Jaroslav Kurzweil

Sur l'équation $\ddot{x} + f(t)x = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 218--226

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117256`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

SUR L'ÉQUATION $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Reçu le 4 juin 1956.) DT:517.942

On donne une condition suffisante pour que toute solution de l'équation $\ddot{x} + f(t)\,.\,x = 0$ (avec $f(t)$ tendant vers ∞ d'une manière monotone, lorsque $t \to \infty$) tende vers zéro lorsque $t \to \infty$. Cette condition est plus générale que celles données par G. ARMELLINI et G. SANSONE. On traite avec la même méthode le cas où $f(t)$ tend vers zéro d'une manière monotone.

Le but de ce travail est de trouver une condition que doit satisfaire une fonction $f(t)$, tendant d'une manière monotone vers ∞ lorsque t tend vers ∞, pour que toutes les solutions de l'équation

$$\ddot{x} + f(t)\,x = 0 \tag{1}$$

tendent vers zéro lorsque t tend vers ∞.

Le même problème a été étudié par plusieurs auteurs. Afin de pouvoir faire passer en revue les résultats obtenus jusqu'à présent, nous allons introduire les notations suivantes: Nous supposons partout que la fonction f soit définie pour $t \geqq 0$, continue et positive. Nous dirons que f appartient à l'ensemble A si $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ et qu'elle admette une dérivée $\dot{f}$, continue et non-croissante. Nous dirons que f appartient à l'ensemble B si $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ et qu'elle admette une dérivée $\dot{f}$, continue et non-décroissante. Désignons par R la demi-droite $t \geqq 0$. Soit

$$0 \leqq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots, \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\,. \tag{2}$$

Nous appelons densité de l'ensemble P le nombre $h(P)$ défini par

$$h(P) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)}{b_n}\,.$$

Nous dirons que la fonction f, admettant une dérivée continue et non-négative $\dot{f}$, appartient à l'ensemble C s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\int\limits_{R-P} \frac{\dot{f}}{f}\, dt = \infty$ pour tout ensemble P déterminé par les relations (2) et de densité $h(P) < \varepsilon$. Nous écrirons $\mathsf{x} \to 0$ pour exprimer le fait que toutes les solutions de l'équation (1) tendent vers zéro.

Nous allons présenter d'abord deux résultats s'opposant l'un à l'autre.

Théorème 1. $f \in \mathsf{B}, \dfrac{f\left(t + \dfrac{1}{f(t)}\right)}{f(t)} \to 1 \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

Théorème 2. $f \in \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

Ces deux théorèmes ont été démontrés par M. M. Biernacki dans son travail [1]. Un théorème plus général a été énoncé par M. G. Armellini dans le travail [2], savoir le

Théorème 3. $f \in \mathsf{C} \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

La démonstration du théorème 3 donnée par M. G. Armellini n'est pas complète. Le théorème 3 a été complètement démontré dans le travail [3] de M. G. Sansone et dans le travail [4] de M. L. Tonnelli[1]).

La démonstration du théorème 3 donnée par M. L. Tonnelli est reproduite dans la monographie [5] de M. G. Sansone, II, chap. VII, § 4, 9a. Le théorème 3 implique les théorèmes 1 et 2, car $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$, $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$.[2])

Un autre théorème du même type a été démontré par M. G. Sansone. Nous dirons d'une suite $\{t_n\}$ qu'elle est une τ-suite lorsque

$$0 \leqq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots;\ t_{n+1} - t_n \leqq t_n - t_{n-1};(t_{n+1} - t_n) \to 0;\ t_n \to \infty.^{3)}$$

Une fonction f admettant une dérivée continue et non-négative $\dot{f}$ sera dite appartenir à l'ensemble D si pour toute τ-suite on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \min_{t_n \leqq t \leqq t_{n+1}} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \infty .$$

Comme pour $P = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^n + 1)$ on a $h(P) = 0$, il est aisé de construire une fonction f telle que $f \in \mathsf{D}$, $f \bar{\in} \mathsf{C}$. Pour qu'une fonction f n'appartienne pas à D,

---

[1]) Les travaux [3] et [4] ne sont pas accessibles à l'auteur.

[2]) Ces deux relations résultent du théorème 9 (voir les conséquences (δ), (ξ); on peut aussi les démontrer directement sans difficultés.

