Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

O jednom typu dobře orientovaných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 7--15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117296`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

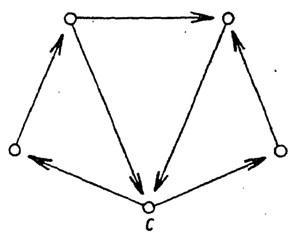
O JEDNOM TYPU DOBŘE ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 4. října 1957) DT : 519.51

Tento článek si všímá dobře orientovaných grafů, jejichž všechny cykly procházejí týmž uzlem.

O. Ore [4] a po něm F. Bäbler [1] studovali před časem neorientované eulerovské grafy, jejichž všechny kružnice procházejí týmž uzlem c. K těmto grafům dospěli modifikací klasické Eulerovy úlohy o konstrukci souvislého neorientovaného grafu jedním (uzavřeným) tahem. Ukazuje se totiž, že Oreho a Bäblerovy grafy lze charakterisovat též existencí uzlu c s touto vlastností: Vyjdeme-li z c a procházíme-li grafem, při čemž dbáme jen toho, abychom po žádné hraně nešli dvakrát, potom vždy, kdykoliv se octneme v c tak, že nemůžeme už dále, jsme prošli všechny hrany grafu. V tomto příspěvku se zabýváme analogickou problematikou pro dobře orientované grafy.[1]) Existuje-li v dobře orientovaném grafu $\vec{G}$ uzel c, který je uzlem každého cyklu grafu $\vec{G}$, pak c nazveme *centrem* grafu $\vec{G}$ (viz obr. 1). Chceme zde zejména pojednat o těch konečných neorientovaných grafech G, jejichž každý uzel lze pokládat za centrum dobře orientovaného grafu $\vec{G}$, který vznikne vhodnou volbou orientace hran grafu G. Je vidět, že k tomu účelu stačí prostudovat jen neorientované grafy bez dvojúhelníků, bez smyček a bez isolovaných uzlů.



Obr. 1

1. Než přistoupíme k jádru této práce, je užitečné připomenout několik pojmů a provést několik pomocných úvah.

Nechť x, y jsou dva různé uzly neorientovaného grafu G. Protože každý uzel grafu G náleží více než jednomu resp. právě jednomu jeho článku právě tehdy, je-li to jeho artikulace resp. není-li ([3], str. 226, věta 2), je možno zavést tako-

[1]) Graf je *dobře orientovaný*, lze-li z každého jeho uzlu dospět po dráze do každého dalšího (viz [2], [5]).

výto pojem: *Průchodem*[2]) cesty C nazveme ten její uzel u (existuje-li), který inciduje se dvěma hranami cesty C, z nichž každá patří jinému článku grafu G. Podle věty citované z D. Königa je každý průchod cesty C artikulací grafu G.

V práci [5] jsme bez důkazu uvedli (str. 197), že vlastnosti artikulací a článků je možno studovat pomocí theorie stromů.[3]) Zde nyní dokážeme tuto větu:

Lemma 1. *Budiž G souvislý neorientovaný graf s aspoň jednou artikulací. Sestrojme graf H, jehož množinu uzlů tvoří jednak všechny artikulace grafu G (uzly 1. typu), jednak uzly 2. typu, z nichž každý nahrazuje jeden článek grafu G. Hrany grafu H definujme takto: Je-li a artikulace grafu G ležící v jeho článcích $G_1, G_2, \ldots, G_r$ a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_r$ příslušné uzly z H, zaveďme hrany ag_i $(1 \leqq i \leqq r)$. Pak H je strom.*

Důkaz. Je třeba dokázat, že H a) je souvislý, b) neobsahuje žádnou kružnici.

a) Graf H má aspoň tři uzly. Buďtež x, y dva jeho různé uzly; chceme dokázat, že v H existuje cesta Γ spojující x, y.

Nechť x, y jsou oba 1. typu. Přejděme ke grafu G, v němž x, y jsou artikulacemi, tedy představují dvojici různých uzlů. Z předpokladu souvislosti grafu G plyne existence cesty C v G spojující uzly x, y. Podle jedné věty dokázané Königem ([3], str. 229, věta 10) mají všechny takto definované cesty C tuto vlastnost: buď nemají žádný průchod nebo všechny mají tytéž průchody (po řadě) $a_1, a_2, \ldots, a_s$ $(s \geqq 1)$. V prvním případě patří oba uzly x, y témuž článku grafu G (plyne z [3], str. 228, věta 8) a žádaná cesta Γ v grafu H má dvě hrany. V druhém případě položme ještě $x = a_0$, $y = a_{s+1}$. Artikulace a_i, a_{i+1} omezují na C cestu C_i $(0 \leqq i \leqq s)$, při čemž z definice průchodu plyne, že C_i leží celá v jednom článku G'_i grafu G. Stačí nyní nahradit každé G'_i uzlem g'_i a snadno už odtud plyne existence cesty Γ v H.

