Bohuslav Míšek

O $(n+1)$-úhelníku v E_n s maximálním objemem konvexního obalu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 99--104

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117289`

O $(n+1)$-ÚHELNÍKU V E_n S MAXIMÁLNÍM OBJEMEM KONVEXNÍHO OBALU

BOHUSLAV MÍŠEK, Honice

(Došlo dne 4. března 1958) DT: 513.19

V práci jde hlavně o zjištění délky stran, velikosti úhlů dvou daných stran anebo dané strany a dané úhlopříčky a o výpočet maximálního objemu konvexního obalu $(n+1)$-úhelníka v E_n při daném obvodu.

Definice 1. *Budiž n přirozené číslo, E_n eukleidovský prostor n-rozměrný. Mějme $n+1$ navzájem různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ v E_n; pak soustavu úseček A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ nazveme $(n+1)$-úhelníkem. Body A_k nazveme jeho vrcholy a úsečky A_kA_{k+1} jeho stranami pro každé k, při čemž $A_k = A_l$, když $k \equiv l \pmod{n+1}$. Součet délek všech stran $(n+1)$-úhelníka $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n+1}A_1}$ nazveme jeho obvodem a označíme jej O.*

Definice 2. *Z množiny $(n+1)$-úhelníků s pevně daným obvodem O nazveme ten, jehož konvexní obal má maximální objem, $(n+1)$-úhelníkem A.*

O $(n+1)$-úhelníku A odvodíme řadu vět zjišťujících některé jeho základní vlastnosti a platných pro každé přirozené n, pokud není jinak stanoveno. V dalším budeme slovy „trojúhelník $A_1A_2A_3$“, „rovina $A_1A_2A_3$“, „prostor $A_1A_2 \ldots A_k$“ rozumět trojúhelník o vrcholech A_1, A_2, A_3, resp. rovinu procházející vrcholy A_1, A_2, A_3, resp. lineární prostor nejnižší dimense, v němž leží vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_k$; atp.

Věta 1. *Vrcholy $(n+1)$-úhelníka A jsou lineárně nezávislé body v E_n.*

Důkaz. Buďtež $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ navzájem různé body v E_n, v_k vzdálenost bodu B_{k+1} od prostoru $B_1B_2 \ldots B_k$ a V_k objem konvexního obalu bodů B_1, $B_2, \ldots, B_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pak platí

$$V_k = \frac{v_k}{k} V_{k-1} = \frac{1}{k!} v_1 v_2 \ldots v_k \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

při čemž klademe $V_0 = 1$. Kdyby vrcholy $(n+1)$-úhelníka A byly lineárně závislé, existovalo by alespoň jedno $k = 1, 2, \ldots, n$, pro něž by $v_k = 0$, tedy i $V_n = 0$, tj. objem jeho konvexního obalu by jistě nebyl maximální.

Věta 2. *Všechny strany $(n+1)$-úhelníka A jsou stejně dlouhé.*

Důkaz. Nechť existují dvě nestejně dlouhé sousední strany. Můžeme předpokládat, že to jsou strany A_1A_2, A_2A_3, tedy že platí $\overline{A_1A_2} \neq \overline{A_2A_3}$. V množině $(n+1)$-úhelníků o pevném O a pevných vrcholech $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_{n+1}$ může mít podle (1) maximální objem konvexního obalu jenom ten, který má maximální součin v_1v_2 značící dvojnásobný obsah trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Tento trojúhelník má však za daných podmínek maximální obsah jedině při $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$, což je spor.

Definice 3. *Rovinu ležící spolu s lineárním podprostorem E_{k-1} v prostoru E_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ nazveme kolmou k tomuto podprostoru, obsahuje-li nevlastní podprostor jednoho z těchto útvarů nevlastní podprostor normálového prostoru druhého z těchto útvarů v E_k a naopak. Dvě roviny ležící v E_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ nazveme k sobě kolmými, obsahují-li každá alespoň jednu normálu druhé.*

Poznámka 1. Definice 3 nazývá kolmými útvary, které splňují alespoň stereometrické podmínky kolmosti dvou rovin. S hlediska vícerozměrné eukleidovské geometrie nejde v žádném z obou definovaných případů o kolmost úplnou; protože nižší z obou útvarů, u nichž mluvíme o kolmosti, je vždy dvojrozměrný, jde o kolmost poloviční. (Srv. [1], str. 47 a násl.) Pro naše další úvahy však tento pojem dostačuje.

