Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček
O konečných orientovaných grafech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 195--215

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117254

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O KONEČNÝCH ORIENTOVANÝCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 4. dubna 1956.)

DT: 519.5
513.34.001

Práce má čtyři části. Část I obsahuje definice základních pojmů. Tak basí hran (orientovaného) grafu G rozumíme jeho podgraf B takový, že každá hrana z B představuje jedinou dráhu spojující krajní uzly a ležící v B, zatím co ke každé hraně mimo B existuje dráha ležící v B a spojující krajní uzly. V části II studujeme base hran sítí (t. j. „úplných" orientovaných grafů). Podnět k úvahám v této části dala práce L. Rédeie [3]. Část III je věnována dobře orientovaným grafům (t. j. grafům, v nichž z každého uzlu můžeme dojít po dráze do každého dalšího). Ukazuje se souvislost s algebraickým pojmem nerozložitelné matice a odhad počtu cyklů dobře orientovaného grafu dává věta 11. Část IV si všímá acyklických grafů (t. j. grafů, v nichž neexistuje žádný cyklus).

I. Základní pojmy

Orientovaným grafem G rozumíme konečnou množinu $\Pi\{G\}$ prvků, jimž říkáme *uzly*, v níž je definována binární relace R, která je irreflexivní, t. j. pro každé x platí x non Rx. Dvojici uzlů x, y, pro něž platí xRy, nazveme *hranou* $\overrightarrow{xy}$ s *počátečním* uzlem x a *koncovým* uzlem y. Uzly x, y jsou pak *sousední*. Hrany $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$ jsou *opačně orientované*. Množinu hran orientovaného grafu G označíme $K\{G\}$. Nemůže-li vzniknout nedorozumění, píšeme místo $x \in \Pi\{G\}$ jen $x \in G$, místo $\overrightarrow{xy} \in K\{G\}$ jen $\overrightarrow{xy} \in G$. Je-li R symetrická relace, mluvíme o *neorientovaném* grafu G. Neorientovaný graf je tedy zvláštním případem orientovaného grafu, proto v případech, kdy nemůže dojít k nedorozumění, říkáme místo „orientovaný" graf pouze „graf".

Uzly grafu můžeme geometricky znázornit jako body v E_3, hrany jako oblouky spojující uzly ale nemající společných vnitřních bodů, při čemž šipkou vyznačujeme, který uzel hrany je počáteční a který koncový. U neorientovaného grafu místo hran $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$ mluvíme o hraně xy, kterou geometricky vyznačujeme jediným obloukem. Neklademe-li na relaci R požadavek irreflexivity (čili připouštíme-li, aby uzel byl spojen sám se sebou *smyčkou*), mluvíme o grafu v *širším smyslu*.

Jsou-li G_1 a G_2 dva grafy takové, že současně platí $\Pi\{G_1\} \subset \Pi\{G_2\}$, $K\{G_1\} \subset \subset K\{G_2\}$, říkáme, že G_1 je *podgrafem* grafu G_2. Neplatí-li dále současně $\Pi\{G_1\} = = \Pi\{G_2\}$, $K\{G_1\} = K\{G_2\}$, je G_1 *vlastním* podgrafem grafu G_2.

Stupněm uzlu u rozumíme počet hran, pro něž je u počátečním nebo koncovým uzlem. Uzel nultého stupně se nazývá *isolovaný*, uzel 1. stupně je *koncový*, uzel 2. stupně je *nerozvětvovací*, každý uzel aspoň 3. stupně pak *rozvětvovací*. Počet nerozvětvovacích uzlů grafu G označíme $\nu(G)$.

Řekněme, že dva grafy G_1 a G_2 jsou si *rovny* čili mají *stejnou strukturu*, existuje-li prosté zobrazení f množiny $\Pi\{G_1\}$ na $\Pi\{G_2\}$ takové, že $\overrightarrow{xy} \in G_1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overrightarrow{f(x)\, f(y)} \in G_2$.

V grafu G zaveďme místo hrany $\overrightarrow{uv}$ nový uzel x a hrany $\overrightarrow{ux}$, $\overrightarrow{xv}$. Řekněme, že takto sestrojený graf G' vznikl z grafu G *půlením hrany* $\overrightarrow{uv}$. Grafy G_1 a G_2 jsou *homeomorfní*, když buď mají stejnou strukturu nebo když půlením některých hran lze je převést na grafy téže struktury.

Jsou-li u, v dva různé uzly grafu G, nazveme *drahou* D prostou (konečnou) posloupnost uzlů $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ takovou, že $u_0 = u$, $u_k = v$ a že pro $1 \leqq i \leqq k$ je $\overrightarrow{u_{i-1}u_i} \in K\{G\}$. Říkáme pak, že D *spojuje* svůj *počáteční* uzel u s *koncovým* uzlem v; existenci takové dráhy zapisujeme $u \rightarrow v$. Uzel dráhy, který není ani počáteční, ani koncový, nazývá se *vnitřní*. Zavádíme i dráhy bez hran tím, že pro každý uzel u klademe $u \rightarrow u$. Podgraf C grafu G se nazývá *cesta*, je-li to buď dráha nebo vznikne-li z něho dráha tím, že některé jeho hrany nahradíme opačně orientovanými (cesta C má koncové uzly u, v, což píšeme $u \sim v$; pro každý uzel u klademe $u \sim u$). Graf G je *souvislý*, jestliže pro každou dvojici uzlů x, y je $x \sim y$. Souvislý graf K o n uzlech se nazývá *n-úhelník* (někdy též *kružnice*), je-li $\nu(K) = n$. Souvislý graf s alespoň dvěma uzly, neobsahující žádnou kružnici, se nazývá *strom*.

Graf G je *dobře orientovaný*[1]), když pro každou dvojici uzlů u, v platí $u \rightarrow v$. Dobře orientovaný graf je tedy souvislý. Dobře orientovaný n-úhelník se nazývá *cyklus*. Nahradíme-li v cyklu o n uzlech ($n > 2$) hranu $\overrightarrow{xy}$ hranou $\overrightarrow{yx}$, vznikne *skorocyklus* nad $\overrightarrow{yx}$ (Rédei [3] zvolil název *Fastzyklus*). Podgraf W grafu G se nazývá *dvojdráha*, je-li homeomorfní se skorocyklem a vnitřní uzly jedné z drah tvořících W jsou nerozvětvovací v G (této dráze pak říkáme *oblouk* grafu G).

---

[1]) Robbins [4] r. 1939 dokázal větu: Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby byl daný (konečný) souvislý graf G dobře orientovaný nebo aby se dal změnou orientace některých hran převést v dobře orientovaný graf, zní: Každá hrana grafu G leží v nějaké kružnici.

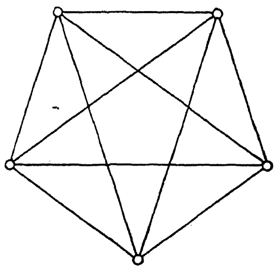
Analogickou větu pro nekonečné grafy dokázal r. 1941 L. Egyed. Jeho maďarsky psaná práce s německým resumé není u nás dosažitelná. (Mat. fis. Lap. *48*, str. 505—509.)

