Karel Čulík

O cyklických grafech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 4, 462

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117284`

O CYKLICKÝCH GRAFECH

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 13. května 1957 v Brně.)

Binární relací ϱ definovanou na množině $F \neq 0$ se rozumí podmnožina kartézského součinu $F \times F$ (t. j. platí $\varrho \subset F \times F$). Dvojici $F(\varrho)$ nazýváme *grafem*. Posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ prvků $u_i \in F$ se nazývá *vázaná* příp. *monotonně vázaná* v $F(\varrho)$, jestliže platí buď $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ nebo $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ příp. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ a říkáme o ní navíc, že je *uzavřená*, platí-li také buď $(u_k, u_1) \in \varrho$ nebo $(u_1, u_k) \in \varrho$ příp. $(u_k, u_1) \in \varrho$. Číslo k se nazývá její *délkou*. Uzavřená monotonně vázaná posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ se nazývá *cyklem*, jestliže $u_i \neq u_j$ pro $i \neq j$.

Binární relaci ϱ nazýváme *cyklickou relací stupně* k (stručně $\mathbf{Z}_k$-relací), splňuje-li podmínku

$$\{u_i\}_{i=1}^k \textit{ je monotonně vázaná posloupnost v } \varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho\,. \tag{1}$$

Pak $\mathbf{Z}_1$-relace je reflexivní a $\mathbf{Z}_2$-relace je symetrickou relací. Přepíšeme-li podmínku $\mathbf{Z}_3$ do obvyklého tvaru $x\varrho y$, $y\varrho z \Rightarrow z\varrho x$, je zřejmá analogie podmínky cykličnosti s podmínkou transitivnosti. Dále relace ϱ je cyklickou relací stupně $k = 1, 2, 3$ právě tehdy, když je ekvivalencí.

Graf $F(\varrho)$ nazýváme *cyklickým grafem stupně* k, jestliže ϱ je $\mathbf{Z}_k$ relací. Cyklus $\{u_i\}_{i=1}^d$ v $F(\varrho)$ nazýváme *ryzím* cyklem, jestliže platí

$$(u_i, u_j) \in \varrho \Rightarrow i + 1 \equiv j \pmod d\,, \tag{2}$$

při čemž všude klademe $u_p = u_q$ pro $p \equiv q \pmod d$.

Pak platí:

Věta 1. *Délka ryzího cyklu souvislého cyklického grafu je dělitelem jeho stupně.*

Stupeň k cyklického grafu $F(\varrho)$ nazýváme jeho *periodou*, jestliže existuje cyklus délky k v $F(\varrho)$ a jestliže pro délku d každého cyklu v $F(\varrho)$ platí $d \geqq k$.

Věta 2. *Souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ je jednoduchým grafem právě tehdy, když je cyklem délky k.*

Věta 3. *Souvislý graf je cyklickým grafem o periodě $k \geqq 3$ právě tehdy, když je homomorfním vzorem cyklu délky k.*

Je tedy každý souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ úplně charakterisován uspořádanou k-ticí mohutností (t. j. vlastně svojí *homomorfní charakteristikou*, která byla definována podobně jako pojem *homomorfismu* a *jednoduchosti* v autorově práci *Zur Theorie der Graphen*, Čas. pro pěst. mat., v tisku), takže se snadno odvodí na příklad)

Věta 4. *Je-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu $F(\varrho$: o periodě $k \geqq 3$, pak $F(\varrho)$ obsahuje cyklus délky d právě tehdy, když $d = nk$, kde n je přirozené číslo, a když $\alpha_i \geqq n$ pro $1 \leqq i \leqq k$.*

Karel Čulík, Brno.