Jsou-li x, y oba 2. typu, označme X, Y dva různé články grafu G, jímž x, y odpovídají. Mají-li X, Y společný uzel, je to jejich jediný společný uzel ([3], str. 228, věta 7), tedy je to artikulace ([3], str. 226, věta 2) a věc je zřejmá. Jsou-li X, Y disjunktní, zvolme v X uzel ξ a v Y uzel η. Volbu lze zařídit tak, že ξ, η jsou (dvě různé) artikulace grafu G. Protože v H lze ξ, η už (podle předcházejícího) spojit cestou Γ', existuje i žádaná cesta Γ pro dvojici x, y.

Analogicky lze uvažovat i v případě, je-li z uzlů x, y každý jiného typu. Tím je souvislost grafu H dokázána.

b) Nechť nyní v grafu H existují kružnice; zvolme jednu z těch, které mají minimální počet hran, a označme ji O. Má sudý počet uzlů, a to více než 4.[4])

---

[2]) D. König ([3], str. 228) užívá pro průchod cesty názvu „Durchgangsartikulation".

[3]) Tam jsme též upozornili (v pozn. [4])), že Königem popsaná interpretace grafu G je nesprávná.

[4]) Případ dvou uzlů je vyloučen podle definice grafu H, případ 4 uzlů odporuje větě 7, [3], str. 228.

Označme tyto uzly po řadě

$$\bar{a}_1, \bar{g}_1, \bar{a}_2, \bar{g}_2, \ldots, \bar{a}_r, \bar{g}_r, \bar{a}_1 . \tag{1}$$

Přejděme ke grafu G; v něm ať uzlům $\bar{g}_i$ odpovídají články G_i, při čemž uzly $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ jsou artikulace ležící v článku G_i ($i = 1, 2, \ldots, r$, $\bar{a}_{r+1} = \bar{a}_1$). Uzly $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ lze spojit v G cestou $\bar{C}_i$, jejíž všechny hrany leží v G_i. V posloupnosti cest $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \ldots, \bar{C}_{r-1}$ vždy jedna má svůj počáteční uzel společný s koncovým uzlem předcházející, jinak však žádné dvě zde nemají žádný uzel společný.[5]) Uzly $\bar{a}_r$, $\bar{a}_1$ grafu G lze tedy spojit jednak cestou $\bar{C}_r$ bez průchodů, jednak cestou (složenou z $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{r-1}$) s průchody $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_{r-1}$; to však je spor s citovanou už větou ([3], str. 229, věta 10). Důkaz je podán.

Nechť x, y jsou dva různé uzly aspoň 3. stupně v neorientovaném grafu G a nechť existuje cesta Z spojující x, y. Skládá-li se Z buď z jediné hrany nebo jsou-li všechny vnitřní uzly cesty Z druhého stupně v G, pak Z nazveme *žebrem* grafu G.[6]) Uzly x, y jsou *koncové* uzly žebra Z. Slovním obratem „odstranit žebro Z z grafu G" popisujeme v dalších úvahách konstrukci podgrafu grafu G, který vznikne z G tak, že vynecháme všechny hrany žebra Z a všechny jeho uzly až na uzly koncové. Je-li graf G kružnice, pak v něm nelze najít žádné žebro; v každém jiném grafu bez artikulací však zřejmě lze najít aspoň tři různá žebra.[7])

Jestliže nazveme koncovým článkem souvislého grafu G ten jeho článek, v němž leží jediná artikulace grafu G, pak z lemmatu 1 (a z věty 4, [3], str. 49) plyne, že každý souvislý graf s aspoň jednou artikulací má aspoň dva koncové články. Souvislý neorientovaný graf, který má právě dva koncové články, nazveme *řetězcem*. Řetězci odpovídá (podle lemmatu 1) strom, který má dva uzly koncové, zatím co ostatní jeho uzly jsou 2. stupně. Leží tedy každá artikulace řetězce právě ve dvou jeho článcích a každý článek řetězce, který proň není koncový, obsahuje právě dvě artikulace řetězce. Dokážeme nyní větu:

Lemma 2. *Budiž G souvislý neorientovaný graf bez artikulací a Z budiž jeho žebro. Označme G^* podgraf grafu G, který vznikne odstraněním žebra Z. Pak G^* je buď souvislý graf bez artikulací nebo řetězec (při čemž koncové uzly žebra Z leží každý v jednom koncovém článku, nesplývají však s artikulací).*

Důkaz. Nejprve dokážeme souvislost grafu G^*. Předpokládejme naopak, že v G^* existují dva uzly v, w, které v G^* nelze spojit žádnou cestou. V grafu G

[5]) Vzhledem k minimalitě kružnice O neexistuje totiž v posloupnosti (1) žádný uzel $\bar{a}_i$ spojený s jiným nesousedním uzlem této posloupnosti. Neexistuje však ani uzel $u \in H$ ležící mimo (1), z něhož by šly dvě hrany ke dvěma různým uzlům z (1). To tedy vylučuje, aby na některé cestě $\bar{C}_i$ ležela jiná artikulace než $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ a také aby cesta $\bar{C}_i$ měla jistý uzel společný s některým „nesousedním" článkem.

[6]) Srovnej pojem *suspended chain* v práci [6], str. 340.

[7]) Mezi souvislými grafy bez artikulací je kružnice charakterisována vztahem $\mu = 1$, kde μ je index souvislost grafu (viz [6], str. 344, věta 10). Při tom rozumíme *indexem souvislosti* souvislého grafu G číslo $\mu = h - u + 1$, kde h (resp. u) je počet hran (resp. uzlů) grafu G.

spojuje v, w cesta, jejíž částí je tedy žebro Z. Každá hrana žebra Z je proto mostem v G, každý uzel žebra je tedy artikulací ([3], str. 224_{15}), což je spor.

Nechť nyní graf G^* má artikulace. Budiž G_1^* jeden jeho koncový článek s artikulací a_1^*. Uzel a_1^* nechť inciduje s dvěma různými hranami h, h' grafu G^*, které neleží v žádné kružnici grafu G^*; při tom nechť h je hranou článku G_1^*. V grafu G lze však najít kružnici, v níž h, h' leží; její částí je proto žebro Z. Jeden koncový uzel žebra Z splývá tedy s jedním uzlem článku G_1^* různým od a_1^*. Protože Z má dva koncové uzly, plyne odtud, že G^* má dva koncové články. Důkaz je podán.

Lemma 3. *Budiž G neorientovaný souvislý graf bez artikulací, jehož index souvislosti*[8]) *je $\mu > 1$. Pak existuje žebro Z takové, že platí: Odstraníme-li z G žebro Z, vznikne souvislý graf, který je rovněž bez artikulací a má index souvislosti $\mu - 1$.*

Důkaz lze najít v [6], str. 349, věta 18.

Žebro, o jehož existenci mluví lemma 3, nazveme *regulárním*. Existují grafy (bez artikulací) s uzlem x takovým, že žádné z žeber incidujících s uzlem x není regulární.[9])

2. Připomeňme několik potřebných pojmů z theorie orientovaných grafů. *Pramenem* (resp. *protipramenem*) orientovaného grafu $\vec{G}$ rozumíme ten jeho uzel, který není počáteční (resp. koncový) pro žádnou hranu z $\vec{G}$. Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li žádný cyklus (viz [2], [5]). Dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Nechť G je souvislý neorientovaný graf bez artikulací; nechť p, q jsou libovolné dva různé uzly z G. Pak lze volit orientaci hran z G tak, že vznikne acyklický graf $\vec{G}$ s jediným pramenem (uzlem p) a jediným protipramenem (uzlem q).*

Důkaz. Má-li G jen uzly p, q (a hranu $\overline{pq}$), je věc zřejmá. Nechť nyní G má kromě p, q ještě další uzly. Protože to není strom, je podle věty 14, [3], str. 54 jeho index souvislosti $\mu \geqq 1$. Důkaz nyní podáme indukcí podle μ.

Případ $\mu = 1$ znamená, že G je kružnice ([6], str. 344, věta 10). Tu rozdělují uzly p, q na dvě cesty, při čemž každou z nich lze orientovat jako dráhu vedoucí z p do q; žádaná konstrukce je provedena.