Podgraf B grafu G se nazývá *base hran* grafu G, má-li tyto vlastnosti:

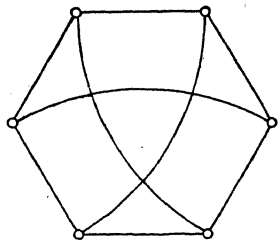
1. Je bez skorocyklů.

2. Je-li B vlastní podgraf C a C podgraf G, existuje v C skorocyklus nad jistou hranou $\overrightarrow{xy} \in K\{C\} - K\{B\}$.

Dá se dokázat, že každý graf obsahuje aspoň jednu basi hran ([1], str. 100) a že existují orientované grafy, v nichž lze udat více než jednu basi hran ([1], str. 92).



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Příklad 1. Je zřejmé, že base hran grafu G je dobře orientovaný graf právě tehdy, je-li G dobře orientovaný graf.

Most (souvislého grafu) je hrana, po jejímž odstranění se poruší souvislost. Na př. tedy koncová hrana je most.[2])

Uzel a grafu G se nazývá *artikulace*, vycházejí-li z něho dvě hrany, které současně neleží v téže kružnici grafu. Není-li a artikulací grafu G, nazveme jej *regulárním* uzlem grafu G. Graf, jehož všechny uzly jsou regulární, je *neseparabilní*, jinak je *separabilní*.[3])

Článkem grafu G rozumíme jeho neseparabilní podgraf, který není vlastním podgrafem v žádném neseparabilním podgrafu grafu G. Článek grafu se nazývá *koncový*, je-li právě jeden jeho uzel artikulací daného grafu. Vlastnosti artikulací a článků je možno studovat prostřednictvím theorie stromů. Je-li totiž dán souvislý graf G, definujme nový graf H takto:[4]) Množinu $\Pi\{H\}$ tvoří jednak artikulace grafu G (uzly 1. typu), jednak uzly 2. typu, z nichž každý nahrazuje jeden článek grafu G. Hrany definujme takto: Je-li a artikulace grafu G ležící v jeho článcích $G_1, G_2, \ldots, G_r$ a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_r$ příslušné uzly z H, zaveďme hrany $\overrightarrow{ag_i}$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Dá se dokázat, že H je strom.

[2]) *König* [1] nepočítá koncové hrany mezi mosty.

[3]) Názvy „neseparabilní" a „separabilní" uvádí *H. Whitney* [5].

[4]) V knize [1], str. 230, je konstrukce grafu H popsána nesprávně, neboť při postupu tam uvedeném nemusí být H strom.

Příklad 2. Souvislý separabilní graf G má aspoň dva koncové články. Sestrojíme-li totiž výše popsaným způsobem strom H, odpovídají si koncový článek grafu G a koncový uzel stromu H. D. KÖNIG však dokazuje ([1], str. 49), že každý strom má aspoň dva koncové uzly.

Poznámka 1. H. WHITNEY dokázal ([5], věta 11), že každý neseparabilní podgraf grafu G je zcela obsažen v jednom článku grafu G.

Rovinným grafem rozumíme graf, který se dá znázornit v E_2. KURATOWSKI dokázal r. 1930, že (neorientovaný) graf je rovinný právě tehdy, není-li žádný jeho podgraf homeomorfní s některým z grafů na obr. 1.

II. Base hran sítě

Síť je graf o alespoň dvou uzlech, který s každými dvěma svými uzly u, v obsahuje hranu $\overrightarrow{uv}$. V této kapitole budeme studovat base hran sítě. Příkladem takové base je cyklus procházející všemi uzly sítě. König (str. 102—103) ukazuje, že tento příklad je v síti base hran o nejmenším počtu hran. Pro stručnost říkáme dále v této kapitole místo „base hran sítě" jenom „base".[5])

Věta 1. *Souvislý graf je dobře orientovaný právě tehdy, když každá jeho hrana je v nějakém cyklu.*

Důkaz. Budiž G dobře orientovaný graf a $\overrightarrow{xy}$ jeho hrana. Platí $y \to x$, tedy $\overrightarrow{xy}$ leží v cyklu. Ať nyní G je souvislý a každá jeho hrana leží v nějakém cyklu. Zvolme dva různé uzly u, v grafu G. Platí $u \sim v$; ke každé cestě spojující u a v přiřaďme číslo p znamenající počet hran této cesty, které musíme nahradit opačně orientovanými, aby tato cesta byla drahou s počátečním uzlem u a koncovým v. Vyhledejme nyní cestu $C_{\min}$ s nejmenším p. Ukážeme, že zde $p = 0$. V opačném případě ať $\overrightarrow{xy}$ je jedna z hran, jejichž orientaci jsme měnili. Z existence cyklu nad $\overrightarrow{xy}$ plyne spor s tím, že $C_{\min}$ má nejmenší p. Platí tedy $u \to v$ a G je dobře orientovaný graf.

Věta 2. *Souvislý graf G je basí právě tehdy, když každý jeho článek je dobře orientovaný graf bez skorocyklů.*

Důkaz. a) Je-li každý článek souvislého grafu G dobře orientovaný, je G dobře orientovaný (plyne z věty 1.). Nechť nyní G je dobře orientovaný graf. Nad hranou $\overrightarrow{xy}$, zvolenou v jeho článku T, existuje cyklus Z. Protože Z je neseparabilní podgraf, plyne z poznámky 1, že Z leží celý v T. Tento článek je tedy dobře orientovaný (podle věty 1).

b) Je-li G bez skorocyklů, je též každý článek bez skorocyklů. Nechť nyní je každý článek bez skorocyklů. Pak v G nemůže existovat skorocyklus, neboť podle poznámky 1 by celý ležel v některém článku.

[5]) Můžeme tedy také říci, že base B je dobře orientovaný graf, v němž vynecháním kterékoliv hrany se poruší dobrá orientovanost.

Poznámka 2. Protože dobře orientovaný graf nemá isolované ani koncové uzly, každá artikulace base je uzel aspoň 4. stupně.

Lemma 1. *Budiž H dobře orientovaný vlastní podgraf base B. Pak neexistuje hrana $\overrightarrow{xy} \in B$ neležící v H, pro niž by bylo $x \in H$, $y \in H$; dále neexistují uzly $u \in B$, v_1, $v_2 \in H$ tak, že $\overrightarrow{uv_i} \in B$, $\overrightarrow{uv_i}$ non $\in H$ ani tak, že $\overrightarrow{v_iu} \in B$, $\overrightarrow{v_iu}$ non $\in H$ ($i = 1, 2$).*

Důkaz. Nechť existuje hrana $\overrightarrow{xy}$ uvedených vlastností. V H je $x \rightarrow y$, tedy v B existuje skorocyklus nad $\overrightarrow{xy}$, což je spor. Podobně se dokáže i další část tvrzení.