[3]) *M. G. Sansone* a supposé encore $\overline{\lim} \dfrac{t_{n+1} - t_n}{t_n - t_{n-1}} = 1$, or cela résulte déjà des conditions citées (voir [5] II, chap. VII, § 4, 9b).

il suffit que $\frac{\dot{f}(t_n)}{f(t_n)}$ tende assez rapidement vers zéro pour une τ-suite $\{t_n\}$ choisie convenablement; donc il existe une fonction f telle que $f \in \mathsf{C}$, $f \tilde{\in} \mathsf{D}$. M. G. Sansone a démontré dans [3] le théorème que voici:

Théorème 4. $f \in \mathsf{D} \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

Le théorème 4 et quelques conséquences tirées de lui sont reproduits (sans démonstrations) dans la monographie [5] de M. Sansone.

Enfin, M. M. Zlámal, dans son travail [6] (théorème 7) a démontré le résultat suivant: Si une fonction $f(t) >$ const > 0 est continue et que la fonction $(f(t))^{-\frac{1}{4}}$ soit convexe, alors pour toute solution de (1) on a

$$x(t) = (f(t))^{-\frac{1}{4}} [x_0 \sin (\int_0^t (f(s))^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)]\,,$$

$$\dot{x}(t) = (f(t))^{\frac{1}{4}} [x_0 \cos (\int_0^t (f(s))^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)]\,.^{4})$$

Soit E l'ensemble des fonctions f continues et telles que $(f(t))^{-\frac{1}{4}}$ est convexe et que $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Du résultat de M. M. Zlámal, cité ci-dessus découle le

Théorème 5. $f \in \mathsf{E} \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

Nous allons faire voir qu'il est possible de modifier, d'une manière assez simple, le théorème 3 de façon que les théorèmes 4 et 5 en deviennent des conséquences. Définissons l'ensemble F: Une fonction f, continue et non-décroissante appartient à l'ensemble F si l'on peut choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $\int_H \mathrm{d} \log f = \infty$ pour tout ensemble ouvert H vérifiant

$$\liminf_{t \to \infty} \mu(H \cap \langle t, t+1 \rangle) > 1 - \varepsilon\,.^{5})$$

Théorème 6. $f \in \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{x} \to 0$.

On peut démontrer le théorème 6 de la même manière comme M. Tonelli a démontré le théorème 3. Posons

$$\lambda^2(t) = \frac{\dot{x}^2(t)}{f(t)} + x^2(t)$$

---

[4]) On peut démontrer que ces formules asymptotiques sont valables aussi dans le cas où $f(t) >$ const > 0 et $[f(t)]^{-\alpha}$ est convexe pour un α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

[5]) L'ensemble F ne changera pas si l'on se borne à des ensembles $H = R - P$ où P est défini par les relations (2). Cela peut se démontrer facilement, car pour tout ensemble borné ouvert H^* et pour tout $\eta > 0$ on peut construire un ensemble $L \subset H^*$ qui est la somme d'un nombre fini d'intervalles ouvertes disjoints et tel que l'on a

$$\mu(H^* - L) < \eta, \int_{H^* - L} \mathrm{d} \log f < \eta$$

(μ désignant la mesure de Lebesgue). Nous écrivons $H^* = H \cap (i + \eta_i, i + 1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ et choisissons les nombres η_i suffisamment petits.

où $x(t)$ est une solution non-triviale de (1), d'ailleurs quelconque. Un rôle substantiel est joué ici par l'identité

$$\lambda^2(t_2) = \lambda^2(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} (\lambda^2(t) - x^2(t)) \, \mathrm{d} \log f(t) \, .^{6)} \tag{3}$$

Soient $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$ tous les zéros de l'intégrale $x(t)$. Comme $f(t) \to \infty$ ($\int_R \mathrm{d} \log f = \infty$) on a $\tau_{j+1} - \tau_j \to 0$. Nous pouvons nous servir du même procédé comme M. L. Tonnelli et nous renvoyons nos lecteurs au travail [4], ou bien à la monographie [5] II, chap. VII, § 4, 9a.

Le théorème 6 est évidemment une généralisation du théorème 3 (voir la la note[5])). Nous allons montrer que le théorème 4 résulte également du théorème 6, c'est-à-dire que $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}$. Dans ce but, nous introduisons une autre définition de l'ensemble F, équivalente à celle donnée ci-dessus.