Budiž dále $\mu > 1$ a nechť tvrzení platí pro grafy, které mají index souvislosti nejvýše $\mu - 1$. Nechť G má index souvislosti μ. Podle lemmatu 3 lze v G najít regulární žebro Z s koncovými uzly x, y takové, že po jeho odstranění vznikne souvislý graf G' bez artikulací s indexem souvislosti $\mu - 1$.

a) Nechť uzly p, q leží na žebru Z (např. v pořadí x, p, q, y, při čemž ovšem připouštíme buď $x = p$ nebo $q = y$). Pak G' lze podle indukčního předpokladu

[8]) Definici indexu souvislosti jsme uvedli v pozn. [7]).

[9]) Příkladem může být graf, který (v jiné souvislosti) uvádí König [3], str. 28, obr. 14.

orientovat tak, že vznikne acyklický graf ${}_1\vec{G}'$ s jediným pramenem x a jediným protipramenem y. Doplňme nyní ${}_1\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným tak, že cestu mezi p, q orientujeme jako dráhu počínající v p a končící v q (dráha D_1), cestu mezi p, x[10]) jako dráhu D_2 a cestu mezi y, q[10]) jako dráhu D_3 (vždy v naznačeném pořadí uzlů). Vznikne tak orientovaný graf $\vec{G}$, který má jediný pramen p a jediný protipramen q. Graf $\vec{G}$ je acyklický: Kdyby v něm totiž existoval cyklus Ω_1, pak (zorientované) žebro Z by bylo částí Ω_1. Protože x je pramenem v ${}_1\vec{G}'$, muselo by Z být orientováno jako dráha vedoucí z y do x (spor s existencí dráhy D_1).

b) Nechť žádný z uzlů p, q neleží na žebru Z. Pak p, q jsou uzly grafu G', který lze podle indukčního předpokladu orientovat tak, že vznikne acyklický graf ${}_2\vec{G}'$ s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. V práci [5] bylo dokázáno (str. 209, věta 12), že orientovaný graf $\vec{A}$ o n uzlech je acyklický právě tehdy, lze-li jeho uzly očíslovat čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že z existence hrany $\vec{ij}$ v $\vec{A}$ plyne $i < j$. Očíslujme tak tedy uzly acyklického grafu ${}_2\vec{G}'$, při čemž nechť uzel x (resp. y) grafu ${}_2\vec{G}'$ dostane číslo i_0 (resp. j_0) a nechť $i_0 < j_0$. Doplňme nyní ${}_2\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným jako dráha D_4 s počátečním uzlem x a koncovým y. Vznikne tak orientovaný graf $\vec{G}$, který má jediný pramen p a jediný protipramen q. Abychom nahlédli, že $\vec{G}$ je acyklický, předpokládejme existenci cyklu Ω_2 v $\vec{G}$. Pak částí Ω_2 je dráha D_4. Musí tedy v ${}_2\vec{G}'$ existovat dráha vedoucí z y do x; uzly této dráhy nechť mají při sestrojeném už očíslování uzlů grafu ${}_2\vec{G}'$ po řadě čísla $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, kde $j_0 = k_1$, $i_0 = k_r$. Odtud plyne spor $j_0 < i_0$.

c) Nechť uzel p leží na žebru Z a q nikoliv. Označení budiž tak voleno, že $p \neq y$. Orientujme G' tak, že vznikne acyklický graf ${}_3\vec{G}'$ s jediným pramenem x a jediným protipramenem q. Doplňme nyní ${}_3\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným takto: Cestu mezi p a y orientujme jako dráhu D_5 vedoucí z p do y, zatím co cestu mezi p, x jako dráhu D_6 vedoucí z p do x. O vzniklém grafu $\vec{G}$ se opět snadno přesvědčíme, že je acyklický s jediným pramenem p a jediným protipramenem q.

d) Nechť p neleží na žebru Z, zatím co q ano. Orientujme G tak, že vznikne acyklický graf $\overleftarrow{G}$ s jediným pramenem q a jediným protipramenem p (odst. c)) a změňme orientaci u všech hran grafu $\overleftarrow{G}$. Vznikne graf $\vec{G}$ žádaných vlastností. Důkaz je podán.

