Časopis pro pěstování matematiky

Jindřich Nečas

Řešení biharmonického problému pro nekonečný nekonvexní klín

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 90--98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117288`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU PRO NEKONEČNÝ NEKONVEXNÍ KLÍN

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Došlo dne 18. února 1958)

DT : 517.516

V této práci je definován biharmonický problém pro nekonečný nekonvexní klín a je dokázána existence a unicita řešení.

1. Úvod

V článku [1] část I a II je rozřešen biharmonický problém pro nekonečný konvexní klín. V tomto pojednání dokážeme existenci a unicitu řešení biharmonického problému pro nekonečný nekonvexní klín. Metoda je totožná s metodou, na níž je založena výše zmíněná práce, což umožňuje užít při důkazech prakticky stejných postupů. Použití stejné symboliky nám dovoluje podstatně stručnější probírání jednotlivých otázek, než to je učiněno ve zmíněné práci; k hladkému porozumění je třeba se s touto prací seznámit. Rozdíl mezi oběma pracemi je v podstatě v definici problému a je důsledkem toho, že v prvém případě šlo o konvexní, v druhém případě o nekonvexní klíny.

Definice, resp. věty, resp. číslované vztahy z práce [1] označíme symboly D1..., resp. V1..., resp. R1... a např. větu 8 z práce [1] citujeme V1,8.

2. Předběžné úvahy

V definici D1,4 rozumíme nekonečným klínem množinu bodů o průvodiči $r \in (0, \infty)$ a amplitudě $\Theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$, $\pi < \omega < 2\pi$.

Definice 1. *$u(r, \Theta) \in A$, jsou-li pro ni splněny podmínky* D 1,4.

Jak bude dokázáno dále, je $\lambda_1(\omega) = \operatorname{Re} p_1(\omega) = p_1(\omega)$ a $\frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Množina A obsahuje kromě nuly např. funkci $r^2 e^{\sqrt{r} \cos \frac{\Theta}{2}} \cdot \cos\left(\sqrt{r} \sin \frac{\Theta}{2}\right)$. Mellinův obraz funkce $u(r, \Theta)$ z A dostaneme ve tvaru R1,15a až R1,15d. Postup je doslova stejný jako důkaz V1,8.

Věta 1. *Buďte p_1 a $q_1 \neq 1$ kořeny s nejmenší kladnou reálnou částí a s nezápornou imaginární částí transcendentních rovnic*

$$p \sin \omega + \sin p\omega = 0\,, \tag{1}$$

$$q \sin \omega - \sin q\omega = 0\,. \tag{2}$$

Buď $\pi \leqq \omega \leqq 2\pi$. Potom platí

1. $\operatorname{Im} p_1 = 0$, 2. $\lambda_1(\omega) = p_1(\omega)$ *je spojitá a monotonní funkce v intervalu* $\langle \pi, 2\pi \rangle$, 3. $\pi < \omega < 2\pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$, 4. $\lambda_1(\pi) = 1$, $\lambda_1(2\pi) = \frac{1}{2}$, 5. $p_1(\omega) < \operatorname{Re} q_1(\omega)$.

Důkaz. Označme $z = p\omega$ resp. $q\omega$, $z = \xi + i\eta$, $\dfrac{\sin \omega}{\omega} = \Omega$. Rovnice (1) a (2) přejdou v rovnice

$$\Omega\xi \pm \sin \xi \operatorname{ch} \eta = 0\,, \tag{3}$$

$$\Omega\eta \pm \cos \xi \operatorname{sh} \eta = 0\,. \tag{4}$$

Zde odpovídá horní znaménko rovnici (1) a dolní rovnici (2). Budeme nejdříve vyšetřovat rovnici (1). Je-li $\eta = 0$, je rovnice (4) identicky splněna. Rovnice (3) potom dostává tvar