Lemma 1 nás vede (při daných B a H) ke konstrukci nového grafu $B(H)$. Uzly grafu $B(H)$ jsou jednak uzly z B nepatřící k H, jednak nový uzel ξ. Množinu hran grafu $B(H)$ tvoří všechny hrany z B nepatřící k H a s uzlem ξ jsou spojeny ty uzly z $B(H)$, které jsou v B spojeny s některým uzlem z H (zachová se i orientace).[6]) Graf $B(H)$ nazveme *kontrakcí grafu G podle H*.

Lemma 2. *Kontrakce $B(H)$ je opět base.*

Důkaz. Zvolme dva různé uzly u, v z $B(H)$; chceme dokázat $u \rightarrow v$. Je-li $u = \xi$, přistupme k basi B a v ní zvolme uzel $x \in H$. V B platí $x \rightarrow v$ a na příslušné dráze nechť x_0 je poslední uzel ležící v H. Část původní dráhy mezi x_0 a v leží v $B(H)$, tedy zde $\xi \rightarrow v$. Podobně z předpokladu $v = \xi$ plyne $u \rightarrow \xi$. Nechť tedy $u \neq \xi \neq v$. Přistupme k basi B, kde platí $u \rightarrow v$. Neobsahuje-li příslušná dráha žádný uzel z H, pak také v $B(H)$ platí $u \rightarrow v$. Obsahuje-li však tato dráha uzel $y \in H$, pak na ní vyhledáme první uzel této vlastnosti (označíme jej y_1) a poslední uzel této vlastnosti (označíme y_2). Část původní dráhy mezi u a y_1, jakož i část mezi y_2 a v ukazují, že v $B(H)$ je $u \rightarrow v$. Je tedy $B(H)$ dobře orientovaný graf.

Kdyby v $B(H)$ existoval skorocyklus S, pak S nutně obsahuje uzel ξ (jinak by existoval skorocyklus už v B). Přejdeme-li však k basi B, pak hrany skorocyklu S by měly s H společné uzly t_1, t_2. Není možné $t_1 = t_2$ a v případě $t_1 \neq t_2$ plyne z dobré orientovanosti podgrafu H existence skorocyklu v B. Kontrakce $B(H)$ tedy neobsahuje žádný skorocyklus.

Věta 3. *Neseparabilní base o n uzlech ($n \geqq 3$) neobsahuje žádný dvojúhelník.*

Důkaz. Nechť existuje neseparabilní base B s dvojúhelníkem $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$; odstraněním těchto dvou hran ať vznikne graf B'. V B' není $u \rightarrow v$. Graf B' obsahuje kromě u, v ještě další uzly; tak označme w uzel sousední k některému z uzlů u, v (na př. nechť $\overrightarrow{uw} \in B'$). Hrany $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{uw}$ leží v jisté kružnici grafu B, jinak by u byla artikulace grafu B. V B' tedy je $u \sim v$. Změnou orientace některých hran grafu B' (ležících na cestě C) se dá tedy dosáhnout toho, že v novém grafu je $u \rightarrow v$. Označme $p_{\min}$ nejmenší počet hran z B',

---

[6]) Tato konstrukce tedy (názorně řečeno) znamená, že necháme splynout H v jediný uzel. V dalším označujeme písmenem ξ uzel „vzniklý při kontrakci".

které musíme nahradit opačně orientovanými, aby v novém grafu B'' platilo $u \to v$. Je $p_{\min} > 0$. Zvolme v B' hranu $\overrightarrow{xy} \in C$, u níž bylo nutno měnit orientaci, aby vznikl graf B''. Budiž Z cyklus obsahující hranu $\overrightarrow{xy}$.

Odstraněním hrany $\overrightarrow{xy}$ se C rozpadne na dvě cesty (mezi u a y je C_1, mezi x a v je C_2). Probíhejme cyklus Z ve směru hrany $\overrightarrow{xy}$ (začínáme v x). Budiž při tom u_0 poslední uzel ležící v C_1 a při dalším postupu nechť v_0 je první uzel ležící v C_2. Existence dráhy mezi u_0 a v_0 (na cyklu Z) je spor s minimalitou čísla $p_{\min}$.

Poznámka 3. Obsahuje-li base B dvojúhelník $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$, kde u, v jsou rozvětvovací uzly, pak u, v jsou artikulacemi grafu B. Kdyby totiž na př. u byl regulární uzel, označme T článek, v němž u leží. Graf T je neseparabilní base (věta 2) s alespoň třemi uzly a dvojúhelníkem (spor s větou 3).

Existuje base B o libovolném počtu uzlů tak, že $\nu(B) = 2$; za B stačí volit graf, jehož každý článek je dvojúhelník a jen dva články jsou koncové. Dále platí

Věta 4. *Je-li B base, pak $\nu(B) \geqq 2$.*

Důkaz. Pro B o dvou uzlech je $\nu(B) = 2$. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo n_0 tak, že jistá base B_0 o n_0 uzlech má $\nu(B_0) < 2$. Zvolme cyklus Z tak, aby procházel nerozvětvovacím uzlem grafu B_0; má-li B_0 jen rozvětvovací uzly, zvolme za Z libovolný cyklus. Sestrojíme-li graf $B(Z)$, je počet uzlů této kontrakce menší než n_0. Platí však $\nu(B(Z)) < 2$, což je spor s minimalitou čísla n_0.

Důsledek věty 4 (důkaz je zřejmý): *Dobře orientovaný vlastní podgraf base B neobsahuje všechny nerozvětvovací uzly grafu B.*

Lemma 3. *Budiž H dobře orientovaný vlastní podgraf base B. Je-li a artikulace v kontrakci $B(H)$ ($a \neq \xi$), pak a je artikulace grafu B.*[7])

Důkaz. Nechť a je regulární uzel grafu B neležící v H a nechť je to artikulace grafu $B(H)$. Zřejmě existují dvě hrany grafu $B(H)$, pro něž je a počátečním nebo koncovým uzlem. Existuje zde dokonce taková dvojice hran h_1, h_2, která neleží v žádné kružnici grafu $B(H)$. V basi B jim odpovídají jisté hrany h'_1, h'_2, které leží v kružnici O.

Není možné, aby O neměla žádný uzel společný s H; pak by totiž v $B(H)$ existovala kružnice jdoucí hranami h_1, h_2. Také předpoklad, že O má s H společné uzly, vede k témuž sporu.

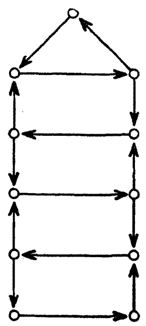
Než podáme přehled neseparabilních basí s „malým počtem" nerozvětvovacích uzlů, zavedeme ještě několik pojmů.

Nechť trojúhelníkový cyklus T je vlastní podgraf base B. Kontrakce $J = B(T)$ ať má uzel ξ za nerozvětvovací. Pak J nazveme *zjednodušením* grafu

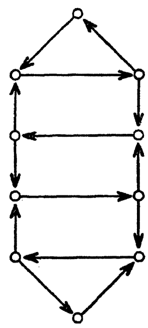
---

[7]) Názorně řečeno: kontrakcí nevznikají nové artikulace, leda uzel ξ.

