Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

Poznámka o konvexním mnohoúhelníku

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 3, 349--352

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117272`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA O KONVEXNÍM MNOHOÚHELNÍKU

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 30. července 1956.) DT:513.192

Tato poznámka navazuje na otevřené otázky z autorovy práce „O soustavách úhlopříček v konvexním n-úhelníku", Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 157—161.

Základní pojmy a symbolika jsou zavedeny v citovaném autorově článku. Dále pro stručnost označme card N počet prvků (konečné) množiny N. Číslem v celém článku rozumíme celé číslo.

Otázka odhadu čísla card $S_k^{(n)}$ může být úplně zodpovězena jen po zjištění, pro která k, n existuje soustava $S_k^{(n)}$. Předpokládáme-li však, že k je číslo „poměrně malé" vzhledem k n, je existence soustavy zaručena a můžeme přistoupit k odhadu pro card $S_k^{(n)}$, což se provádí v tomto příspěvku.

Existuje-li v konvexním n-úhelníku soustava $S_k^{(n)}$, můžeme pomocí $S_k^{(n)}$ definovat rozklad $R_k^{(n)}$ daného n-úhelníka na maximální souvislé oblasti. Snadno se nahlédne, že prvky z $R_k^{(n)}$ jsou konvexní mnohoúhelníky[1]). Počet r-úhelníků v rozkladu $R_k^{(n)}$ označme σ_r.

Lemma 1. *Je-li* $k \geqq 1$ *a existuje-li* $S_k^{(n)}$, *pak* card $R_k^{(n)} \geqq n$.

Důkaz. Při $n = 4$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo $n > 4$ takové, že pro jisté $k \geqq 1$ existuje $S_k^{(n)}$ a platí card $R_k^{(n)} < n$. Odtud plyne existence (konvexního) r-úhelníka v rozkladu $R_k^{(n)}$, který má aspoň dvě strany A_vA_{v+1} a A_wA_{w+1} $(1 \leqq v < w < n)$ společné s daným n-úhelníkem. Je-li $v + 1 < w$, existuje úhlopříčka A_vA_w non $\epsilon\ S_k^{(n)}$ (spor s definicí soustavy $S_k^{(n)}$). Je-li $v + 1 = w$, pak musí být $A_vA_{w+1} \epsilon\ S_k^{(n)}$, tedy $\Delta A_vA_wA_{w+1} \epsilon\ R_k^{(n)}$, takže v $(n - 1)$-úhelníku $A_1A_2 \dots A_vA_{w+1} \dots A_n$ existuje soustava $S_k^{(n-1)} = S_k^{(n)} \dot{-} \{A_vA_{w+1}\}$ a jí určený rozklad $R_k^{(n-1)} = R_k^{(n)} \dot{-} \{\Delta A_vA_wA_{w+1}\}$ splňuje podmínku card $R_k^{(n-1)} < n - 1$, což je spor s minimalitou čísla n.

[1]) Počet stran každého z nich je nejvýše n při n lichém a nejvýše $n - 1$ při n sudém; viz *Шклярский-Ченсов-Яглом:* Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 2, Москва 1952 (задача 6).

Věta 1. *Je-li $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$, pak ke každému $c \in \langle n - k - 1; n + k - 3\rangle$ existuje soustava $S_k^{(n)}$ tak, že* card $S_k^{(n)} = c$.

Důkaz. Pro $n = 4$ a $n = 5$ je tvrzení zřejmé. Budiž $n > 5$ a předpokládejme, že v každém konvexním n'-úhelníku ($n' < n$) ke každým c', k' splňujícím vztahy

$$n' \geqq 2k' + 2 \geqq 4\,, \quad n' - k' - 1 \leqq c' \leqq n' + k' - 3$$

existuje soustava $S_{k'}^{(n')}$ tak, že card $S_{k'}^{(n')} = c'$. Uvažujme n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ a nechť $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$, $n - k - 1 \leqq c \leqq n + k - 3$. Pro $k = 1$ je $c = n - 2$ a tvrzení je zřejmé. Nechť tedy dále je $k \geqq 2$, t. j. $n \geqq 2k + 2 \geqq 6$.