$$\Omega\xi + \sin \xi = 0\,. \tag{5}$$

Buď ξ_1 prvý průsečík přímky $\Omega\xi$ s funkcí $-\sin \xi$. Je $\xi_1(\pi) = \xi_1(2\pi) = \pi$ a pro $\pi < \omega < 2\pi$ je $\dfrac{\pi}{2} < \xi_1(\omega) < \pi$. Zřejmě $\xi_1(\omega)$ je spojitá funkce ω v intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$. Je $\dfrac{\xi_1(\omega)}{\omega} = \lambda_1(\omega)$. Vskutku, kdyby pro $\omega \in (\pi, 2\pi)$ bylo $\operatorname{Im} p_1(\omega) > 0$, potom by z rovnice (4) (označíme $p_1(\omega) = \xi_2 + i\eta_2$) plynulo, že $\cos \xi_2 = -\Omega \,.\, \dfrac{\eta_2}{\operatorname{sh} \eta_2} > 0$. Odtud plyne nutně, že $\xi_2 > \frac{3}{2}\pi$, a tedy $\xi_2 > \xi_1$, což je spor. Z rovnice (3) s dolním znaménkem plyne, že pro $\pi < \omega < 2\pi$ je $\omega \,.\, \operatorname{Re} q_1 > \pi$. Tím je dokázán bod 1, 4, 5, věty 1.

Rovnici (5) přepišme do tvaru $\lambda_1 \,.\, \sin \omega + \sin (\omega\lambda_1) = 0$. Pro $\pi < \omega < 2\pi$ je

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 \sin \omega + \sin (\omega\lambda_1)) = \sin \omega + \omega \cos (\omega\lambda_1) < 0\,,$$

a tedy z věty o implicitních funkcích plyne, že $\dfrac{d\lambda_1}{d\omega} = -\lambda_1 \dfrac{\cos \omega + \cos \xi_1}{\sin \omega + \omega \cos \xi_1}$.

Pro $\omega = \pi$ je $\cos \omega + \cos \xi_1 = -2$. Je-li $\pi < \omega < 2\pi$, potom $\cos \omega + \cos \xi_1 \neq 0$. Vskutku, kdyby bylo $\cos \omega + \cos \xi_1 = 0$, potom by platilo zároveň, že $\cos \omega + \cos \xi_1 = 0$ a $\sin \omega + \dfrac{\omega}{\xi_1} \sin \xi_1 = 0$. Odtud plyne

$$1 = \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = \cos^2 \xi_1 + \frac{\omega^2}{\xi_1^2} \sin^2 \xi_1 = 1 + \sin^2 \xi_1 \left(\frac{\omega^2}{\xi^2} - 1 \right)$$

a tedy nutně je $\omega = \xi_1$, což je spor. Je tedy $\dfrac{d\lambda_1}{d\omega} < 0$; odtud již plyne bod 2 a 3 věty 1, čímž je tato věta dokázána.

3. Definice, řešení a unicita řešení biharmonického problému

Definice 2. *Buďte funkce $f_1(r)$, $f_2(r)$ reálné, absolutně spojité na každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a takové, že $f_1(0) = f_2(0)$, a nechť pro nějaká μ, ν, pro něž platí* $-\lambda_1(\omega) - 1 < \mu, \nu < \lambda_1(\omega) - 1$, *je:*

$$1. \int_0^1 [f_i'(r)]^2 \, r^{2\mu+1} \, dr < \infty, \quad \int_1^\infty [f_i'(r)]^2 \, r^{2\nu+1} \, dr < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Dále buďte $g_1(r)$, $g_2(r)$ takové reálné funkce, že

$$2. \int_0^1 [g_i(r)]^2 \, r^{2\mu+1} \, dr < \infty, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2 \, r^{2\nu+1} \, dr < \infty, \; i = 1, 2 \; (\textit{nemusí být } \mu < \nu).$$

Biharmonickým problémem pro nekonečný nekonvexní klín nazýváme úlohu stanovit funkci $u(r, \Theta)$, pro niž platí:

3. *$u(r, \Theta)$ je reálná funkce definovaná na klínu K se čtyřmi spojitými derivacemi a biharmonická,*

4.
$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_{\frac{1}{2}}'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\gamma+1} \, dr = 0 \, ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_{\frac{1}{2}}'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\delta+1} \, dr = 0 \, ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[g_{\frac{1}{2}}(r) \mp \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\gamma+1} \, dr = 0 \, ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[g_{\frac{1}{2}}(r) \mp \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\delta+1} \, dr = 0 \, .$$

(zde γ, δ jsou reálná čísla, pro něž platí $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma, \delta < \lambda_1(\omega) - 1$).