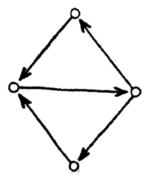
B. Zjednodušení neseparabilní base je zřejmě opět neseparabilní base (podle lemmatu 3 a poznámky 2). K libovolné basi B sestrojme posloupnost grafů $J_0, J_1, J_2, \ldots$ tak, že $J_0 = B$ a každý další člen (existuje-li) je zjednodušením předcházejícího. Z konečnosti grafu B plyne konečnost této posloupnosti: existuje zde graf J_s, k němuž neexistuje zjednodušení. Nazveme jej *redukovaným* grafem base B. Je-li $s = 0$, nazveme B *ireducibilní* basí. Označme dále W_{2k+1} ($k \geqq 1$) graf o $2k + 1$ uzlech $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}$, jehož hrany jsou $\overrightarrow{u_3u_1}$,



Obr. 2a.



Obr. 2b.



Obr. 2c.

$\overrightarrow{u_2u_4}$, $\overrightarrow{u_5u_1}$, $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ (pro $1 \leqq i \leqq 2k$, $i \neq 3$), $\overrightarrow{u_{2j+1}u_{2j-2}}$ (pro $3 \leqq j \leqq k$). Zřejmě W_{2k+1} je base.[8]) Je-li T trojúhelníkový cyklus base B, nazveme *zobecněným nerozvětvovacím uzlem* W (nad T) maximální vlastní podgraf struktury W_{2k+1} v grafu B, který obsahuje T jako podgraf a takový, že v $K\{B\} \dot{-} K\{W\}$ existují jen dvě hrany s jedním uzlem ve W, jedna s koncovým uzlem u_{2k} a druhá s počátečním u_{2k+1}. Je vidět, že kontrakci $B(W)$ můžeme najít prostřednictvím několika zjednodušení.

Lemma 4. *Všechny redukované grafy dané base B jsou si rovny.*

Důkaz. Je-li B ireducibilní, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}, \ldots$ $\ldots, W^{(t)}$ jsou všechny zobecněné nerozvětvovací uzly v B. Mají-li některé dva z podgrafů $W^{(i)}$ společný uzel, pak snadno nahlédneme, že jeden redukovaný graf base B je dvojúhelník.[9]) V tomto případě platí naše tvrzení (nahlédneme to indukcí podle počtu sestrojených zjednodušení).

Nechť konečně jsou podgrafy $W^{(i)}$ po dvou disjunktní. Sestrojme posloupnost kontrakcí

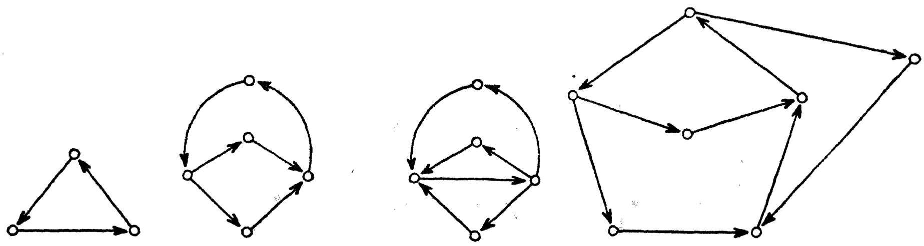
$$B^{(1)} = B(W^{(1)})\,, \quad B^{(2)} = B^{(1)}(W^{(2)}), \ldots, B^{(t)} = B^{(t-1)}(W^{(t)})\,.$$

[8]) Na obr. 2a) je znázorněn W_{11}.

[9]) Basi o 10 uzlech, jejímž redukovaným grafem je dvojúhelník, udává obr. 2b), basi o 4 úhlech pak obr. 2c).

Graf $B^{(t)}$ je zřejmě ireducibilní a můžeme k němu dojít též prostřednictvím několika zjednodušení. Je to tedy redukovaný graf base B, a to jediný (vzhledem k disjunktnosti podgrafů $W^{(i)}$). Důkaz je podán.

Je-li $m \geqq 1$, existuje neseparabilní base B' o $2m$ uzlech tak, že $\nu(B') = 2$ (jejím redukovaným grafem je dvojúhelník).[9] Existuje tedy i neseparabilní base B'' o $2m + 1$ uzlech tak, že $\nu(B'') = 3$ (stačí v předcházejícím grafu provést půlení některé hrany — viz obr. 2a)). Dále platí



Obr. 3a. Obr. 3b. Obr. 3c. Obr. 3d.

Věta 5. *Je-li B neseparabilní base o $2m + 1$ uzlech, je $\nu(B) \geqq 3$.*

Důkaz. Je-li $m = 1$, je B cyklus, tedy $\nu(B) = 3$. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo m_1 tak, že pro jistou neseparabilní basi B_1 o $2m_1 + 1$ uzlech je $\nu(B_1) < 3$. Pak podle věty 4 je $\nu(B_1) = 2$. Zvolme cyklus Z_ν obsahující jeden z nerozvětvovacích uzlů grafu B_1 (z důsledku věty 4 plyne, že obsahuje právě jeden takovýto uzel). Označme k počet hran v Z_ν a sestrojme $B_2 = B_1(Z_\nu)$. Nemůže být $k \geqq 4$ (pak by $\nu(B_2) = 1$, což odporuje větě 4) ani $k = 2$ (věta 3). Případ $k = 3$ znamená, že graf B_2 má $2m_1 - 1$ uzlů a je $\nu(B_2) = 2$. Podle předpokladu o m_1 je tedy B_2 separabilní. Jeho artikulace však není ani uzel ξ (poznámka 2), ani žádný další uzel (lemma 3). Došli jsme ke sporu a důkaz je podán.

Pro stručnost vyjadřování položme nyní $\varrho_n = 2$ při n sudém, $\varrho_n = 3$ při n lichém. Platí

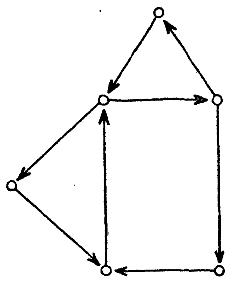
Věta 6. *Ireducibilní neseparabilní base B o n uzlech, pro něž $\nu(B) = \varrho_n$, jsou právě tyto:* a) *je-li n sudé, je B dvojúhelník;* b) *je-li n liché, je B jedním z grafů na obr.* 3.

Důkaz. Existují-li ještě jiné ireducibilní neseparabilní base, budiž B_0 jedna z nich o n_0 uzlech ($n_0 > \varrho_{n_0}$). Zvolme v ní cyklus Z_ν s nerozvětvovacím uzlem (Z_ν je vlastní podgraf); ať k je počet jeho hran. Je $k \geqq 3$ (věta 3). Kontrakce $B_1 = B_0(Z_\nu)$ má $n_0 - k + 1$ uzlů.

