjádření ve tvaru lexikografického součtu $M \equiv \sum_N M_x$ takové, že N je lexikograficky nerozložitelná příp. že M_x je lexikograficky nerozložitelná pro každý $x \in N$, pak odpověď je v obou případech kladná, neboť v prvním případě stačí podle věty 1 uvažovat největší a v druhém případě nejmenší rozklad na M. Je-li M lexikograficky nerozložitelná, pak podle věty 2 žádné další rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny neexistují, zatím co v opačném případě uvedených rozkladů může existovati více. V dalším tedy budeme vyšetřovat jednak rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny, jednak faktorové část. usp. množiny, které jsou samy lexikograficky nerozložitelné. Nejdříve uvedeme několik lemmat o vložených část. usp. podmnožinách.

Lemma 1. *Je-li P část. usp. množina vložená v část. usp. množině Q a je-li Q vložená v část. usp. množině R, pak také P je vložená v R. Je-li P vložená v R, pak je vložená také v každé Q, pro niž platí $P \subset Q \subset R$.*

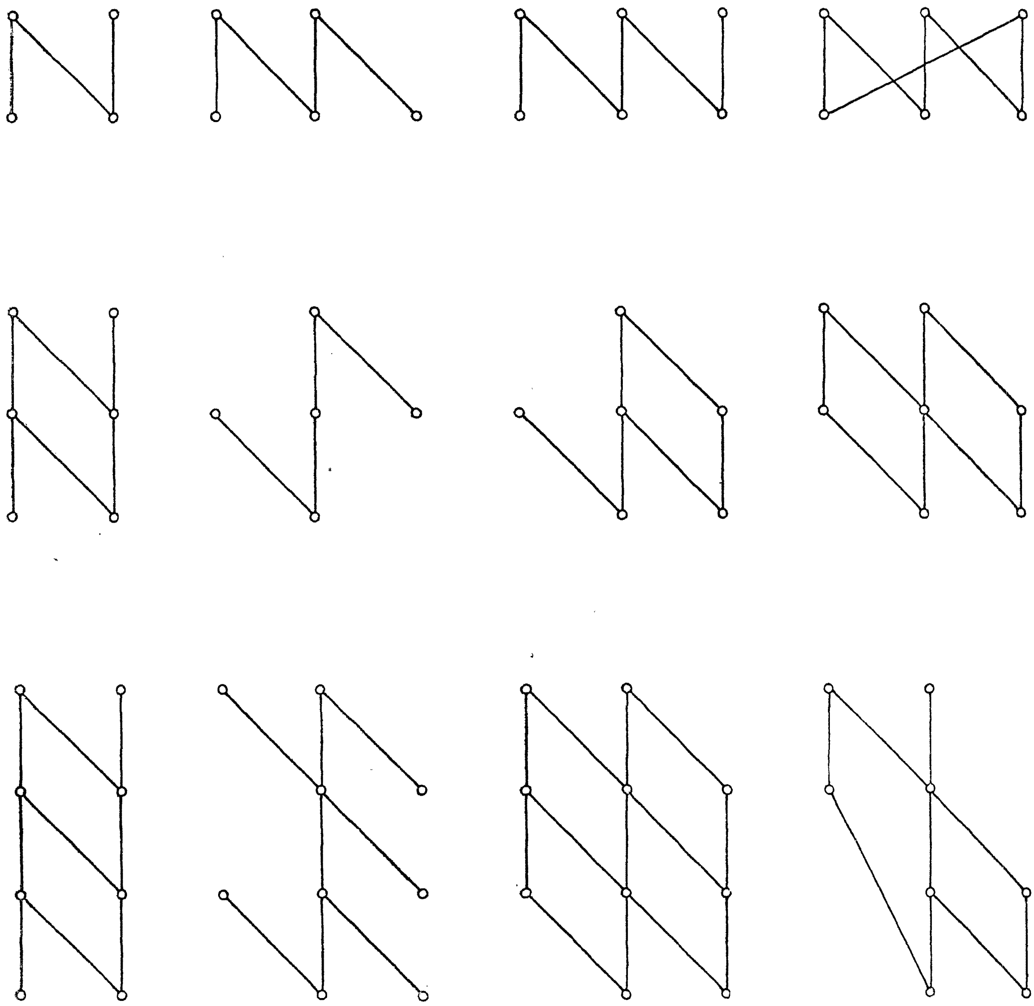
Důkaz obou tvrzení plyne přímo z (1).