Souvislý orientovaný graf s jediným pramenem byl v práci [2] nazván *W-grafem*. Věta 1 tedy mluví o jistém druhu acyklických W-grafů, totiž o takových acyklických W-grafech, z nichž změnou orientace všech hran dostaneme opět acyklický W-graf. Předpoklad o artikulaci je v ní podstatný. Obsahuje-li totiž souvislý neorientovaný graf G artikulaci, pak v něm nelze libovolně volit dva různé uzly p, q tak, aby vhodnou volbou orientace se G dal převést na

[10]) Má-li ovšem nějaké hrany.

acyklický graf s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. Graf G má totiž aspoň dva koncové články, při čemž lze dokázat větu:

Lemma 4. *Budiž $\vec{A}$ acyklický W-graf s pramenem p; budiž $\vec{A}_k$ jeden jeho koncový článek. Jestliže p neleží v $\vec{A}_k$, pak $\vec{A}_k$ obsahuje aspoň jeden protipramen grafu $\vec{A}$.*

Důkaz. Budiž a_k (jediná) artikulace grafu $\vec{A}$ ležící v $\vec{A}_k$. Článek $\vec{A}_k$ představuje acyklický graf, existuje v něm tedy pramen p_k i protipramen q_k. Neleží-li p v $\vec{A}_k$, pak je $a_k = p_k$. Existuje tedy protipramen $q_k \neq a_k$ článku $\vec{A}_k$ a ten je též protipramenem grafu $\vec{A}_k$.

3. Acyklickým grafům jsme zde věnovali pozornost proto, že zřejmě platí toto tvrzení: Odstraníme-li z dobře orientovaného grafu s centrem c všechny hrany, které počínají v uzlu c, dostaneme acyklický graf.[11]) Než přistoupíme ke studiu dobře orientovaných grafů s centrem, dokážeme ještě jednu pomocnou větu.

Lemma 5. *Budiž $\vec{A}$ acyklický graf s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. Spojme uzly p, q novou drahou B počínající v q a končící v p, která má s grafem $\vec{A}$ společné právě jen uzly p, q. Vznikne graf $\vec{D}$, který je dobře orientovaný.*

Důkaz. Předně lze konstatovat, že pro každý uzel x grafu $\vec{A}$ $(x \neq q)$ existuje dráha vedoucí z x do q. Kdyby totiž taková dráha pro některý uzel $x \neq q$ neexistovala, očíslujme uzly grafu $\vec{A}$ (podobně, jak jsme to provedli v důkazu věty 1, bod b)) a vyhledejme uzel $x_{\max}$ s maximálním číslem, pro nějž tato dráha neexistuje. Protože $x_{\max}$ není protipramenem grafu $\vec{A}$, vychází z něho hrana do uzlu x', který je tedy očíslován číslem větším než uzel $x_{\max}$. Z uzlu x' už existuje dráha do q, tedy z uzlu $x_{\max}$ také vede dráha do q (spor). Podobně nahlédneme, že pro každý uzel y grafu $\vec{A}$ $(y \neq p)$ existuje dráha vedoucí z p do y.[12])

Zvolme nyní v $\vec{D}$ dva různé uzly x, y.

a) Leží-li x, y oba v $\vec{A}$, sestrojme dráhu B_x (resp. B_y) vedoucí z x do q (resp. z p do y).[13]) Podle věty 1 ve [3], str. 88 plyne z existence drah B_x, B, B_y existence dráhy vedoucí z x do y v grafu $\vec{D}$.

b) Leží-li x, y oba v B v pořadí q x, y, p, je věc zřejmá. Jde-li o pořadí q, y, x, p, postupujeme nejprve z x do p, pak sestrojíme v $\vec{A}$ dráhu vedoucí z p do q a konečně jdeme z q do y.

c) Leží-li x v B a y nikoliv, jdeme z x do p a pak z p do y v grafu $\vec{A}$ Leží-li y v B a x nikoliv, jdeme z x do q v grafu $\vec{A}$ a pak z q do y po části dráhy B.

---

[11]) Srovnej také 5. a 6. poznámku v práci [1], str. 84.

[12]) Z toho tedy jako vedlejší výsledek máme: Acyklický graf s jediným pramenem i protipramenem je souvislý.

[13]) B_x a B_y se ovšem mohou redukovat každá jen v jediný uzel.

Z každého uzlu grafu $\vec{D}$ lze tedy dojít po dráze do každého dalšího — proto $\vec{D}$ je dobře orientovaný graf.