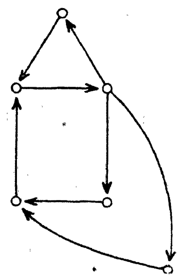
a) Při n_0 sudém není $k \geqq 4$, neboť pak by bylo $\nu(B_1) \leqq 1$ (spor s větou 4). Je-li $k = 3$, je v kontrakci B_1 uzel ξ buď rozvětvovací (pak je však $\nu(B_1) \leqq 1$) nebo nerozvětvovací (pak B_1 je zjednodušení base B_0 — spor s ireducibilitou).

b) Při n_0 lichém leží v Z_ν nejvýše dva nerozvětvovací uzly grafu B_0 (důsledek věty 4).

Leží-li tam dva, je $\nu(B_1) < 3$, tedy $\nu(B_1) = 2$, a proto $k = 4$. Uzel ξ kontrakce B_1 je pak nerozvětvovací, tedy B_1 je podle lemmatu 3 a poznámky 2 neseparabilní. Je-li B_1 ireducibilní, pak podle odstavce a) je $n_0 - k + 1 = 2$, čili $n_0 = 5$. Snadno nahlédneme, že potom jedinou basi B_0 o pěti uzlech, pro niž B_1 je dvojúhelník, přináší obr. 3b) (spor). Nechť B_1 není ireducibilní. Existuje v něm tedy cyklus T tak, že $B_1(T)$ je zjednodušení base B_1. Neprochází-li T uzlem ξ kontrakce B_1, pak T leží také v B_0 (spor s ireducibilitou). Leží-li ξ v cyklu T, pak ξ je jedním ze dvou nerozvětvovacích uzlů neseparabilní base B_1. Podle věty 5 má pak B_1 sudý počet uzlů. Podle odstavce a) jeho redukovaným grafem je dvojúhelník, tedy B_0 není ireducibilní (spor).



Obr. 4a.



Obr. 4b.

Leží-li v Z_ν jen jeden nerozvětvovací uzel, nemůže být $k \geqq 6$, neboť pak by bylo $\nu(B_1) = 2$ a uzel ξ v kontrakci B_1 by byl aspoň 5. stupně. Předpoklad, že B_1 je neseparabilní, zamítneme takto: Podle věty 5 má B_1 sudý počet uzlů, podle odstavce a) tedy známe jeho strukturu, ale zde rozvětvovací uzly jsou 3. stupně. Nechť B_1 je tedy separabilní; pak artikulaci této kontrakce představuje uzel ξ. Kdyby graf B_1 měl aspoň tři články, pak každý z nich má aspoň dva nerozvětvovací uzly, což vede ke sporu $\nu(B_1) \geqq 3$. Kontrakce B_1 má tedy dva články (v každé po jednom nerozvětvovacím uzlu) a uzel ξ je v každém článku nerozvětvovací, tedy v B_1 je to uzel 4. stupně (spor).

Zbývající případy jsou $k = 3; 4; 5$.

I. Je-li kontrakce B_1 separabilní, má artikulaci ξ a právě dva články, z nichž každý má sudý počet uzlů. Zřejmě má tedy lichý počet uzlů $n_0 - k + 1$, čili $k \neq 4$. Případ $k = 3$ vede k typu c) a $k = 5$ k typu d) (spor).

II. Je-li B_1 neseparabilní, je vyloučen případ $k = 5$ (věta 5). Je-li $k = 4$, nemůže být B_1 ireducibilní (pak by to totiž byl dvojúhelník, což je ve sporu s tím, že uzel ξ je rozvětvovací v kontrakci B_1). Opak však vede pro B_0 k typu d) (spor). Je-li $k = 3$, musí být ξ rozvětvovací v kontrakci B_1, jinak by B_0 nebyl ireducibilní. Je-li rozvětvovací, je $\nu(B_1) = 2$ (spor s větou 5). Důkaz je podán.

Obr. 4 ukazuje, že existuje neseparabilní base B se sudým počtem uzlů, pro niž $\nu(B) = 3$.

Je tedy též zřejmá existence neseparabilní base B' o lichém počtu uzlů tak, že $\nu(B') = 4$ (provedeme v obr. 4 půlení některé hrany). Nyní platí

Věta 7. *Budiž B ireducibilní neseparabilní base o n uzlech (n sudé). Nechť $\nu(B) = 3$. Pak B má strukturu z obr.* 4a) *nebo* 4b).

Důkaz. Zvolme v B cyklus Z_ν s nerozvětvovacím uzlem. Ten nemůže obsahovat dva nerozvětvovací uzly z B, neboť pak by konktrace ${}_1B = B(Z_\nu)$ měla $\nu({}_1B) = 2$, uzel ξ by v ní byl nerozvětvovací, tedy Z_ν by byl čtyrúhelník; ${}_1B$ by byla neseparabilní, tedy by měla sudý počet uzlů (věta 5). Avšak ${}_1B$ má $n - 3$ uzly, což je liché číslo (spor).

Nechť Z_ν má jen jeden nerozvětvovací uzel (k je počet hran v Z_ν).

Je-li ${}_1B$ separabilní, je jeho jedinou artikulací uzel ξ (lemma 3), který je tedy v ${}_1B$ rozvětvovací (poznámka 2). Je tudíž $\nu({}_1B) = 2$ a z úvahy o nerozvětvovacích uzlech ve článcích grafu ${}_1B$ vidíme, že ${}_1B$ má dva články; jsou to dvojúhelníky, tedy $n - k + 1 = 3$. Artikulace ξ je v ${}_1B$ uzel 4. stupně, tedy $k \leqq 5$ (a ovšem $k \geqq 3$). Tomu vyhovuje jen $n = 6$, $k = 4$ a B má pak zřejmě strukturu z obr. 4a) nebo 4b).

Je-li ${}_1B$ neseparabilní, je uzel ξ rozvětvovací (jinak by B nebyla ireducibilní), tedy $\nu({}_1B) = 2$. Podle věty 5 má tedy ${}_1B$ sudý počet uzlů, jeho strukturu proto udává obr. 2c). Nacházíme, že $k \leqq 4$ a $n - k + 1 = 4$, čemuž vyhovují jen $n = 6$, $k = 3$. Docházíme opět ke grafům z obr. 4a)b).

Lemma 5. *Budiž B neseparabilní base o n uzlech (n liché); nechť $\nu(B) = 4$. Pak v B existuje cyklus Z_ν obsahující právě jeden nerozvětvovací uzel grafu B.*

Důkaz. Nechť každý cyklus Z_ν, který prochází nerozvětvovacím uzlem grafu B, obsahuje buď dva nebo tři nerozvětvovací uzly (všechny obsahovat nemůže). Existuje-li Z_ν se třemi nerozvětvovacími uzly, označme Z'_ν cyklus procházející zbývajícím nerozvětvovacím uzlem grafu B. Jsou-li Z_ν, Z'_ν disjunktní, pak Z'_ν obsahuje jen jeden nerozvětvovací uzel grafu B (spor). Cykly Z_ν, Z'_ν nemohou však mít společný uzel. Odtud totiž plyne existence dobře orientovaného grafu H, vlastního to podgrafu v B, který obsahuje všechny nerozvětvovací uzly z B (spor s důsledkem věty 4).