a) Je-li $c = n - k - 1$, sestrojíme soustavu $\overline{S}_k^{(n)}$ mající card $\overline{S}_k^{(n)} = c$ takto: Je-li $n = 2k + 2$, vedeme úhlopříčku $A_{k+1}A_n$ a dále k úhlopříček A_iA_{n-i} ($1 \leqq i \leqq k$); dostáváme tak $\overline{S}_k^{(n)}$. Je-li $n > 2k + 2$, sestrojíme v uvažovaném n-úhelníku úhlopříčku A_1A_{2k+2}. Ve vzniklém konvexním $(2k + 2)$-úhelníku sestrojíme soustavu k-tého stupně o $k + 1$ prvcích způsobem prve popsaným a ve zbývajícím konvexním $(n - 2k)$-úhelníku soustavu nultého stupně. Vznikne tak v uvažovaném n-úhelníku soustava $\overline{S}_k^{(n)}$ taková, že card $\overline{S}_k^{(n)} = 1 + (k + 1) + ((n - 2k) - 3) = c$ [2]).

b) Je-li $c = n - k$, pak soustavu $S_k^{(n)}$ sestrojíme tak, že v soustavě $\overline{S}_k^{(n)}$ sestrojené sub a) místo úhlopříčky A_1A_{2k+1} zavedeme dvě úhlopříčky A_2A_{2k+1} a A_2A_{2k+2}.

c) Je-li konečně $c \in \langle n - k + 1; n + k - 3\rangle$, pak $n - 2 \geqq 2(k - 1) + 2 \geqq 4$, $(n - 2) - (k - 1) - 1 \leqq c - 3 \leqq (n - 2) + (k - 1) - 3$. Podle indukčního předpokladu máme v konvexním $(n - 2)$-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_{n-2}$ zaručenou existenci soustavy $S_{k-1}^{(n-2)}$, pro niž card $S_{k-1}^{(n-2)} = c - 3$. Připojíme tedy ještě úhlopříčky A_1A_{n-2}, A_1A_{n-1} a $A_{n-2}A_n$, čímž je žádaná konstrukce provedena.

Věta 2. *Existuje-li soustava $S_k^{(n)}$ (kde $k \geqq 1$), pak*

$$n - k - 1 \leqq \text{card}\, S_k^{(n)} \leqq n + k - 3\,.$$

Důkaz. Soustavu $S_k^{(n)}$ spolu se stranami daného n-úhelníka lze považovat za rovinný graf o $n + k$ uzlech a h hranách (kde $h = n + 2k + \text{card}\, S_k^{(n)}$). Položíme-li $\sigma = \text{card}\, R_k^{(n)}$, platí podle Eulerovy věty [3])

$$\sigma = h - (n + k) + 1 = k + 1 + \text{card}\, S_k^{(n)}\,.$$

Podle lemmatu 1 je tedy card $S_k^{(n)} \geqq n - k - 1$. Abychom určili ještě horní odhad, uvažme, že $2h = n + \sum_{r=3}^{\infty} \sigma_r \geqq n + 3\sigma$; odtud card $S_k^{(n)} \leqq n + k - 3$.

---

[2]) Snadno však nahlédneme, že vztah card $S_k^{(n)} = n - k - 1$ necharakterisuje jen soustavy, v nichž všechny průsečíky leží na téže úhlopříčce (srovnej dále větu 3).

[3]) Viz *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936, str. 196.

Věta 3. *Nechť existuje soustava* $S_k^{(n)}$ $(k \geqq 1)$; *pak platí* card $S_k^{(n)} = n + k - 3$ *právě tehdy, neleží-li žádné dva průsečíky soustavy na téže úhlopříčce.*

Důkaz. Nechť žádné dva průsečíky soustavy $S_k^{(n)}$ neleží na téže úhlopříčce. Odstraňme k úhlopříček z $S_k^{(n)}$ tak, že z každých dvou úhlopříček procházejících jistým jejím průsečíkem ponecháme pouze jednu. Vznikne tak $S_0^{(n)}$, tedy card $S_k^{(n)} = k +$ card $S_0^{(n)} = n + k - 3$.