Věta 3. *Budiž $n \geqq 3$. Rovina $A_1A_kA_{k+1}$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$ u $(n+1)$-úhelníka A je kolmá k prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$.*

Důkaz. Úhel roviny $A_1A_kA_{k+1}$ s prostorem $A_1A_2 \ldots A_k$ je úhel φ, který svírá přímka roviny $A_1A_kA_{k+1}$ kolmá k A_1A_k se svým kolmým průmětem do prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$. (Viz [1], str. 68—81.) Budiž v_d vzdálenost bodu A_{k+1} od přímky A_1A_k. Objem konvexního obalu $(n+1)$-úhelníka je pak podle (1)

$$V_n = \frac{1}{n!} v_1 \ldots v_{k-1} v_d \sin \varphi v_{k+1} \ldots v_n \,.$$

Nabývá-li φ různých hodnot u $(n+1)$-úhelníka s pevným obvodem O, je jasné, že vždy lze sestrojit takový $(n+1)$-úhelník, který při témže obvodu podrží také hodnoty všech vzdáleností $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_d, v_{k+1}, \ldots, v_n$. V množině takových $(n+1)$-úhelníků o konstantních $O, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_d, v_{k+1}, \ldots, v_n$ má však maximální V_n nutně ten, pro nějž platí $\sin \varphi = 1$, což znamená kolmost roviny $A_1A_kA_{k+1}$ a prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$.

Věta 4. *Budiž $n \geqq 3$. Rovina $A_1A_kA_{k+1}$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$ u $(n+1)$-úhelníka A je kolmá ke každé rovině $A_pA_qA_r$ $(p, q, r = 1, 2, \ldots, k;\ p \neq q \neq r \neq p)$.*

Důkaz. Poněvadž rovina $A_pA_qA_r$ je obsažena v prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$, je věta 4 bezprostředním důsledkem věty 3.

Definice 4. *Úhlem stran A_kA_{k+1}, A_lA_{l+1} $(n+1)$-úhelníka budeme rozumět úhel vektorů $A_{k+1} - A_k$ a $A_l - A_{l+1}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n+1;\ k \neq l)$.*

Věta 5. *Úhly, které svírají libovolné dvě strany $(n + 1)$-úhelníka A, jsou stejné.*

Důkaz. Vektor $A_{k+1} - A_k$ označme stručně $\boldsymbol{a}_k$. Podle věty 3 je rovina $A_1A_2A_3$ kolmá k prostoru $A_3A_4 \dots A_{n+1}A_1$. To znamená vzhledem k větě 2, že vektor $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{a}_k$ pro $k = 3, 4, \dots, n + 1$; tedy platí o skalárním součinu těchto vektorů

$$(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\, \boldsymbol{a}_k = 0\,, \quad \text{čili} \quad \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k\,.$$

Nechť α_{kl} je úhel vektorů $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{a}_l$. Pak platí, ježto podle věty 2 $|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2|$,

$$\cos \alpha_{1k} = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k}{|\boldsymbol{a}_1| \,.\, |\boldsymbol{a}_k|} = \frac{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k}{|\boldsymbol{a}_2| \,.\, |\boldsymbol{a}_k|} = \cos \alpha_{2k}\,.$$

Tedy $\alpha_{1k} = \alpha_{2k}$ $(k = 3, 4, \dots, n + 1)$. Zcela obdobně lze dokázat $\alpha_{2k} = \alpha_{3k}$ pro $k = 4, 5, \dots, n + 1$; atd. Tím je důkaz hotov pro stranu $A_{n+1}A_1$ a tedy pro všechny strany.

Položme v dalším $\alpha_{kl} = \alpha$.

Věta 6. *Pro úhel α libovolných dvou stran $(n + 1)$-úhelníka A platí* $\cos \alpha = \dfrac{1}{n}$.

Důkaz. Ježto strana A_1A_2 svírá podle věty 5 se všemi ostatními stranami stejný ostrý úhel, pak promítneme-li kolmo na tuto stranu všechny vrcholy A_k $(k = 3, 4, \dots, n + 1)$, rozdělí tyto průměty vzhledem k větě 2 stranu A_1A_2 na n stejných dílů. Odtud plyne ihned, že úhel α strany A_1A_2 s kteroukoliv jinou stranou vyhovuje vztahu

$$\cos \alpha = \frac{1}{n}\,.$$

Vzhledem k větě 5 platí tento vztah pro kterékoliv dvě strany.