Lemma 2. *Část. usp. množina P vložená v část. usp. množině M je konvexní v M, ale opak neplatí.*

Důkaz sporem plyne přímo z (1), když konvexita pro část. usp. množiny se definuje stejně jako pro svazy (viz [1], str. 44). Protipříklad je dán libovolným dvouprvkovým řetězcem v kterékoliv část. usp. množině délky 2, jejichž diagramy jsou na obr. 1.

Lemma 3. *Jsou-li P_ι, $\iota \in I$ část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $\bigcap_{\iota \in I} P_\iota \neq \emptyset$, pak také $\bigcap_{\iota \in I} P_\iota$ je část. usp. podmnožina vložená v M.*

Důkaz. Nechť $P = \bigcap_{\iota \in I} P_\iota$ a nechť $x, y \in P$, $z \in M - P$. Pak platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$, a existuje index $\varkappa \in I$ takový, že z non $\in P_\varkappa$, takže podle (1) (neboť $x, y \in P_\varkappa$ a $P_\varkappa$ je vložená v M) platí $y \varrho z$. Podle předpokladu je $P \neq \emptyset$ a tedy podle (1) je P vložená v M.



Obr. 1

Sjednocení vložených část. usp. podmnožin nemusí být vloženou část. usp. podmnožinou. Na příklad sjednocení dvou různých jednoprvkových podmnožin v kterékoliv část. usp. množině na obr. 1 není vloženou část. usp. podmnožina, neboť uvedené část. usp. množiny jsou lexikograficky nerozložitelné a podle věty 2 každá jejich vložená podmnožina je triviální. Platí však

Lemma 4. *Jsou-li P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i < k$, pak také $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ je část. usp. podmnožina vložená v M.*

Důkaz. Pro $k = 1$ je lemma zřejmě správné a pro $k = 2$ nechť $z \in M - (P_1 \cup P_2)$, $x, y \in P_1 \cup P_2$. Pak platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$ a podle předpokladu existuje $u \in P_1 \cap P_2$ a ovšem $P_1 \cap P_2 \subset P_1$, $P_1 \cap P_2 \subset P_2$. Pak podle (1) platí $u \varrho z$ a proto také $y \varrho z$ čili $P_1 \cup P_2$ je vložená v M (zřejmě totiž $P_1 \cup P_2 \neq \emptyset$). Předpokládejme nyní, že lemma je správné pro každé h, $2 \leqq h < k$. Vybereme-li na příklad z daných $P_1, P_2, \ldots, P_k$ prvních $k - 1$ podmnožin, pak tyto podmnožiny splňují podmínky lemmatu pro $h = k - 1$ a tedy podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v M. Avšak platí také $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i \cap P_k \neq \emptyset$, takže znovu podle indukčního předpokladu pro $h = 2$ musí být také $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v M.

Lemma 5. *Jsou-li P, Q část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $P \cap Q \neq \emptyset$, $P - Q \neq \emptyset \neq Q - P$, pak také $P - Q$ i $Q - P$ jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a pro každé $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$ platí*

$$x \varrho y, \quad y \varrho z, \quad x \varrho z, \quad \textit{kde } \varrho \textit{ značí některý ze symbolů } \langle, \rangle, \| . \tag{5}$$

Je-li $P \cap Q \neq \emptyset$, ale $P - Q = \emptyset$, pak $Q - P$ nemusí být část. usp. podmnožinou vloženou v M.

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení (5). Podle předpokladu existují $t \in P - Q$, $u \in P \cap Q$ a nechť platí $t \varrho u$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Jelikož Q je vložená v M, musí podle (1) být $t \varrho y$, $t \varrho z$ pro každý $y \in P \cap Q$ a každý $z \in Q - P$. Podle předpokladu však existuje také $v \in Q - P$, takže platí $t \varrho v$ a jelikož P je vložená v M, musí podle (1) být $x \varrho v$, $y \varrho v$ pro každé $x \in P - Q$ a $y \in P \cap Q$. Využijeme-li nyní znovu toho, že P i Q jsou vložené v M, pak podle (1) musí být $x \varrho y$, $y \varrho z$, $x \varrho z$ pro každé $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$.

Z (5) a z daných předpokladů však ihned plyne, že $P - Q$ i $Q - P$ jsou část. usp. podmnožiny vložené v M.

Nechť konečně $M = \{a, b, c, d, e\}$ a nechť M je částečně uspořádána relací pokrytí takto: a pokrývá b; b pokrývá c i d; e pokrývá d. Pak $\{a, b\}$ i M jsou část. usp. podmnožiny vložené v M, ale $M - \{a, b\}$ není vložená, neboť $b > d$, zatím co $b \| e$.