Nechť obráceně card $S_k^{(n)} = n + k - 3$. Pak všechny prvky z $R_k^{(n)}$ jsou trojúhelníky, neboť z opaku plyne $2h = n + \sum_{r=3}^{\infty} r\sigma_r > n + 3\sigma$ čili card $S_k^{(n)} < < n + k - 3$ (spor). Nechť nyní na jisté úhlopříčce leží aspoň dva různé průsečíky X, Y. Lze předpokládat, že uvnitř úsečky XY neleží už žádný průsečík. Tato úsečka je stranou ve dvou trojúhelnících XYZ, XYZ' obsažených v $R_k^{(n)}$ (body Z, Z' jsou různé). Protože X leží právě na dvou úhlopříčkách, přímky XZ a XZ' jsou totožné (společné označení p_X) a podobně i přímky YZ a YZ' (společné označení p_Y). Protože X leží na p_X a Y na p_Y, jsou p_X, p_Y dvě různé přímky. Bod Z leží současně na obou přímkách p_X, p_Y a totéž platí o bodu Z'. Tedy Z, Z' jsou totožné (spor).

Резюме

ЗАМЕТКА О ВЫПУКЛОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага.

(Поступило в редакцию 30/VII 1956 г.)

В этой заметке автор занимается решением вопросов, которые остались открытыми в его работе „О системах диагоналей в выпуклом n-угольнике“, *Časopis pro pěstování matematiky, 81* (1956), 157—161.

Пусть никакие три диагонали выпуклого n-угольника $(n > 3)$ не имеют общей точки пересечения. Множество диагоналей, определяющих в точности k точек пересечения диагоналей, причем прибавлением какой-либо дальнейшей диагонали число точек пересечения увеличится, обозначим через $S_k^{(n)}$. Пусть символ card $S_k^{(n)}$ означает число элементов множества $S_k^{(n)}$. В статье проводится оценка числа card $S_k^{(n)}$ в случае, когда k „сравнительно мало“ по отношению к n; доказаны следующие теоремы:

1. *Если* $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$ *и* c — *целое число, расположенное в интервале* $\langle n - k - 1; n + k - 3\rangle$, *то существует* $S_k^{(n)}$ *так, что* card $S_k^{(n)} = c$.

2. *Если существует* $S_k^{(n)}$ (*где* $k \geqq 1$), *то*

$$n - k - 1 \leqq \text{card}\, S_k^{(n)} \leqq n + k - 3\,.$$

Равенство card $S_k^{(n)} = n + k - 3$ *справедливо тогда и только тогда, кагда никакие две точки пересечения из* $S_k^{(n)}$ *не лежат на той же диагонали.*

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DAS KONVEXE POLYGON

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Eingelangt am 30. VII. 1956.)

Diese Bemerkung befasst sich mit offenen Fragen der Arbeit des Verfassers „O soustavách úhlopříček v konvexním n-úhelníku" (Über Systeme der Diagonalen im konvexen n-Eck), Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 157—161.

Wir betrachten nur so ein konvexes n-Eck, dessen keine drei Diagonalen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Wir bezeichnen mit $S_k^{(n)}$ so eine Menge der Diagonalen im n-Eck, die folgende zwei Eigenschaften hat: 1. $S_k^{(n)}$ enthält gerade k Schnittpunkte der Diagonalen; 2. durch Hinzufügen jeder weiteren Diagonalen des n-Ecks zu $S_k^{(n)}$ entstehen mindestens $k + 1$ Schnittpunkte. Es sei card $S_k^{(n)}$ die Elementanzahl der Menge $S_k^{(n)}$. In unserem Beitrag wird die Abschätzung von card $S_k^{(n)}$ unter der Voraussetzung durchgeführt, dass k eine „verhältnismässig kleine" Zahl in Bezug auf n ist. Es werden diese Sätze bewiesen:

1. *Wenn* $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$ *und* c *eine weitere ganze Zahl aus dem Interval* $\langle n - k - 1; n + k - 3\rangle$ *ist, dann existiert* $S_k^{(n)}$ *so, dass* card $S_k^{(n)} = c$ *ist.*

2. *Wenn* $S_k^{(n)}$ (*für* $k \geqq 1$) *existiert, dann ist*

$$n - k - 1 \leqq \text{card } S_k^{(n)} \leqq n + k - 3\,.$$

Die Gleichung card $S_k^{(n)} = n + k - 3$ *gilt dann und nur dann, wenn keine zwei Schnittpunkte von* $S_k^{(n)}$ *auf der gleichen Diagonalen liegen.*