Má-li každý cyklus, procházející nerozvětvovacím uzlem grafu B, po dvou nerozvětvovacích uzlech, nemůže zase existovat graf H popsaných vlastností. Existují tedy v B dva disjunktní cykly ${}_iZ_\nu$ ($i = 1; 2$) a v každém z nich dva nerozvětvovací uzly. Kdyby aspoň jeden z cyklů měl aspoň 5 hran, pak dvěma kontrakcemi dojdeme ke grafu G, kde $\nu(G) < 2$. Tedy ${}_iZ_\nu$ jsou oba čtyrúhelníkové a s každým incidují dvě hrany. Provedeme kontrakce

$$ {}_1G = B({}_1Z_\nu)\,, \quad {}_2G = {}_1G({}_2Z_\nu) $$

a vidíme, že ${}_2G$ má $n - 6$ (lichý počet) uzlů, při čemž $\nu({}_2G) = 2$. Podle věty 5 je tedy ${}_2G$ separabilní, podle lemmatu 3 má za artikulace nejvýše uzly ${}_i\xi$; ale ty jsou tam nerozvětvovací (spor). Důkaz je podán.

Než přistoupíme k hlavní větě této kapitoly, zavedeme toto označení: Součet stupňů rozvětvovacích uzlů grafu G označíme $\sigma(G)$. Podle obr. 1 je zřejmé, že pro nerovinný graf G platí $\sigma(G) \geqq 18$.

Věta 8. *Budiž B neseparabilní base o n uzlech; je-li $\nu(B) \leqq \varrho_n + 1$, pak B je rovinný graf. Existuje neseparabilní base $\overline{B}$, která není rovinná a pro niž platí $\nu(\overline{B}) = \varrho_n + 2$.*

Důkaz. Věta 6 podává přehled ireducibilních neseparabilních basí B, pro něž $\nu(B) = \varrho_n$. Z těchto grafů dostaneme každou neseparabilní basi B' splňující vztah $\nu(B') = \varrho_n$ tím, že v některém z těchto grafů případně nahradíme některé nerozvětvovací uzly zobecněnými nerozvětvovacími uzly. Předpoklad $\nu(B) = \varrho_n$ znamená tedy, že B je rovinná. Podobně při n sudém a $\nu(B) = 3$ (věta 7).

Budiž nyní n liché, $\nu(B) = 4$. Z předpokladu, že existuje nerovinná neseparabilní base těchto vlastností, dojdeme ke sporu takto:

Sestrojíme redukovanou basi ${}^1B$, která je pak rovněž nerovinná neseparabilní a $\nu({}^1B) = 4$. V ní zvolíme cyklus Z_ν podle lemmatu 5; ať má k hran. Sestrojme kontrakci ${}^2B = {}^1B(Z_\nu)$; platí $\nu({}^2B) = 3$ a uzel ξ je v kontrakci ${}^2B$ rozvětvovací.

I. Je-li ${}^2B$ separabilní, má nejvýše tři články (vzhledem k tomu, že $\nu({}^2B) = 3$) a artikulací je uzel ξ.

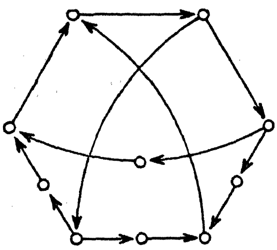
Má-li ${}^2B$ tři články, má zřejmě každý z nich sudý počet uzlů a v každém článku je ξ nerozvětvovacím uzlem. Kontrakce ${}^2B$ je ireducibilní, tedy články jsou dvojúhelníky. Počet uzlů v ${}^2B$ je $n - k + 1 = 4$ čili k je sudé. Zřejmě je $k \leqq 6$ a dostáváme $\sigma({}^1B) \leqq 16$ (spor).

Má-li ${}^2B$ dva články a je-li k liché ($n - k + 1$ liché), nemůže mít jeden článek sudý počet uzlů a druhý lichý. Oba počty uzlů však nemohou být liché, neboť pro každý článek G by bylo $\nu(G) \geqq 3$, tedy $\nu({}^2B) \geqq 4$ (rovnost by znamenala, že artikulace ξ je 4. stupně v ${}^2B$).

Jsou-li oba počty uzlů sudé, uvědomíme si, že v jednom článku G_1 leží jeden nerozvětvovací uzel z ${}^2B$ a ve zbývajícím článku G_2 dva. Článek G_1 má pak artikulaci ξ grafu ${}^2B$ za svůj nerozvětvovací uzel, je to tedy dvojúhelník (jak plyne z ireducibilnosti grafu ${}^2B$).

Má-li G_2 strukturu z obr. 2c), je artikulace ξ v kontrakci ${}^2B$ uzel 5. stupně, tedy $k \leqq 6$ a tedy (vzhledem k paritě k) je $k \leqq 5$. Dostáváme $\sigma({}^1B) \leqq 13$ (spor).

Má-li G_2 svůj redukovaný graf na obr. 4, pak artikulace ξ kontrakce ${}^2B$ je v G_2 (a ovšem i v G_1) nerozvětvovacím uzlem. Odstraňme z G_2 uzel ξ a hrany $\overrightarrow{u\xi}$, $\overrightarrow{\xi v}$. Vznikne dobře orientovaný[10]) graf H a kontrakce $G_2(H)$ je dvojúhelník. Graf H je podgrafem také v ${}^1B$. Provedeme-li kontrakci ${}^1B(H)$, vznikne neseparabilní graf ${}^3B$ mající $\nu({}^3B) = 3$. Graf ${}^3B$ není rovinný a stejné vlastnosti má též příslušný redukovaný graf ${}^4B$. Podle obr. 3 však víme, že ${}^4B$ je rovinný (spor).



Obr. 5.

Je-li k sudé ($n - k + 1$ sudé), mají oba články různou paritu počtu svých uzlů. V tom článku, který má lichý (sudý) počet uzlů, leží dva (jeden) nerozvětvovací uzly grafu ${}^2B$ a artikulace ξ je v ${}^2B$ uzel 4. stupně. Je tedy $k = 4$. Článek se sudým počtem uzlů je pak dvojúhelník a redukovaný graf druhého článku je na obr. 3. Podobně jako prve v G_2 najdeme v tomto článku dobře orientovaný podgraf H', který je podgrafem i v ${}^1B$. Sestrojíme kontrakci ${}^5B = {}^1B(H')$ mající $\nu({}^5B) = 3$. Graf ${}^5B$ je rovněž nerovinný, avšak $\sigma({}^5B) \leqq 10$ (spor).

II. Je-li ${}^2B$ neseparabilní s lichým počtem uzlů (čemuž odpovídá liché k), pak (vzhledem k tomu, že ξ je zde rozvětvovací) má ${}^2B$ strukturu z obr. 3b),c),d).