5. *Ke každému $0 \leqq \varphi < \dfrac{\omega}{2}$ existuje konstanta $M(\varphi)$ tak, že*

$$z \;\; 0 < r \leqq 1, \; |\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leqq M r^{-\gamma-1} \, , \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right| \leqq M r^{-\gamma-1} \, ,$$

$$a \; z \;\; 1 \leqq r < \infty \, , \quad |\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leqq M r^{-\delta-1} \, , \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right| \leqq M r^{-\delta-1} \, ,$$

6. $\lim\limits_{r \to 0} [u(r, 0) - f_1(0)] = 0.$

Dokážeme nyní existenci řešení.

Věta 2. *Jestliže funkce $f_i(r)$, $g_i(r)$ splňují podmínky definice 2, potom existuje řešení příslušné těmto funkcím a vyhovuje podmínkám definice 2. Navíc platí $\gamma = \mu$, $\delta = \nu$.*

Důkaz. Předpokládejme, že platí $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, uvažovali bychom místo $f_1(r)$ resp. $f_2(r)$, $f_1(r) - f_1(0)$ resp. $f_2(r) - f_2(0)$, a k nalezenému řešení připočetli konstantu $f_1(0)$. Rozdělme stejně jako v [1] okrajové podmínky na dvě části: $f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)$ atd. Postup bude nyní stejný jako v důkazu V1,10. Je tedy $r\, f'_{i1}(r) \in h_{\mu\nu'}$, $r\, g_{i1}(r) \in h_{\mu\nu'}$, $i = 1, 2$, kde ν' je libovolné číslo větší než μ, $r\, f'_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $g_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $f_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $i = 1, 2$, kde μ' je libovolné číslo menší než ν.

Důležitý rozdíl oproti důkazu V1,10 spočívá v tomto: Z $f_1(0) = f_2(0) = 0$ a z R1,25 plyne, že je také $f_{11}(r) \in h_{\mu\nu'}$. Pochopitelně v průběhu důkazu nemůžeme (a není to zapotřebí) předpokládat $\mu > 0$.

Nyní již důkaz bodů 3, 4, 5 bude probíhat zcela stejně jako v [1]. Vedle odhadů 5 dokážeme stejným způsobem odhad $|u| \leqq Mr^{-\mu}$, $0 < r \leqq 1$. Protože platí $\mu < \lambda_1(\omega) - 1 < 0$, je $\lim_{r\to 0} u(r, 0) = 0$, což je bod 6. Tím je důkaz věty 2 proveden.

Toto řešení můžeme psát ve tvaru konvoluce okrajových podmínek a Greenových funkcí, definovaných takto:

Definice 3. $H_1(r, \Theta, \omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{-(n+2)\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta + n\sin n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{n((n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\omega)}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$H_2(r, \Theta, \omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2)\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\sin n\Theta - n\cos n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{n((n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\omega)}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$$H_3(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta - \cos n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\omega}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$$H_4(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\sin n\Theta - \sin n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\omega}\, r^{-n}\, dn\,,$$

kde x je libovolné číslo z intervalu $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$, $\pi < \omega < 2\pi$.

Věta 3. *Řešení biharmonického problému, získané výše uvedeným postupem, příslušné funkcím $f_1(r)$, $f_2(r)$, $g_1(r)$, $g_2(r)$, (platí $f_1(0) = f_2(0) = 0$) se dá psát ve tvaru*

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty H_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)] \, ds +$$

$$+ \int_0^\infty H_2\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) - f_2'(s)] \, . \, ds + \int_0^\infty H_3\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) + g_2(s)] \, ds +$$

$$+ \int_0^\infty H_4\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) - g_2(s)] \, ds \, . \tag{6}$$

Důkaz věty 3 je týž jako důkaz V1,12.

Následující věta je analogická s V1,11:

Věta 4. *Platí:* $|H_i(r, \Theta, \omega)| \leqq M(\varphi, x) \, r^{-x}$, *kde je* $r \in (0, \infty)$, $|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega_0}{2}$, $-\lambda_1(\omega) - 1 < x < \lambda_1(\omega) - 1$ *a* ω *je dosti blízko k* ω_0.