Lemma 6. *Nejmenší zákryt i největší zjemnění libovolného, neprázdného systému rozkladů ve vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M je zase rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny v M.*

Důkaz. Podle [2] především platí, že jak nejmenší zákryt tak největší zjemnění rozkladů na množině M je zase rozkladem na množině M.

Nechť nyní P je prvkem nejmenšího zákrytu uvažovaného systému rozkladů. Pak $P = \bigcup P_\iota$, kde P_ι jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a platí, že ke každým dvěma $P_1 \neq P_k$ existuje konečná posloupnost $P_1, P_2, \ldots, P_k$ taková, že $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i < k$. Jestliže tedy $x, y \in P$ a $z \in M - P$, pak lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \in P_1$ a $y \in P_k$ (neboť případ $x, y \in P_1$ je jasný). Nechť tedy platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Podle lemmatu 4 je $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ také vložená v M a tedy podle (1) platí $y \varrho z$, čímž je ukázáno, že P je vložená v M.

Nechť nyní P je prvkem největšího zjemnění uvažovaného systému rozkladů. Pak $P = \bigcap P_\iota$, kde P_ι jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a $P \neq \emptyset$. Pak podle lemmatu 3 je P vložená v M.

Lemma 7. *Nechť $P \neq Q$ jsou lexikograficky nerozložitelné, netriviální vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M, pro něž platí $P \cap Q \neq \emptyset$. Pak platí* $\operatorname{kard} P \cap Q = 1$, $\operatorname{kard} P = \operatorname{kard} Q = 2$ *a část. usp. podmnožiny $P, Q, P \cup Q$ jsou současně buď řetězce nebo množiny nesrovnatelných prvků.*

Důkaz. Podle lemmatu 3 je $P \cap Q$ vložená v M a podle lemmatu 1 je vložená také v P. Podle předpokladu však P je lexikograficky nerozložitelná, takže podle věty 2 musí $P \cap Q$ být triviální vložená v P. To znamená buď $P \cap Q = P$, ale pak $P \subset Q$ a podle lemmatu 1 je P netriviální vložená v Q, což je vzhledem k větě 2 a k daným předpokladům spor, nebo zbývá $\operatorname{kard} P \cap Q = 1$. Lze tedy označit $P = P' \cup \{u\}$, $Q = Q' \cup \{u\}$ a z předešlé úvahy plyne $P' \neq \emptyset \neq Q'$ a také $P' \cap Q' = \emptyset$. Podle lemmatu 5 je $P' = P - Q$ vložená v M a podle lemmatu 1 je vložena také v P, při čemž $P' \neq P$, takže podle věty 2 musí být $\operatorname{kard} P' = 1$ a proto $\operatorname{kard} P = 2$. Stejně se ukáže, že $\operatorname{kard} Q = 2$.

Konečně poslední tvrzení plyne ihned z předchozího a z (5) v lemmatu 5.

Lemma 8. *Řetězec i množina nesrovnatelných prvků jsou lexikograficky nerozložitelné část. usp. množiny právě tehdy, když obsahují nejvýše dva prvky.*

Důkaz. Dostatečnost uvedené podmínky plyne přímo z (3). Dokážeme její nutnost. Nechť tedy P je řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a nechť $\operatorname{kard} P > 2$. Pak zřejmě existuje takový rozklad $\overline{P}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v P, pro nějž platí $\operatorname{kard} \overline{P} = 2$ a tedy existuje $Q \in \overline{P}$ taková, že $\operatorname{kard} Q > 1$ a ovšem $Q \neq P$. Tedy Q je netriviální vložená část. usp. podmnožina v P a proto podle věty 2 není P lexikograficky nerozložitelná.

Uvažujme nyní všechny možné rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny dané část. usp. množiny. Především platí, že jimi určené faktorové část. usp. množiny nemusí být isomorfní. Jako příklad stačí zvolit dvouprvkovou část. usp. množinu a uvažovat faktorové část. usp. množiny definované na největším a nejmenším rozkladu. Jednotlivé z uvažovaných rozkladů nemají tedy žádné významné postavení a je proto přirozené vyšetřovat jejich nejmenší zákryt (viz [2], str. 16—17). Platí

Věta 4. *Nejmenší zákryt systému všech rozkladů ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M je rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny, o nichž platí, že jsou to buď lexikograficky nerozložitelné část. usp. množiny nebo řetězce nebo množiny navzájem nesrovnatelných prvků. Jsou-li to řetězce, pak jsou buď konečné nebo mají některý z ordinálních typů ω, ω^*, $\omega^* + \omega$.*