Má-li strukturu b), je $k = 3$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq 10$, při c) je $k \leqq 5$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq$ $\leqq 16$, při d) je $k = 3$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq 16$. Došli jsme tedy vždy ke sporu.

Má-li ${}^2B$ sudý počet uzlů (čemuž odpovídá sudé k), má ${}^2B$ strukturu z obr. 4a) b), tedy $k = 4$ čili $\sigma({}^1B) \leqq 16$ (spor).

Obr. 5 ukazuje nerovinnou basi B^* s 10 uzly, pro niž $\nu(B^*) = 4$. Půlením hrany dostaneme odtud basi B^{**} s 11 uzly mající $\nu(B^{**}) = 5$. Důkaz je podán[11]).

III. Dobře orientované grafy

Pojem dobře orientovaného grafu souvisí s pojmem nerozložitelné matice.[12]) Čtvercová matice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ se nazývá *rozložitelná*, existuje-li rozklad množiny indexů 1, 2, 3, ..., n na dvě skupiny

$$M = \{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\}\,, \quad N = \{k_1, k_2, \ldots, k_\nu\}\,, \quad (\mu + \nu = n)$$

tak, že pro každé $i_\alpha \in M$, $k_\beta \in N$ platí $a_{i_\alpha k_\beta} = 0$. Jinak je matice *nerozložitelná*.

[10]) Připojíme-li k H hranu $\overrightarrow{uv}$, vidíme, že v H je $u \to v$.

[11]) V práci [3] není správné tvrzení, že každá base hran je rovinný graf, jak upozornil W. T. Tutte v Math. Reviews, Vol. *16*, No 1, 1955, str. 58.

[12]) Viz např. Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц, Москва 1953, str. 321.

Souvislost s dobře orientovanými grafy nahlédneme, když ke každé čtvercové matici $A = \|a_{ik}\|_1^n$ přiřadíme graf G_A (v širším smyslu), který má n uzlů u_1, $u_2, \ldots, u_n$ a jeho hrany jsou dány touto ekvivalencí:

$$\overrightarrow{u_i u_k} \in G_A \Longleftrightarrow a_{ik} \neq 0 . \tag{1}$$

Věta 9. *Čtvercová matice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ je nerozložitelná právě tehdy, je-li graf G_A dobře orientovaný.*

Důkaz. Nechť A je rozložitelná a G_A dobře orientovaný. Existují dva uzly u_i a u_k tak, že $i \in M$, $k \in N$ a platí $u_i \rightarrow u_k$. Na této dráze existují zřejmě dva po sobě jdoucí uzly $u_{i'}$ a $u_{k'}$ tak, že $i' \in M$, $k' \in N$, je tedy $a_{i'k'} \neq 0$, což je spor.

Nechť A je nerozložitelná a G_A není dobře orientovaný. Existují tedy dva uzly x, y, pro něž neplatí $x \rightarrow y$. Budiž M^* množina těch x', pro něž $x \rightarrow x'$, a N^* nechť tvoří zbývající uzly grafu G_A. Je $M^* \neq \emptyset \neq N^*$. Množinám M^*, N^* odpovídá jistý rozklad indexů $1, 2, \ldots, n$ na dvě třídy M, N tak, že pro každé $i \in M$, $k \in N$ platí $a_{ik} = 0$, což je spor s nerozložitelností matice A. Důkaz je podán.

Věta 10. *Neseparabilní dobře orientovaný graf G, který není právě cyklus, obsahuje dvojdráhu.*

Důkaz. Je-li $\nu(G) = 0$, obsahuje G skorocyklus (věta 4), tedy i dvojdráhu. Předpokládejme existenci neseparabilního dobře orientovaného grafu $G_{\min}$ s rozvětvovacím uzlem, který neobsahuje žádnou dvojdráhu a má ze všech grafů vypsaných vlastností nejmenší počet nerozvětvovacích uzlů. Jeden z těchto uzlů označme x a buďtež u, v jeho sousedé, t. j. $\overrightarrow{ux} \in G_{\min}$, $\overrightarrow{xv} \in G_{\min}$. Je $u \neq v$ (neseparabilita) a $\overrightarrow{uv}$ non $\in G_{\min}$. Místo $\overrightarrow{ux}$, $\overrightarrow{xv}$ zaveďme hranu $\overrightarrow{uv}$ a zrušme uzel x. Vznikne neseparabilní graf G' mající rozvětvovací uzel a nemající dvojdráhu a platí $\nu(G') < \nu(G_{\min})$, což je spor.[13])

Věta 11. *Dobře orientovaný graf G o h hranách a u uzlech má aspoň μ cyklů (kde $\mu = h - u + 1$).*

Důkaz. a) Nejprve dokážeme tvrzení: Je-li každý článek našeho grafu G cyklus, má G právě μ cyklů. Důkaz provedeme indukcí podle počtu r článků.

Je-li $r = 1$, je tvrzení zřejmé. Budiž tedy $r > 1$ a ať věta platí pro grafy s $r - 1$ články. Uvažujeme dobře orientovaný graf G_r s r články a budiž T jeden jeho koncový článek o t hranách. Odstraňme z G_r všechny regulární uzly článku T a všechny hrany tohoto článku. Vznikne dobře orientovaný graf G_{r-1} o $h - t$ hranách, o $u - t + 1$ uzlech a $r - 1$ článcích, který podle indukčního předpokladu má počet cyklů $(h - t) - (u - t + 1) + 1 = h - u$. Tedy G_r má μ cyklů.

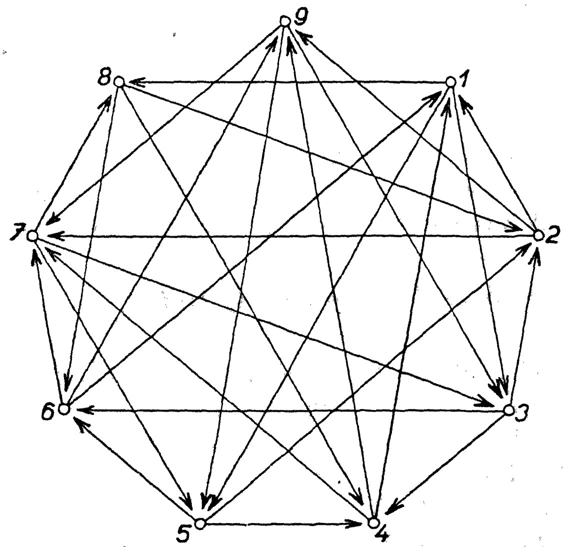
b) Vlastní důkaz podáme indukcí podle μ.

[13]) Věta 10 ukazuje, že není možné zavést pojem jakéhosi „úsporně" orientovaného grafu, v němž by ke každé dvojici různých uzlů u, v existovala jediná dráha vedoucí z u do v.