Definice 5. *Budiž $n \geqq 3$. Úhlopříčkou $(n + 1)$-úhelníka nazveme každou úsečku A_kA_l pro $k, l = 1, 2, \dots, n + 1$; $k \neq l - 1, l, l + 1$. Úhlopříčka A_kA_l rozdělí všechny vrcholy, resp. strany $(n + 1)$-úhelníka ve dvě skupiny, S_{kl} a S_{lk}, resp. s_{kl} a s_{lk}: Jdeme-li po obvodu $(n + 1)$-úhelníka směrem stoupajících indexů u vrcholů, nalezneme skupinu S_{kl} (s_{kl}) na cestě od A_k k A_l, skupinu S_{lk} (s_{lk}) na cestě od A_l k A_k; do žádné ze skupin S_{kl}, S_{lk} nepočítáme vrcholy A_k, A_l. Úhlem strany A_jA_{j+1} a úhlopříčky A_kA_l budeme rozumět úhel vektorů $A_{j+1} - A_j$ a $A_l - A_k$, patří-li strana A_jA_{j+1} do skupiny s_{kl}, a vektorů $A_{j+1} - A_j$ a $A_k - A_l$, patří-li strana A_jA_{j+1} do skupiny s_{lk}.*

Věta 7. *Úhlopříčka A_kA_l $(n + 1)$-úhelníka A svírá s každou jeho stranou skupiny s_{kl} stejný úhel β_{kl} a s každou jeho stranou skupiny s_{lk} stejný úhel β_{lk}.*

Důkaz. Označme $\boldsymbol{a}_j$ vektor $A_{j+1} - A_j$, $\boldsymbol{u}_{kl}$ vektor $A_l - A_k$, β_{jkl} úhel strany A_jA_{j+1} a úhlopříčky A_kA_l, tj. úhel vektorů $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{u}_{kl}$, resp. $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{u}_{lk}$ $(j, k, l = 1, 2, \dots, n + 1;\ k \neq l - 1, l, l + 1)$. Podle věty 3 je rovina $A_kA_{k+1}A_{k+2}$ kolmá k prostoru $A_{k+2}A_{k+3} \dots A_{n+1}A_1 \dots A_k$. Tedy vektor $\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k+1}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{u}_{kl}$

($k, l = 1, 2, \ldots, n + 1$; $k \neq l - 1, l, l + 1$), takže platí o skalárním součinu těchto vektorů

$$(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k+1})\, \boldsymbol{u}_{kl} = 0\,.$$

Zcela obdobně jako v důkazu věty 5 odvodíme odtud $\beta_{kkl} = \beta_{k+1,kl}$, a dále $\beta_{k+1,kl} = \beta_{k+2,kl}, \ldots, \beta_{l-2,kl} = \beta_{l-1,kl}$. Tím je důkaz hotov pro stranu ze skupiny s_{kl}, označíme-li její úhel s úhlopříčkou A_kA_l prostě β_{kl}. Analogicky provedeme důkaz pro strany ze skupiny s_{lk}, zaměníme-li vektor $\boldsymbol{u}_{kl}$ za vektor $\boldsymbol{u}_{lk} = -\boldsymbol{u}_{kl}$.

Věta 8. *Nechť $k < l$. Kolmé průměty vrcholů skupiny S_{kl} (S_{lk}) na úhlopříčku A_kA_l $(n + 1)$-úhelníka A dělí tuto úhlopříčku na $l - k$ $(n + 1 - l + k)$ stejných dílů.*

Důkaz je analogický k důkazu věty 6: Ježto úhlopříčka A_kA_l svírá se všemi stranami skupiny s_{kl} stejný ostrý úhel, pak vzhledem k větě 2 dělí tuto úhlopříčku kolmé průměty příslušných vrcholů na ni na stejné díly v počtu rovném počtu stran s_{kl}.

Poznámka 2. Rozšíříme-li definici úhlopříčky A_kA_l také pro $k = l - 1$, $l + 1$, tj. nazveme-li úhlopříčkou i kteroukoliv stranu $(n + 1)$-úhelníka, pak je zřejmé, že věty 5 a 6 jsou speciálním případem vět 7 a 8 i následující věty 9.

Položme nyní v dalším pro stručnost $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n+1}A_1} = a$, $\overline{A_kA_l} = u_{kl} = u_{lk} = \overline{A_lA_k}$ ($k, l = 1, 2, \ldots, n + 1$; $k \neq l$).

Věta 9. *Nechť $k < l$. Úhel β_{kl}, resp. β_{lk} úhlopříčky A_kA_l se stranou skupiny s_{kl}, resp. s_{lk} $(n + 1)$-úhelníka A je určen vztahem*

$$\cos \beta_{kl} = \sqrt{\frac{n + 1 - l + k}{n(l - k)}}\,, \quad \text{resp.} \quad \cos \beta_{lk} = \sqrt{\frac{l - k}{n(n + 1 - l + k)}}\,.$$

Důkaz. Podle věty 8 platí pro $k < l$

$$\cos \beta_{kl} = \frac{u_{kl}}{(l - k)\, a}\,, \quad \cos \beta_{lk} = \frac{u_{kl}}{(n + 1 - l + k)\, a}\,. \tag{2}$$