Důkaz. Především podle lemmatu 6 je nejmenší zákryt uvažovaného systému zase rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny v M. Označme jej $\overline{M}$ a nechť $P \in \overline{M}$. Je-li P prvkem některého rozkladu z uvažovaného systému, je P lexikograficky nerozložitelná. Není-li P prvkem žádného z uvažovaných rozkladů, je $P = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$, kde P_ι jsou lexikograficky nerozložitelné a vložené v M. Pro P_ι dále platí $P_\iota \neq P$ pro každý $\iota \in I$. Odtud a z konstrukce nejmenšího zákrytu (viz [2]) plyne, že existují alespoň dvě $P_\iota, P_\varkappa$ takové, že kard P_ι, kard $P_\varkappa > 1$. Podle věty 2 to znamená, že P není lexikograficky nerozložitelná a předpokládejme, že není ani řetězcem, tj. že existují $x, y \in P$, pro něž platí $x \parallel y$. Pak z konstrukce nejmenšího zákrytu plyne existence konečné posloupnosti P_i, $1 \leqq i \leqq k$ takové, že $x \in P_1$, $y \in P_k$, $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P_i > 1$ pro každé i. Nyní se indukcí podle lemmatu 7 dokáže, že P_i, $1 \leqq i \leqq k$ je dvouprvková množina nesrovnatelných prvků. Nechť nyní P_ι je libovolná, pro niž platí kard $P_\iota > 1$. Pak zase existuje konečná posloupnost P'_i, $1 \leqq i \leqq n$ taková, že $P'_1 = P_1$, $P'_n = P_\iota$, $P'_i \cap P'_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P'_i > 1$ pro každé i, takže zase indukcí z lemmatu 7 plyne, že P_ι je množina nesrovnatelných prvků. Nechť konečně $u, v \in P$, $u \neq v$. Pak buď existuje P_ι taková, že $u, v \in P_\iota$ a tedy $u \parallel v$, nebo $u \in P_\iota$, $v \in P_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$, a jako shora se ukáže, že zase $u \parallel v$. Tedy P je množinou nesrovnatelných prvků.

Nechť nyní P je řetězec, který je prvkem nejmenšího zákrytu uvažovaného systému rozkladů. Jestliže P není konečný ani nemá žádný z uvedených ordinálních typů, existují prvky $a, b \in P$ takové, že množina všech prvků, které leží mezi a a b je nekonečná. Podobně jako v předešlé části důkazu se ukáže, že existuje konečná posloupnost část. usp. podmnožin P_i, $1 \leqq i \leqq k$ taková, že $a \in P_1$, $b \in P_k$, $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P_i > 1$ pro každé i. Při tom P_i jsou vložené a lexikograficky nerozložitelné. Z lemmatu 7 zase plyne, že P_i jsou dvouprvkové řetězce, takže $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ je konečná množina. Avšak podle lemmatu 4 je $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v P, takže vzhledem k předpokladům a podle lemmatu 2 musí být $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ nekonečná a to je spor.

Věta 5. *Nejmenší zákryt systému všech rozkladů ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny dané část. usp. množiny M je rozkladem ve vložené a lexikograficky nerozložitelné podmnožiny právě tehdy, když každá vložená* *množina nesrovnatelných prvků v M má mohutnost nejvýše 2 a když žádný vložený řetězec v M neobsahuje tři prvky x, y, z takové, že x pokrývá y a y pokrývá z.*

Důkaz. Je-li uvedená podmínka splněna, pak každý vložený řetězec, který je buď konečný nebo má některý z ordinálních typů ω, ω^*, $\omega^* + \omega$, obsahuje nejvýše dva prvky, takže podle lemmatu 8 je lexikograficky nerozložitelný. Avšak také každá vložená množina nesrovnatelných prvků obsahující nejvýše dva prvky je podle lemmatu 8 lexikograficky nerozložitelná a tedy podle věty 4 je nejmenší zákryt uvažovaného systému rozkladů rozkladem ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny.

Jestliže uvedená podmínka není splněna, pak buď v M existuje vložený řetězec P a v něm prvky x, y, z takové, že x pokrývá y a y pokrývá z, nebo v M existuje vložená množina nesrovnatelných prvků P, která obsahuje alespoň tři prvky $x \neq y \neq z \neq x$. V obojím případě existují rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny, z nichž jeden obsahuje jako prvek podmnožinu $\{x, y\}$ a druhý podmnožinu $\{y, z\}$, takže nejmenší zákryt uvažovaného systému musí obsahovat prvek $Q \supset \{x, y, z\}$. Podle lemmatu 1 je podmnožina $\{x, y\} \neq Q$ vložená v Q a netriviální, takže podle věty 2 Q není lexikograficky nerozložitelná.