Soit G l'ensemble des fonctions continues, non-décroissantes et telles que

$$\int_H \mathrm{d} \log f = \infty$$

pour tout ensemble $H \subset R$, ouvert et vérifiant

$$\lim_{t \to \infty} \mu(H \cap \langle t, t+1 \rangle) = 1 .$$

Nous allons démontrer le

---

[6]) Pour des raisons de rigueur et d'intégrité nous allons démontrer l'identité (3). En vertu de la formule d'integration par parties (voir [7], § 14, théorème 14,1) nous avons

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\, \dot{x}^2(t)}{f(t)} + \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t) \, \mathrm{d} \left(\frac{1}{f(t)} \right) = \frac{\dot{x}^2(t_2)}{f(t_2)} - \frac{\dot{x}^2(t_1)}{f(t_1)} .$$

Comme on a

$$\frac{1}{f(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dot{x}^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^2(t) = 0 ,$$

nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t) \, \mathrm{d} \left(\frac{1}{f(t)} \right) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{x}^2(t)}{f(t)} \cdot f(t) \, . \, \mathrm{d} \left(\frac{1}{f(t)} \right) = \lambda^2(t_2) - \lambda^2(t_1) .$$

De la formule citée résulte ensuite que pour tout intervalle $\langle t_3, t_4 \rangle$ on a

$$\int_{t_3}^{t_4} \frac{1}{f(t)} \, \mathrm{d}f(t) = - \int_{t_3}^{t_4} f(t) \, \mathrm{d} \left(\frac{1}{f(t)} \right)$$

d'où, en vertu d'un théorème sur la substitution dans une intégrale de Lebesgue-Stieltjes (voir [8], théorème 153), on obtient

$$\int_{t_3}^{t_4} \frac{1}{f(t)} \, \mathrm{d}f(t) = \int_{f(t_3)}^{f(t_4)} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \log \frac{f(t_4)}{f(t_3)} = \int_{t_3}^{t_4} \mathrm{d} \log f(t)$$

et de là il résulte enfin

$$\lambda^2(t_2) - \lambda^2(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{x}^2(t)}{f(t)} \, \mathrm{d} \log f(t) = - \int_{t_1}^{t_2} (\lambda^2(t) - x^2(t)) \, \mathrm{d} \log f(t) .$$

Théorème 7. $\mathsf{F} = \mathsf{G}$.

Démonstration. La relation $\mathsf{F} \subset \mathsf{G}$ est évidente. Soit $f \tilde{\in} \mathsf{F}$. Alors il existe une suite d'ensembles ouverts $Q_k \subset R$, $k = 1, 2, \ldots$ et telle que l'on a

$$\mu(Q_k \cap \langle t, t+1 \rangle) > 1 - 2^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, t \geqq T_k, \quad \int_{Q_k} \mathrm{d} \log f < \infty .$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que

$$\mu(Q_k \cap \langle t, t+1 \rangle) > 1 - 2^{-k} \quad \text{pour} \quad t \geqq 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons $a_{kl} = \int\limits_{Q_k \cap \langle l, l+1 \rangle} \mathrm{d} \log f$; $l = 0, 1, 2, \ldots$ Alors nous avons évidemment $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{kl} < \infty$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ et il existe une suite non-décroissante d'indices k_l (avec $k_l \to \infty$ lorsque $l \to \infty$) et telle que $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{k_l l} < \infty$. Soit $Q = \sum\limits_{l=0}^{\infty} Q_{k_l} \cap (l, l+1)$. Q est évidemment ouvert, $\int\limits_Q \mathrm{d} \log f < \infty$, $\mu(Q \cap \langle t, t+1 \rangle) \to 1$ lorsque $t \to \infty$, donc $f \tilde{\in} \mathsf{G}$, ce qui implique $\mathsf{G} \subset \mathsf{F}$. Maintenant nous allons démontrer le

Théorème 8. $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}$.