Věta 2. *Budiž D souvislý neorientovaný graf bez artikulací s aspoň třemi uzly a nechť c je libovolný jeho uzel. Pak lze volit orientaci hran grafu D tak, že vznikne dobře orientovaný graf $\vec{D}$ s centrem c.*

Důkaz. Graf D nemůže být strom, neboť každý strom s aspoň třemi uzly má artikulaci. Proto index souvislosti grafu D je $\mu \geqq 1$.

Je-li D kružnice (čili $\mu = 1$), je tvrzení triviální. Nechť tedy $\mu > 1$. Lze najít (aspoň jedno) žebro Z s koncovými uzly x, y, na němž leží c. Odstraněním žebra Z ať vznikne z D graf D^* popsaný v lemmatu 2.

a) Nemá-li D^* artikulaci, orientujme jej jako acyklický graf s pramenem x a protipramenem y (věta 1), zatím co žebro Z nechť je orientováno jako dráha vedoucí z y do x. Podle lemmatu 5 vznikne tak dobře orientovaný graf, při čemž každý jeho cyklus zřejmě obsahuje (zorientované) žebro Z. Tedy c je centrum takto vzniklého grafu.

b) Je-li D^* řetězec, pak lze uzly x, y a všechny artikulace a_i grafu D^* srovnat do posloupnosti $x, a_1, a_2, \ldots, a_r, y$ ($r \geqq 1$), při čemž a_1 (resp. a_r) leží ve stejném koncovém článku jako x (resp. y), zatím co artikulace a_j, a_{j+1} leží obě v témž článku grafu D^* (pro $1 \leqq j \leqq r - 1$). Položme $x = a_0$, $y = a_{r+1}$. Podle věty 1 lze každý článek grafu D^* orientovat jako acyklický graf s (jediným) pramenem a_i a (jediným) protipramenem a_{i+1} ($0 \leqq i \leqq r$). Provedeme-li to, vznikne acyklický[14]) graf $\vec{D}^*$ s (jediným) pramenem x a (jediným) protipramenem y. Ten opět doplníme žebrem Z orientovaným jako dráha vedoucí z y do x, aby vznikl graf žádaných vlastností. Důkaz je podán.[15])

Chceme si ještě všimnout, že v orientaci grafu $\vec{D}$ popsané v důkaze věty 2 existuje vždy více než jedno centrum; snadno ovšem sestrojíme dobře orientovaný graf i s jediným centrem (v obr. 1 existuje jediné centrum c). Má-li však graf D z předpokladů věty 2 každý uzel nejvýše 3. stupně, pak příslušný graf $\vec{D}$ má vždy aspoň dvě centra. Konečně ke každému přirozenému číslu $s > 3$ lze najít graf D s uzlem c stupně s-tého takový, že každý graf $\vec{D}$ z věty 2 má kromě c ještě další centrum. Přenecháváme čtenáři, aby se o těchto tvrzeních přesvědčil.

4. Mezi dobře orientovanými grafy zaujímají důležité postavení souvislé rovnovážně orientované grafy.[16]) Orientovaný graf nazýváme *rovnovážně*

---

[14]) Plyne např. z připomínané už věty o očíslování uzlů acyklického grafu.

[15]) K větě 2 je nutno poznamenat, že předpoklad o artikulaci je v ní podstatný.

[16]) Název *rovnovážně orientovaný* graf pochází od A. Kotziga. V literatuře není pro tento pojem jednotné pojmenování: König [3] neužívá žádného názvu, kdežto u jiných autorů lze najít např. pojmenování *T-graph* (N. G. de Bruijn), *simple graph* (W. T. Tutte) atd.

orientovaným, jestliže v každém jeho uzlu právě tolik hran končí, kolik v něm počíná. Ukázalo se, že souvislé rovnovážně orientované grafy hrají analogickou úlohu mezi orientovanými grafy, jakou v případě neorientovaných grafů mají souvislé eulerovské grafy (viz [3], str. 29, věta 7; odtud také snadno plyne, že souvislý rovnovážně orientovaný graf je zvláštním případem dobře orientovaného grafu).

Budiž dán orientovaný graf $\vec{G}$. Lze-li sestrojit posloupnost

$$u_1, \overrightarrow{u_1u_2}, u_2, \overrightarrow{u_2u_3}, u_3, \ldots, u_m, \overrightarrow{u_mu_1}, u_1\,, \tag{2}$$

kde u_i jsou uzly a $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ hrany grafu $\vec{G}$, pak (2) nazveme *tahem kompletním* vzhledem k u_1, jestliže (2) obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$ počínající v u_1.