Není-li část. usp. množina lexikograficky nerozložitelná, pak podle věty 2 existují kromě nejmenšího a největšího rozkladu ještě další rozklady ve vložené část. usp. podmnožiny, avšak kromě nejmenšího rozkladu nemusí existovat žádný další rozklad ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny. Jako příklad uveďme řetězec, který má ordinální typ η nebo λ.[1]) Především tento řetězec není lexikograficky nerozložitelný a dokonce ani lexikograficky skoronerozložitelný, neboť jej lze vyjádřit ve tvaru $\sum_{N} M_x$, kde N má ordinální typ $\omega^* + \omega$ a M_x má ordinální typ $\eta + 1$ pro každý $x \in N$. Dále však platí, že každá část. usp. podmnožina vložená v řetězci musí být zase řetězcem. Má-li tedy vložený řetězec v daném řetězci být lexikograficky nerozložitelným, musí podle lemmatu 8 obsahovat nejvýše dva prvky. Kdyby však obsahoval dva prvky, obsahoval by podle lemmatu 2 nekonečně mnoho prvků, takže zbývá, aby obsahoval právě jediný prvek.

Uvažujme nyní o lexikograficky nerozložitelných faktorových část. usp. množinách na dané část. usp. množině.

Vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny splňují podmínku, že každá jejich vlastní vložená část. usp. podmnožina je jednoprvková, tedy triviální. V tomto smyslu lze říci, že vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny jsou *minimálními* vloženými část. usp. podmnožinami. Nazvěme nyní obdobně část. usp. podmnožinu P vloženou v část. usp. množině M *maximální vloženou* v M, jestliže platí

$$P \neq M \text{ a } Q \text{ je vložená v } M,\ Q \neq P \subset Q \Rightarrow Q, M \text{ splynou.} \qquad (6)$$

[1]) η příp. λ značí ordinální typ množiny všech racionálních příp. reálných čísel uspořádaných podle velikosti.

V část. usp. množině nemusí obecně existovat vůbec žádná maximální vložená část. usp. podmnožina. Na příklad v řetězci, který nemá ani největší ani nejmenší prvek, neexistuje žádná maximální vložená.

Lemma 9. *Jsou-li $P \neq Q$ maximální vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M a platí-li $P \cap Q \neq \emptyset$, pak $P \cup Q = M$.*

Důkaz. Především platí $P \neq P \cup Q$. Podle lemmatu 4 však $P \cup Q$ je vložená v M a ovšem $P \subset P \cup Q$, takže podle (6) musí být $P \cup Q = M$.

Lemma 10. *Je-li $\overline{\overline{M}}$ faktorová část. usp. množina na $\overline{M}$ a $\overline{M}$ faktorová část. usp. množina na M, pak existuje faktorová část. usp. množina $\overline{M}_1$ na část. usp. množině M, která je isomorfní s $\overline{\overline{M}}$.*

Důkaz. Každý prvek $\mathfrak{A}_x \in \overline{\overline{M}}$ je množinou prvků $P_\iota \in \overline{M}$ pro $\iota \in I_x$, kde $P_\iota \subset M$. Uvažujme množinu všech $A_x = \bigcup_{\iota \in I_x} P_\iota \subset M$. Z (1) a (2) ihned plyne, že tato množina je jistým rozkladem $\overline{M}_1$ ve vložené část. usp. podmnožiny v M a že přiřazení prvků $A_x \in \overline{M}_1$, $\mathfrak{A}_x \in \overline{\overline{M}}$ je isomorfismem mezi faktorovou část. usp. množinou $\overline{M}_1$ a $\overline{\overline{M}}$.

Věta 6. *Existují-li na část. usp. množině M alespoň dvě různé maximální vložené část. usp. podmnožiny, jsou ekvivalentní tvrzení:*

a) *Existují maximální vložené část. usp. podmnožiny $P \neq Q$, pro něž platí $P \cap Q \neq \emptyset$.*

b) *Existuje faktorová část. usp. množina na M, která je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a která není lexikograficky nerozložitelná.*

c) *Existuje tříprvková faktorová část. usp. množina na M, která je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků.*

d) *Pro každé dvě maximální vložené část. usp. podmnožiny P, Q platí $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Důkaz. a) $\Rightarrow$ b) Platí-li a), pak platí také $P - Q \neq \emptyset \neq Q - P$ a podle lemmatu 9 je $P \cup Q = M$. Podle lemmat 3 a 5 však je $\overline{M} = \{P - Q, P \cap Q, Q - P\}$ tříprvková faktorová část. usp. množina na M, která podle (5) je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a podle lemmatu 8 $\overline{M}$ není lexikograficky nerozložitelná.