Z trojúhelníka $A_kA_lA_{l+1}$ plyne podle věty kosinové pro $k < l$

$$u_{k,l+1}^2 = a^2 + u_{kl}^2 - 2au_{kl}\, \frac{u_{kl}}{(n + 1 - l + k)\, a} = a^2 + \frac{n - 1 - l + k}{n + 1 - l + k}\, u_{kl}^2\,.$$

Ježto $u_{k,k+1} = a$, platí $u_{k,k+2}^2 = 2\,\dfrac{n - 1}{n}\, a^2$, $u_{k,k+3}^2 = 3\,\dfrac{n - 2}{n}\, a^2$, $\ldots$, $u_{kl}^2 = (l - k)\,\dfrac{n + 1 - l + k}{n}\, a^2$, což dosazeno do vzorců (2) dává ihned po zkrácení vzorce věty 9.

Poznámka 3. Podle věty 6 a 9 platí $\cos \beta_{kl} \cos \beta_{lk} = \dfrac{1}{n} = \cos \alpha$, tj. součin kolmých průmětů strany skupiny s_{kl} a strany skupiny s_{lk} na úhlopříčku A_kA_l

(speciálně součin kolmých průmětů strany na sebe samu a jiné strany na tuto stranu) u $(n + 1)$-úhelníka A s pevným O je pro dané n konstantní a roven vždy n-té části čtverce jeho strany.

Předcházející věty nám pomohou konečně vypočítat objem konvexního obalu $(n + 1)$-úhelníka A jako funkci strany a dimense. Platí totiž

Věta 10. *Budiž dán obvod O. Objem V_n konvexního obalu $(n + 1)$-úhelníka A je určen vztahem*

$$V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}},$$

kde $a = \dfrac{O}{n+1}$.

Důkaz. Podle (1) platí $V_n = \dfrac{1}{n!} v_1 v_2 \dots v_n$. Vyjádřeme v_k $(k = 2, 3, \dots, n)$ z trojúhelníka $A_1 A_k A_{k+1}$. Vzhledem k větě 2, 3 a 9 platí

$$v_k = a \sin \beta_{k1} = a \sqrt{1 - \frac{k-1}{n(n-k+2)}} = a \sqrt{\frac{(n+1)(n-k+1)}{n(n-k+2)}}.$$

Tedy, ježto $v_1 = a$,

$$V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}} \sqrt{\frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}} \sqrt{\frac{(n+1)(n-3)}{n(n-2)}} \cdots \sqrt{\frac{n+1}{2n}},$$

tj. po zkrácení

$$V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}.$$

LITERATURA

[1] *P. H. Schoute:* Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil: Die linearen Räume, Leipzig 1902.

Резюме

О $(n + 1)$-УГОЛЬНИКЕ В E_n С МАКСИМАЛЬНЫМ ОБЪЕМОМ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

БОГУСЛАВ МИШЕК (Bohuslav Míšek), Гонице

(Поступило в редакцию 4/III 1958 г.)

В этой работе доказываются некоторые свойства $(n + 1)$-угольника в n-мерном евклидовом пространстве E_n, выпуклая оболочка которого имеет максимальный объём при данном периметре. Главные результаты содержатся в следующих теоремах ($A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ значат вершины, a — сторону $(n + 1)$-угольника):

1. *Вершины суть линейно независимые точки в* E_n.

2. *Все стороны равны.*

3. *Плоскость* $A_1A_kA_{k+1}$ *перпендикулярна к* $(k - 1)$*-мерному линейному пространству* $A_1A_2 \ldots A_k$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$.

4. *Все углы какой-либо стороны с какой-либо другой стороной равны и определены уравнением* $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

5. *Объём выпуклой оболочки определяется по формуле*

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}\ .$$

Автор выводит ещё несколько теорем об углах диагоналей и сторон.

Summary

ON THE SIMPLEX POLYGON WITH THE GREATEST VOLUME OF ITS CONVEX HULL

BOHUSLAV MÍŠEK, Honice

(Received March 4, 1958)

In this paper there are proved some properties of the simplex polygon in n-dimensional Euclidean space E_n the convex hull of which has the greatest volume with a given circumference. The main results are obtained in the following theorems ($A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ indicate the vertices, a the side of the simplex polygon):

1. *The vertices are linearly independent points in* E_n.

2. *All sides are equal.*

3. *The plane* $A_1A_kA_{k+1}$ *is perpendicular to* $(k - 1)$*-dimensional linear space* $A_1A_2 \ldots A_k$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$.

4. *The angles of any two sides are equal and given by the equation* $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

5. *The volume of the convex hull is expressed by the formula*

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}\ .$$

The author deduces some more theorems about the angles of diagonals and sides.