Věta 3. *Rovnovážně orientovaný graf $\vec{G}$ má uzel c za své centrum právě tehdy, jestliže každý tah kompletní vzhledem k c obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$.*

Důkaz. Budiž $\vec{G}$ rovnovážně orientovaný graf s centrem c a nechť existuje tah kompletní vzhledem k c, který neobsahuje hranu $\overrightarrow{vw} \in \vec{G}$. Sestrojme všechny hrany $\overrightarrow{vw}$ s uvedenou vlastností; vidíme že (spolu s počátečními a koncovými uzly) tvoří podgraf $\vec{G}^*$, který je též rovnovážně orientovaný. Uzel c ovšem neleží v $\vec{G}^*$, zatím co v $\vec{G}^*$ lze sestrojit cyklus (viz [3], str. 29, věta 8). To však je spor s tím, že c je centrum grafu $\vec{G}$.

Nechť obráceně v rovnovážně orientovaném grafu $\vec{G}$ každý kompletní tah vzhledem k c obsahuje všechny hrany z $\vec{G}$. Nechť existuje v $\vec{G}$ cyklus Ω, který neprochází uzlem c. Odstraňme z $\vec{G}$ všechny hrany cyklu Ω a případně všechny uzly, jež by pak byly isolované. Vznikne tak (event. nesouvislý) graf $\vec{H}$, který je rovnovážně orientovaný. Zvolme v $\vec{H}$ tu komponentu $\vec{K}$, v níž leží uzel c; tato komponenta zřejmě obsahuje všechny ty hrany z $\vec{G}$, které vycházejí z uzlu c. Podle Königovy věty zmíněné na počátku odst. 4 existuje v $\vec{K}$ tah kompletní vzhledem k c (obsahující dokonce všechny hrany z $\vec{K}$). To je tedy také kompletní tah vzhledem k c i v původním grafu $\vec{G}$, který však neobsahuje žádnou hranu z Ω (spor).

LITERATURA

[1] *F. Bäbler*: Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen, Comm. Math. Helv., 1953, 81—100.

[2] *M. Fiedler, J. Sedláček*: O *W*-basích orientovaných grafů, Časopis pro pěstování matematiky *83* (1958), 214—225.

[3] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[4] *O. Ore:* A problem regarding the tracing of graphs, Elemente der Mathematik, VI. Jahrgang (1951), 49—53.

[5] *J. Sedláček*: O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 195—215.

[6] *H. Whitney*: Non-separable and planar graphs, Transactions of the American Math. Society *34* (1932), 339—362.

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ХОРОШО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 4/X 1957 г.)

Конечный ориентированный граф $\vec{D}$ мы называем хорошо ориентированным (см. [2], [5]), если из каждой его вершины ведет путь к каждой из остальных вершин. Если в хорошо ориентированном графе $\vec{D}$ существует вершина c, являющаяся вершиной каждого цикла графа $\vec{D}$, то мы назовем c центром графа $\vec{D}$. Главная теорема нашей статьи гласит (теорема 2):

Пусть D — связный неориентированный граф без двуугольников, без петель и без артикуляции, имеющий по крайней мере три вершины. Пусть c — произвольная вершина графа D. Тогда можно подобрать ориентацию ребер графа D так, что получится хорошо ориентированный граф $\vec{D}$ с центром c.

Zusammenfassung

ÜBER EINE SPEZIELLE KLASSE WOHLGERICHTETER GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 4. Oktober 1957)

Ein endlicher gerichteter Graph D heisst wohlgerichtet (siehe [2], [5]), wenn von jeden Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn fährt. Existiert in einem wohlgerichteten Graphen $\vec{D}$ ein solcher Knotenpunkt c, der in jedem Zyklus des Graphen $\vec{D}$ liegt, dann bezeichnen wir c als Zentrum des Graphen $\vec{D}$. Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit ist der Satz 2:

Es sei D ein zusammenhängender nichtgerichteter artikulationsloser Graph ohne Zweiecke und ohne Schlingen, der mindestens drei Knotenpunkte besitzt; es sei c sein beliebiger Knotenpunkt. Dann gibt es eine solche Orientierung der Kanten von D, dass ein wohlgerichteter Graph $\vec{D}$ mit dem Zentrum c entsteht.