Supposons que nous ayons $f \tilde{\in} \mathsf{F}$ et que f admette en même temps une dérivée continue, non-négative. Comme $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ (d'apres le théorème 7), il existe un ensemble ouvert $Q \subset R$ tel que $\mu(Q \cap \langle t, t+1 \rangle) \to 1$ lorsque $t \to \infty$, $\int\limits_Q \mathrm{d} \log f < < \infty$. Il est aisé de construire une τ-suite $\{t_n\}$ telle qu'on ait $1 > t_{n+1} - t_n > > 2\mu(\langle t, t+1 \rangle - Q)$ pourvu que $t_n - 1 \leqq t \leqq t_n + 1$. On aura donc à plus forte raison

$$t_{n+1} - t_n > 2\mu(\langle t_n, t_{n+1} \rangle - Q), \quad \mu(\langle t_n, t_{n+1} \rangle \cap Q) > \frac{1}{2} (t_{n+1} - t_n) .$$

De là s'ensuit

$$(t_{n+1} - t_n) \cdot \min_{t_n \leqq t \leqq t_{n+1}} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} < 2 \cdot \frac{1}{2} (t_{n+1} - t_n) \inf_{t \in Q \cap \langle t_n, t_{n+1} \rangle} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \leqq 2 \int\limits_{Q \cap \langle t_n, t_{n+1} \rangle} \mathrm{d} \log f(t) ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \min_{t_n \leqq t \leqq t_{n+1}} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} < 2 \int_Q \mathrm{d} \log f(t) < \infty$$

et alors $f \tilde{\in} \mathsf{D}$. Donc $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}$.

Enfin nous allons revenir encore au théorème 5 et démontrer le

Théorème 9. *Soit $P \subset R$ un ensemble défini par les relations* (2) *et tel que $h(P) < \frac{1}{8}$. Alors si $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ et qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que la fonction $(f(t))^{-\alpha}$ soit convexe, on aura*

$$\int_{R-P} \mathrm{d} \log f(t) = \infty .$$

Démonstration. Supposons que les conditions du théorème 9 soient satisfaites. Posons $g(t) = (f(t))^{-\alpha}$. Nous avons à démontrer que

$$\int_{R-P} \mathrm{d} \log g(t) = -\infty$$

en supposant $g(t)$ convexe et tel que $g(t) \to 0$. Nous y ajoutons d'abord encore la supposition que la fonction $g(t)$ admette une dérivée continue de second ordre $\ddot{g}(t)$. Or la fontion $g(t)$ étant convexe, $g(t) \to 0$, et $g(t) > 0$, nous avons $\dot{g}(t) < 0$, $\ddot{g}(t) \geqq 0$. Soient

$$I_n = \langle 2^n, 2^{n+1} \rangle\,, \quad S_n = I_n \cap P\,, \quad T_n = I_n - P\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En vertu de nos suppositions nous avons $\mu(S_n) < 2^{n-2}$, $\mu(T_n) > 3 \,.\, 2^{n-2}$ Ecrivons $\lambda_n = -\int\limits_{S_n} \frac{\dot{g}}{g} \,\mathrm{d}t$, $\nu_n = -\int\limits_{T_n} \frac{\dot{g}}{g} \,\mathrm{d}t$ et comparons les nombres ν_n et λ_{n+1}. On a

$$\lambda_{n+1} \leqq \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})} \,.\, \mu(S_{n+1}) \leqq \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})} \,.\, 2^{n-1}$$

où

$$t_{n+1} \in \bar{S}_{n+1}\,, \quad \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})} = \max_{t \in \bar{S}_{n+1}} \frac{|\dot{g}(t)|}{g(t)}\,.$$

Ensuite, on a pour tout $t \in T_n$

$$\frac{|\dot{g}(t)|}{g(t)} = \frac{|\dot{g}(t)|}{\int\limits_t^{t_{n+1}} |\dot{g}(\tau)| \,\mathrm{d}\tau + g(t_{n+1})} \geqq \frac{|\dot{g}(t)|}{|\dot{g}(t)|(t_{n+1} - t) + g(t_{n+1})} \geqq$$

$$\geqq \frac{|\dot{g}(t)|}{|\dot{g}(t)| \,.\, 3 \,.\, 2^n + g(t_{n+1})} \geqq \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{|\dot{g}(t_{n+1})| \,.\, 3 \,.\, 2^n + g(t_{n+1})} =$$

$$= \frac{|\dot{g}(t_{n+1}|}{g(t_{n-1})} \left(1 + 3 \,.\, 2^n \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})}\right)^{-1}$$

et de là il s'ensuit que

$$\int\limits_{T_n} \frac{|\dot{g}(t)|}{g(t)} \,\mathrm{d}t \geqq \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})} \left(1 + 3 \,.\, 2^n \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})}\right)^{-1} \,.\, \mu(T_n) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{4} \,.\, 3 \,.\, 2^n \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})} \left(1 + 3 \,.\, 2^n \frac{|\dot{g}(t_{n+1})|}{g(t_{n+1})}\right)^{-1}, \quad \nu_n \geqq \frac{1}{4} \frac{6\lambda_{n+1}}{6\lambda_{n+1} + 1} \tag{4}$$