Dokážeme nyní větu o unicitě.

Věta 5. *Nechť* $u(r, \Theta)$ *je řešení biharmonického problému pro nekonvexní klín, definované v definici 2, a nechť přísluší nulovým okrajovým podmínkám. Potom* $u(r, \Theta) = 0$.

(Postup důkazu je analogický důkazu V 1,13 a proto budeme už postupovat rychleji.)

D ů k a z. Vsuňme do klínu K klín K_a, jehož symetrála leží na symetrále klínu K a jehož vrchol je vzdálen o a od vrcholu klínu K. Vrcholový úhel K_a buď $\pi < \omega' < \omega$ a buď dosti blízký ω. Opišme kolem vrcholu klínu K_a kružnici o dosti malém poloměru. Uvnitř této kružnice je $u(r, \Theta) = \text{Re}\,(\chi(z) + \bar{z}\,\varphi(z))$. ($\chi(z)$ a $\varphi(z)$ jsou holomorfní funkce ve vyšetřované kružnici.) Střed této kružnice buď počátkem souřadného systému, osa x nechť je totožná se symetrálou klínu K_a. Definujme funkce $\chi^*(\zeta)$, $\varphi^*(\zeta)$ takto: $\chi^*(\zeta) = \chi(\zeta^2 - 1)$, $\varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta^2 - 1)$. Ke každému celému $m \geqq 0$ můžeme najít konstanty $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$, tak, že $\chi^{*(i-1)}(1) = \mu^{(i-1)}(1)$, $\varphi^{*(i-1)}(1) = \nu^{(i-1)}(1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, kde $\mu(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-i\zeta}$, $\nu(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} B_i e^{-i\zeta}$. (Viz důkaz V1,13.) Bude-li m dost velké, potom užijeme-li lemmatu 2 z [1], dostaneme, že

$$w(x, y) = w(\varrho, \vartheta) = u^*(\varrho, \vartheta) - \text{Re}\,(\mu(\sqrt{1 + z}) + \bar{z}\,\nu(\sqrt{1 + z}))$$

leží v množině A (A je množina funkcí uvažovaná na klínu K_a), a dá se tedy psát ve tvaru (6). Zde ϱ, ϑ jsou polární souřadnice klínu K_a a $u^*(\varrho, \vartheta) = u(r, \Theta)$. Protože však je

$$\text{Re}\,(\mu(\sqrt{1 + z}) + \bar{z}\,\nu(\sqrt{1 + z})) - \mu(1) \in A$$

a tudíž $u(r, \Theta)$ se dá psát ve tvaru (6), dá se psát v tomto tvaru také $u^*(\varrho, \vartheta) - u(a, 0)$. Nyní již snadno provedeme limitní přechod (viz V1,13) pro $a \to 0$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{a \to 0} u(a, 0) = 0$, dostáváme

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty H_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega'\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(s, \frac{\omega'}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial s}\left(s, -\frac{\omega'}{2}\right)\right] \mathrm{d}s + \dots \tag{7}$$

Z podmínek 4 definice 2 je patrno, že limita pravé strany (7), když $\omega' \to \omega$ je rovna nule, a tedy $u(r, \Theta) = 0$, což bylo dokázat.

Stejně jako pro konvexní klíny dává Papkovičovo číslo $p_1(\omega)$ horní hranici růstů okrajových podmínek. Protože je $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$ pro $0 < \omega < 2\pi$, je zřejmé, že pro všechny klíny (konvexní i nekonvexní) jsou přípustné okrajové podmínky, dané prvými derivacemi hledaného řešení na hranici, integrovatelnými s kvadrátem. Podobně jako řešení biharmonického problému pro konvexní klín, má řešení biharmonického problému pro nekonvexní klín (až na detaily) stejné vlastnosti v blízkosti hranice. Formulace těchto vlastností i důkazy se dají téměř bez rozdílu přenést z části II práce [1].

LITERATURA

[1] *J. Nečas:* Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín I a II. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 257—286 a 399—424.

Резюме

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 18/II 1958 г.)

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО НЕВЫПУКЛОГО КЛИНА

Настоящая работа содержит дополнение результатов, содержащихся в работе: „Решение бигармонической задачи для бесконечного клина“, теоремой о существовании и единственности решения бигармонической проблемы для бесконечного невыпуклого клина. Используемые здесь методы доказательств, опирающиеся на применение преобразования Меллина, были разработаны в указанной выше работе.