b) $\Rightarrow$ c) Platí-li b) a je-li $\overline{M}$ příslušná faktorová část. usp. množina na M, pak podle lemmatu 8 platí kard $\overline{M} > 2$ a tedy na $\overline{M}$ existuje tříprvková faktorová část. usp. množina $\overline{\overline{M}}$, která ovšem zase je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků. Avšak z lemmatu 10 plyne, že existuje faktorová část. usp. množina na M, která je isomorfní s $\overline{\overline{M}}$.

c) $\Rightarrow$ d) Nechť platí c) a nechť $\overline{M} = \{X, Y, Z\}$ je příslušná faktorová část. usp. množina. Nechť nejdříve $\overline{M}$ je řetězcem a nechť pro určitost platí $X <$

$< Y < Z$, takže podle (1) část. usp. podmnožiny $X \cup Y$, $Y \cup Z$ jsou netriviální vložené v M. Je-li R libovolná maximální vložená část. usp. podmnožina v M, pak platí buď $R = X \cup Y$ nebo $R = Y \cup Z$ nebo R non $\subset X \cup Y$, R non $\subset Y \cup Z$ čili $R \cap X \neq \emptyset \neq R \cap Z$. V posledním případě však podle (5) z lemmatu 5 a podle lemmatu 2 musí být $Y \subset R$. V každém případě tedy platí $Y \subset R$ a proto zejména platí $P \cap Q \neq \emptyset$. Nechť nyní $\overline{M}$ je množinou nesrovnatelných prvků. Pak podle (1) část. usp. podmnožiny $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $Z \cup X$ jsou netriviální vložené v M. Je-li R libovolná maximální vložená část. usp. podmnožina v M, pak buď R splyne s některou z množin $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $Z \cup X$ nebo platí, že R není částí žádné z nich, tj. platí $R \cap X \neq \emptyset \neq R \cap Y$, $R \cap Z \neq \emptyset$. V posledním případě předpokládejme, že alespoň dvě z množin X, Y, Z nejsou částí R, na příklad X non $\subset R$, Y non $\subset R$. Pak platí $R \neq R \cup X \neq M$, takže podle lemmatu 4 je $R \cup X$ netriviální vložená v M, což je spor vzhledem k (6). Tedy v každém případě obsahuje R alespoň dvě z množin X, Y, Z, což zejména znamená, že $P \cap Q \neq \emptyset$.

d) $\Rightarrow$ a) Vzhledem k předpokladu věty je tato implikace zřejmá.

Věta 7. *Jestliže na část. usp. množině M existuje tříprvková faktorová část. usp. množina, která je řetězcem, pak existují nejvýše dvě maximální vložené část. usp. podmnožiny v M.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují alespoň tři P, Q, R navzájem různé. Podle věty 6 lze předpokládat, že $P \cap Q \neq \emptyset$. Pak podle lemmatu 9 platí $P \cup Q = M$ a podle lemmat 3 a 5 je faktorová část. usp. množina $\overline{M} = \{P - Q, P \cap Q, Q - P\}$ řetězcem (neboť kdyby byla množinou nesrovnatelných prvků, neexistovala by na ní faktorová část. usp. množina, která je řetězcem a má více než jeden prvek). Pro R musí platit R non $\subset P$, R non $\subset Q$ čili $R \cap (P - Q) \neq \emptyset \neq R \cap (Q - P)$ a podle (5) z lemmatu 5 a podle lemmatu 2 musí být $P \cap Q \subset R$. Jelikož však $Q \neq R$, existuje $x \in Q - R \subset Q - P$, takže $P \cup R \neq M$, což je spor vzhledem k lemmatu 9.

Věta 8. *Nechť na část. usp. množině M existuje rozklad $\overline{M}$ v maximální vložené část. usp. podmnožiny. Pak faktorová část. usp. množina $\overline{M}$ je lexikograficky nerozložitelná.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\overline{M}$ není lexikograficky nerozložitelná. Pak podle věty 2 existuje netriviální vložená část. usp. podmnožina $\mathfrak{A}$ v $\overline{M}$ a nechť $\mathfrak{A} = \underset{P_\iota}{\mathrm{E}}\{P_\iota \subset M, \iota \in I\}$. Pak podle (1) a (2) je $P = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$ netriviální vložená v M a při tom existuje $P_\iota \subset P$, $P_\iota \neq P$ a to je spor.