On a évidemment $\sum\limits_{n \, 1}^{\infty} (\lambda_n + \nu_n) = \infty$. Si l'on avait $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$ on aurait, en vertu de l'inégalité (4), $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, or cela est en contradiction avec ce qui précède; donc on a $\int\limits_{R \;\, P} \mathrm{d} \log g(t) = \infty$ dans le cas particulier où $g(t)$ admet une dérivée continue de second ordre $\ddot{g}(t)$. Dans le cas général, étant donnés la fonction convexe $g(t)$, un ensemble P et une suite arbitraire de nombres positifs ε_n, il est facile de construire une fonction $h(t)$ admettant une dérivée de second ordre et telle que

$$g(a_n) < h(a_n) < g(a_n) + \varepsilon_{2n-1}\,; \quad g(b_n) < h(b_n) < g(b_n) + \varepsilon_{2n+2}\,.$$

Comme

$$\int_{b_n}^{a_{n+1}} \mathrm{d} \log g(t) = \log g(a_{n+1}) - \log g(b_n)\,, \quad \int_{b_n}^{a_{n+1}} \mathrm{d} \log h(t) = \log h(a_{n+1}) - \log h(b_n)$$

et comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{a_{n+1}} \mathrm{d} \log h(t) = \int_{R-P} \mathrm{d} \log h(t) = \infty\,, \quad (b_0 = 0)$$

nous avons également $\int_{R-P} \mathrm{d} \log g(t) = \infty$ pourvu que nous ayons choisi les nombres ε_i suffisamment petits. Le théorème 9 est par là démontré. Nous allons déduire maintenant quelques conséquences du théorème 9.

(α) $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}$; le théorème 5 découle donc du théorème 6.

(β) Si, au théorème 5, nous supposons en plus que la fonction f admette une dérivée continue, le théorème 5 devient alors une conséquence du théorème 3.

(γ) Si $f(t) \to \infty$ et qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que la fonction $(f(t))^{-\alpha}$ soit convexe, on a $\mathsf{x} \to 0$.

(δ) $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$; le théorème 2 découle donc du théorème 3. (Si f ne croît pas, alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f)^{-1} = -\dot{f}(f)^{-2}$ ne décroît pas, donc $(f)^{-1}$ est convexe.)

(ε) $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$; le theorème 1 découle donc du théorème 3. (Soit $f \in \mathsf{B}$, donc $\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \geqq \frac{\dot{f}(t)}{f(0) + \dot{f}(t)\,.\,t} \geqq \frac{1}{t}$ or comme $g(t) \equiv t$ appartient à A et par là en vertu de (δ) aussi à C, on a $f \in \mathsf{C}$.)

Envisageons encore sommairement le cas où $f(t) \to 0$. Dans ce cas, on peut démontrer d'une manière analogue le

Théorème 10. *Soit $f(t)$ une fonction continue, non-croissante avec $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Supposons qu'il y ait un $\varepsilon > 0$ tel que $\int_{R-P} \mathrm{d} \log f(t) = -\infty$ pour tout ensemble P défini par* (2) *et vérifiant $h(P) < \varepsilon$. Supposons ensuite que les intégrales de l'équation* (1) *oscillent. On a alors $\frac{\dot{x}^2(t)}{f(t)} + x^2(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ pour toute solution non-triviale $x(t)$ de l'équation* (1).

Comme, dans ce cas-là, la distance séparant deux zéros voisins de l'intégrale $x(t)$ de l'équation (1) tend vers ∞ lorsque $t \to \infty$, il ne suffit pas de supposer que $\mu((R - P) \cap \langle t, t + 1\rangle) > 1 - \varepsilon$. Il s'ensuit du théorème 9 que nous pouvons appliquer le théorème 10 spécialement dans le cas où il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que la fonction $(f(t))^\alpha$ est convexe.