Если выразить точки клина в полярных координатах r, Θ, $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$ так, чтобы полярная ось совпадала с биссектрисой угла, то кра-

евые условия искомой действительной бигармонической функции имеют вид:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r), \quad u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r),$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -g_2(r)\,.$$

В работе предполагается, что $f_i(r)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале из $< 0, \infty)$, $i = 1, 2$, $f_1(0) = f_2(0)$ и что имеет место

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad \int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,,$$
$$\int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad \int_1^\infty [g(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad i = 1, 2\,.$$

Притом μ, ν лежат в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$, где $\lambda_1(\omega)$ — действительная часть числа Папковича. Доказывается, что $\omega > \pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Выполнение краевых условий понимается в следующем смысле:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0$$

и так далее. Далее предполагается, что $\lim\limits_{r \to 0} u(r, 0) = f_1(0)$ и что существует постоянная, зависящая лишь от φ так, что

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \; 0 < r \leqq 1 \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}, \; \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,;$$
$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \; 1 < r \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}, \; \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,.$$

При этом мы требуем, чтобы постоянные γ, δ лежали в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$.

В работе доказывается, что существует в точности одно решение задачи. Отказавшись от требования, чтобы постоянные γ, δ лежали в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$, мы нарушили бы единственность.

Так как $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$, краевые условия $f_i(r)$, $g_i(r)$ могут быть как для выпуклого, так и для невыпуклого клина такие, что

$$\int_0^\infty [f_i'(r)]^2\, \mathrm{d}r < \infty, \qquad \int_0^\infty [g_i(r)]^2\, \mathrm{d}r < \infty.$$

Résumé

SOLUTION DU PROBLÈME BIHARMONIQUE POUR LE COIN INFINI PAS CONVEX

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 18 février 1958)

Le présent travail complète les résultats contenus au travail „Solution du problème biharmonique pour le coin infini" par les théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique pour le coin infini pas convex.

Ces théorèmes, on les démontre par la même méthode comme au travail précedent en s'appuyant sur la transformation de Mellin.

Si l'on introduit dans le coin les coordonnés polaires, $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \dfrac{\omega}{2}$, dont l'axe polaire coincide avec la bisetrice de l'angle ω du coin, les conditions aux limites de la fonction biharmonique cherchées sont les suivants:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r)\,,\ u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r),\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r)\,,\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -g_2(r)\,.$$

Les fonctions $f_i(r)$, $i = 1, 2$ sont supposées absolument continues sur chaque interval fini de $\langle 0, \infty)$ et les fonctions $f_i(r), g_i(r)$, $i = 1, 2$, sont soumises à ces conditions-ci:

$$\int_0^1 |f_i'(r)|^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty |f_i'(r)|^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,,$$

$$\int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty |g_i(r)|^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,, \quad i = 1, 2\,, \quad f_1(0) = f_2(0)\,.$$

Les nombres μ et ν sont contenues dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ où $\lambda_1(\omega)$ est la partie réelle du nombre du Papkovič. Est montré, que $\omega > \pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Les conditions aux limites sont remplies au sens suivant:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, dr < \infty\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, dr = 0 \text{ etc.}$$

Puis on suppose, que $\lim_{r\to 0} u(r, 0) = f_1(0)$ et qui'il existe une constante ne dépendante que de φ, telle qu'on a

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \quad 0 < r \leqq 1 \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1},$$

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \quad 1 \leqq r \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}.$$

On exige que les nombres γ, δ soient dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$. On démontre qu'il existe une et une seule solution du problème ainsi défini. Si nous n'exigeons pas d'avoir les constantes γ, δ dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ nous perdrions l'unicité. Du fait $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$ suit que les conditions aux limites $f_i(r)$, $g_i(r)$ pour les coins convexes et pas convexes sont admisibles si les intégrales

$$\int_0^\infty [f_i'(r)]^2\, \mathrm{d}r, \quad \int_0^\infty [g_i(r)]^2\, \mathrm{d}r, \quad i = 1, 2,$$

sont finis.