Uveďme nyní příklady lexikograficky nerozložitelných část. usp. množin. Především je každá jednoprvková a dvouprvková část. usp. množina lexikograficky nerozložitelná. Dále neexistuje tříprvková část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná, ale pro každé $n > 3$ existuje n-prvková část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná a má délku 2.

Na obr. 1 (str. 20) jsou Hasseovy diagramy některých konečných lexikograficky nerozložitelných část. usp. množin.

Na závěr uvedeme ještě jednu větu o lexikografickém součtu. Platí

Věta 9. *Platí*

$$\sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u \equiv \sum_N (\sum_{N_v} M_u) . \tag{7}$$

Důkaz. Především je zřejmé, že obě množiny na levé i na pravé straně v (7) jsou stejné, takže je třeba jen ukázat, že také příslušná částečná uspořádání jsou stejná.

Nechť tedy $x, y \in \sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u$, $x \neq y$ a nechť platí $x \varrho y$ v $\sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u$, když ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Potom existují $a, b \in \sum_N N_v$ takové, že $x \in M_a$, $y \in M_b$, a také existují $p, q \in N$ takové, že $a \in N_p$, $b \in N_q$, takže platí $x \in \sum_{N_p} M_u$, $y \in \sum_{N_q} M_u$. Je-li $a = b$, pak podle definice lexikografického součtu platí $x \varrho y$ v M_a a tedy také v $\sum_{N_p} M_u$ a v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$. Je-li $a \neq b$, pak podle definice lexikografického součtu platí $a \varrho b$ v $\sum_N N_v$ a jsou zase dvě možnosti. Buď je $p = q$ a ovšem N_p je vložená v $\sum_N N_v$, takže podle definice lexikografického součtu platí $a \varrho b$ v N_p, odkud však plyne $x \varrho y$ v $\sum_{N_p} M_u$ a tedy také v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$. Nebo je $p \neq q$ a potom musí být $p \varrho q$ v N. Jelikož však $x \in \sum_{N_p} M_u$, $y \in \sum_{N_q} M_u$, platí také $x \varrho y$ v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff*: Теория структур (ruský překlad 2. vyd.), Moskva 1952.

[2] *O. Borůvka:* Theorie rozkladů v množině, Spisy přír. fak. M. U., čís. *278* (1946), Brno 3—37.

Резюме

О ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ СУММЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 11/XI 1957 г.)

Частично упорядоченное (коротко част. упор.) подмножество $P \neq \emptyset$ част. упор. множества M мы называем *вложенным* в M, если имеет место

$$\{x, y \in P, z \in M - P\} \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ и } \{z < x \Leftrightarrow z < y\} .$$

На каждом разложении $\overline{M}$ на част. упор. множестве M (если каждый элемент разложения является част. упор. подмножеством, вложенным в M) можно определить частичное упорядочение следующим образом:

$$P, Q \in \overline{M}, P \neq Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \quad \text{если} \quad x \in P, y \in Q\}.$$

Соответствующее част. упор. множество $\overline{M}$ мы называем *факторным* част. упор. множеством част. упор. множества M.

Тогда можно утверждать, что част. упор. множество M является *лексикографической суммой* системы част. упор. множеств $M_u \neq \emptyset$, $u \in N$ по част. упор. множеству $N \neq \emptyset$, т. е. $M \equiv \sum_N M_u$ тогда и только тогда, если M_u вложено в M для любого $u \in N$, и N изоморфно факторному част. упор. множеству, определенному на разложении на вложенные подмножества M_u.

Мы скажем, что част. упор. множество M *лексикографически неразложимо*, соотв. *почти неразложимо*, если оно удовлетворяет условию

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{ или } \operatorname{kard} M_x = 1 \text{ для любого } x \in N \text{ или } \operatorname{kard} N = 1,$$

соотв.

$$M \equiv \sum M_x \Rightarrow \text{ или существует } M_x, \text{ изоморфное } M, \text{ или } N \text{ изоморфно } M.$$

Далеко не всякое част. упор. множество можно представить в виде $M \equiv \sum_N M_x$ так, чтобы все N и M_x были для любого $x \in N$ лексикографически неразложимыми или лишь почти неразложимыми част. упор. множествами.