LITERATURA

[1] *M. Biernacki*: Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)\,x = 0$, Prace Mat. Fiz., *40* (1933), 163–171.

[2] *G. Armellini*: Sopra un'equazione differenziale della Dinamica, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (*6*), *21* (1935), 111–116.

[3] *G. Sansone*: Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936, 385 — 403.

[4] *L. Tonneli*: Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936, 272–277.

[5] *G. Sansone*: Equazioni differenziali nel campo reale, Bologna 1949; ruský překlad Moskva 1954.

[6] *M. Zlámal*: Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Чехосл. мат. ж. *6* (*81*) 1, 75–93.

[7] *S. Saks*: Theory of the integral, Monografie Matematyczne VII, Warszawa-Lwów 1937.

[8] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.

Výtah

O ROVNICI $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Došlo dne 4. června 1956.)

Snadno lze sestrojiti spojitou funkci $f(t)$ (pro $t \geqq 0$), $f(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$ tak, že rovnice (1) $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$ má řešení, které nekonverguje k nule pro $t \to \infty$. Dodatečné podmínky postačující k tomu, aby všechny integrály rovnice (1) konvergovaly k nule pro $t \to \infty$, jsou uvedeny v pracích [1] — [4]; jiná podmínka plyne z věty 7 obsažené v práci [6]. V této práci je dokázáno, že všechny integrály rovnice (1) konvergují k nule, je-li splněna tato podmínka:

Funkce $f(t)$ je spojitá monotonní a existuje takové $\varepsilon > 0$, že platí $\int_H \mathrm{d} \log f(t) = \infty$, jakmile H je otevřená množina splňující vztah $\liminf_{t\to\infty} \mu(H \cap \langle t, t + 1\rangle) > 1 - \varepsilon$ (μ znamená Lebesgueovu míru).

Důkaz tohoto tvrzení je sice modifikací důkazu TONNELLIOVA (viz [4] nebo [5], druhý díl, kap. VII); ukazuje se však že uvedená podmínka zahrnuje v sobě všechny citované podmínky, zatím co z podmínky udané G. Armellinim v práci [2] neplyne Sansoneova podmínka z práce [3] a ze Sansoneovy podmínky neplyne podmínka Armelliniho.

Konečně je formulována věta obdobného typu pro případ, že kladná funkce $f(t)$ konverguje monotonně k nule pro $t \to \infty$. V tomto případě pro každý integrál rovnice (1) za jistého dodatečného předpokladu platí $\dot{x}^2(t)/f(t) + x^2(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$.

Резюме

ОБ УРАВНЕНИИ $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

(Поступило в редакцию 4/VI 1956 г.)

Легко можно построить непрерывную функцию $f(t)$ (для $t \geqq 0$), $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, такую, что уравнение (1) $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$ имеет решение, которое при $t \to \infty$ не стремится к нулю. Добавочные условия, достаточные для того, чтобы все интегралы уравнения (1) стремились к нулю при $t \to \infty$ приведены в работах [1]—[4]; другое условие вытекает из теоремы 7, содержащейся в работе [6]. В настоящей работе доказано, что все интегралы уравнения (1) стремятся к нулю, если выполняется следующее условие:

Функция $f(t)$ непрерывна, монотонна, и сущесвтует $\varepsilon > 0$ такое, что $\int_H \mathrm{d}\log f(t) = \infty$, как только H является открытым множеством, удовлетворяющим условию $\liminf_{t \to \infty} \mu(H \cap \langle t, t+1 \rangle) > 1 - \varepsilon$ (μ означает меру по Лебегу).

Доказательство этого утверждения является только модификацией доказательства, данного Тонелли (см. [4] или [5], второй том, гл. VII); однако оказывается, что указанное выше условие заключает в себе все цитированные условия, в то время как из условия, поставленного Дж. Армеллини в работе [2] не вытекает условие Сансоне из работы [3] и, наоборот, из условия Сансоне не вытекает условие Армеллини.

Наконец, формулируется теорема аналогичного характера для случая, когда положительная функция $f(t)$ стремится монотонно к нулю при $t \to \infty$. В данном случае для каждого интеграла уравнения (1) при определенном добавочном условии справедливо $\dot{x}^2(t)/f(t) + x^2(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.