Далее исследуются свойства вложенных част. упор. подмножеств, свойства разложений на вложенные и лексикографически неразложимые част. упор. подмножества и факторные част. упор. множества, являющиеся лексикографически неразложимыми, на данном част. упор. множестве. При этом част. упор. подмножество P, вложенное в M, называется *максимальным вложенным*, если имеет место

$$P \neq M \text{ и } Q \text{ вложено в } M, \; Q \neq P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M.$$

Zusammenfassung

ÜBER DIE LEXIKOGRAPHISCHE SUMME DER TEILWEISE GEORDNETEN MENGEN

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingegangen am 11. November 1957)

Eine teilweise geordnete (t. g.) Teilmenge $P \neq \emptyset$ der t. g. Menge M heisst *eingelegte* t. g. Menge in M, wenn folgende Bedingung

$$x, y \in P, \; z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ und } \{z < x \Leftrightarrow z < y\}$$

erfüllt ist. Auf jeder Zerlegung $\overline{M}$ in die eingelegten t. g. Teilmengen in der t. g. Menge M ist es möglich eine teilweise Anordnung folgendermassen zu definieren:

$$P, Q \in \overline{M},\ P \not\equiv Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \text{ wo } x \in P,\ y \in Q\}.$$

Die betreffende t. g. Menge $\overline{M}$ heisst *t. g. Faktormenge* der t. g. Menge M.

Satz 1. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann die lexikographische Summe eines Systems der t. g. Mengen $M_u \neq \emptyset$ über eine t. g. Menge $N \neq \emptyset$, d. h. $M \equiv \equiv \sum_N M_u$, wenn M_u eine eingelegte t. g. Teilmenge in M für jedes $u \in N$ ist und wenn N zu einer auf der Zerlegung in die eingelegten Teilmengen M_u definierten t. g. Faktormenge isomorph ist.*

Wir sagen, dass eine t. g. Menge M *lexikographisch unzerlegbar* bzw. *fastunzerlegbar* ist, wenn sie folgende Bedingung

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder } \operatorname{kard} M_u = 1 \textit{ für alle } u \in N \textit{ oder } \operatorname{kard} N = 1,$$

bzw.

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder gibt es } M_u\textit{, die isomorph zu } M \textit{ oder } N \textit{ isomorph zu } M \textit{ ist,}$$

erfüllt.

Satz 2. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann lexikographisch unzerlegbar, wenn auf M höchstens zwei t. g. Faktormengen existieren.*

Nicht jede t. g. Menge M lässt sich in der Form $M \equiv \sum_N M_u$ in solcher Weise ausdrücken, dass N und auch M_u für jedes $u \in N$ lexikographisch unzerlegbare oder nur fastunzerlegbare t. g. Mengen sind.

Weiter werden die Grundeigenschaften der eingelegten t. g. Teilmengen untersucht. Es gelten z. B.:

Lemma 3. *Der nichtleere Durchschnitt der eingelegten t. g. Teilmengen ist wieder eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 4. *Sind P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die eingelegten t. g. Teilmengen und gilt $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 5. *Sind P, Q eingelegte t. g. Teilmengen und gilt $P \cap Q \neq \emptyset$, $P - Q \neq \neq \emptyset \neq Q - P$, so sind auch $P - Q$, $Q - P$ eingelegte t. g. Teilmengen und für $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$ gilt $x \varrho y$, $y \varrho z$, $x \varrho z$, wo ϱ eines der folgenden Symbole bedeutet: $<$, $>$, $\|$ (Unvergleichbarkeit).*

Über die Zerlegungen in eingelegte und lexikographisch unzerlegbaren t. g. Teilmengen gilt

Satz 5. *Die kleinste Überdeckung des Systems von allen Zerlegungen in eingelegten t. g. Teilmengen ist dann und nur dann eine Zerlegung von derselben Art, wenn jede eingelegte t. g. Teilmenge, in der jede zwei Elemente unvergleichbar sind, höchstens zwei Elemente enthält und wenn keine eingelegte Kette drei Elementen enthält, für die* $x > y > z$ *und* $x > a \geqq y \geqq b > z \Rightarrow a = y = b$ *gilt.*

Eine eingelegte t. g. Teilmenge P in t. g. Menge M heisst *maximal*, wenn

$$P \not\equiv M \text{ und } Q \textit{ eine eingelegte t. g. Teilmenge in } M \textit{ ist },$$
$$Q \not\equiv P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M .$$

Satz 6. *Gibt es auf einer t. g. Menge* M *mindestens zwei maximale eingelegte t. g. Teilmengen, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *Es existieren maximale eingelegte t. g. Teilmengen* $P \not\equiv Q$, *für die* $P \cap Q \neq \emptyset$ *gilt.*

b) *Es existiert eine t. g. Faktormenge auf* M, *die entweder eine Kette bildet oder nur aus Elementen, die paarweise unvergleichbar sind, besteht und die nicht lexikographisch unzerlegbar ist.*

Endlich ist klar, dass

$$\sum_{\sum_N N_v} M_u \equiv \sum_N \left(\sum_{N_v} M_u\right)$$

gelten muss.