Nechť $\overline{G}$ má $\mu = 1$. Označíme-li ϱ_i počet uzlů i-tého stupně v $\overline{G}$, platí[14]) $2h = \sum_{i=2}^{\infty} i\varrho_i$ a dále

$$2h = 2 \sum_{i\ 2}^{\infty} \varrho_i + \sum_{i\ 3}^{\infty} (i - 2)\, \varrho_i = 2u + \sum_{i\ 3}^{\infty} (i - 2)\, \varrho_i\,.$$

Odtud plyne $\varrho_i = 0$ pro každé $i \geqq 3$. Je tedy $\overline{G}$ cyklus a tvrzení platí.



Obr. 6.

Budiž nyní $\mu > 1$. Učiňme indukční předpoklad a uvažujme graf G o h hranách a u uzlech, při čemž $h - u + 1 = \mu$. Jsou-li všechny jeho články cykly, je tvrzení zřejmé podle a). V opačném případě budiž G_0 jeden článek, který není cyklus. Je to neseparabilní dobře orientovaný graf a podle věty 10 existuje tedy v G_0 dvojdráha s obloukem L. Bez újmy obecnosti se dá předpokládat, že L je obloukem i v G. Budiž α počet vnitřních (nerozvětvovacích) uzlů oblouku L; tedy $\alpha + 1$ je počet hran oblouku L. Vynechme v G oblouk L (ponechávajíce ovšem jeho počáteční uzel x a koncový y). Vznikne dobře orientovaný graf G' mající $h - (\alpha + 1)$ hran a $u - \alpha$ uzlů. Podle indukčního předpokladu má aspoň $h - u$ cyklů a dále v něm platí $y \to x$. Tedy G má aspoň μ cyklů.

Poznámka 4. Číslo μ vystupuje v theorii konečných grafů častěji. König ([1], str. 53) je nazývá *Zusammenhangszahl*, Whitney ([5], str. 340) uvádí tři názvy: *nullity*, *cyclomatic number*, *first Betti number*. V souvislosti s větou 11

[14]) Viz [1], str. 21.

zůstává otevřena otázka, zda každý dobře orientovaný graf bez dvojúhelníků lze změnou orientace některých hran převést na dobře orientovaný graf mající právě μ cyklů.

Příklad 3. Jako aplikaci rozhodneme, zda daná matice je rozložitelná.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Sestrojíme-li graf G_A (obr. 6) a určíme v něm basi hran. Vidíme, že takovou basi tvoří na př. cyklus po řadě s uzly 1329567841; je tedy G_A dobře orientovaný a matice A nerozložitelná.

IV. Acyklické grafy

Neumann a Morgenstern [2] zavádějí na str. 591 pojem *acyklické* relace. Použijeme jej k této definici: *Acyklický graf* je graf, který neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.

Zřejmě každý podgraf acyklického grafu je acyklický. *Pramenem* grafu nazveme uzel, který není koncový pro žádnou hranu grafu. V acyklickém grafu existuje zřejmě aspoň jeden pramen (z opaku plyne totiž při konečnosti grafu existence cyklu).

Věta 12. *Graf G je acyklický právě tehdy, lze-li jeho uzly očíslovat čísly* 1, 2, 3, ..., *n tak, že $\overrightarrow{ij} \in K\{G\} \Rightarrow i < j$.*

Důkaz. Existuje-li popsané očíslování, nemůže v G existovat cyklus s uzly $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Pak by totiž bylo $i_1 < i_2 < \ldots < i_r < i_1$, čili $i_1 < i_1$.

Je-li obráceně G_1 acyklický, zvolme v něm jeden pramen a označme jej 1. Odstraníme-li z G_1 uzel 1 a hrany z něho vycházející, vznikne acyklický graf G_2. Jeden z pramenů grafu G_2 označme 2 a proces opakujme. Z konečnosti grafu G_1 plyne existence žádaného očíslování.

Poznámka 5. Dané čtvercové matici A přiřaďme podle (1) graf G_A. Z věty 12 plyne, že G_A je acyklický právě tehdy, existuje-li taková permutace sloupců a řádků matice A, která převádí A v matici mající „pod hlavní diagonálou" jen nuly.

König [1] uvádí na str. 93 pojem *transitivní* graf. Je to graf, v němž definující relace je transitivní. Ukazuje se[15]), že transitivní graf bez dvojúhelníků má jedinou basi hran. Snadno však nahlédneme, že transitivní graf bez dvojúhelníků je zvláštním případem acyklického grafu. Větu z poznámky [15]) zobecníme nyní takto:

Věta 13. *Acyklický graf G má jedinou basi hran. Její hrany jsou právě ty hrany grafu G, nad nimiž neexistuje v G skorocyklus.*

Důkaz. Uzly grafu G nechť jsou očíslovány podle věty 12. Označme $\mathfrak{M}$ množinu hran grafu G, nad nimiž neexistuje skorocyklus, a nechť B je jistá base hran grafu G. Je zřejmé $\mathfrak{M} \subset K\{B\}$. Dokážeme též inklusi $K\{B\} \subset \mathfrak{M}$. Zvolme $\overrightarrow{ij} \in K\{B\}$ (tedy $i < j$) a nechť $\overrightarrow{ij}$ non $\in \mathfrak{M}$. Tedy nad $\overrightarrow{ij}$ existuje v G skorocyklus; mezi všemi těmito skorocykly označme S ten, který má maximální počet hran. Kdyby existovala hrana $\overrightarrow{i'j'} \in S$ $(i \leqq i' < j' \leqq j)$ neležící v B, nebyl by S zřejmě maximální nad $\overrightarrow{ij}$. Je tedy $K\{S\} \subset K\{B\}$, což je spor s definicí base hran. Unicita je tím též dokázána.

Je známa tato úloha: Postavte na šachovnici nejmenší možný počet dam (královen) tak, aby každé neobsazené pole — a jen takové pole — bylo napadeno některou dámou. König interpretuje úlohy tohoto typu pomocí grafů a zavádí při tom pojmy *base uzlů* a *řešení* daného grafu[16]). *Basí uzlů* grafu G rozumíme množinu $U \subset \Pi\{G\}$ mající dvě vlastnosti:

1. Ke každému x non $\in U$ existuje $y \in U$ tak, že $y \rightarrow x$.
2. Pro žádnou dvojici $y_1 \neq y_2$ z U není $y_1 \rightarrow y_2$.

Dá se dokázat, že v každém grafu existuje aspoň jedna base uzlů; snadno sestrojíme graf, který má více než jednu basi uzlů.

Řešením grafu G nazýváme množinu $R \subset \Pi\{G\}$ o těchto dvou vlastnostech:

1. Ke každému x non $\in R$ existuje $y \in R$ tak, že $\overrightarrow{yx} \in K\{G\}$.
2. Pro žádnou dvojici $y_1 \neq y_2$ z R není $\overrightarrow{y_1 y_2} \in K\{G\}$.

V některých grafech neexistuje řešení. Neumann a Morgenstern ([2], str. 597) však dokazují, že každý acyklický graf má jediné řešení[17]).

Věta 14. *Acyklický graf G má jedinou basi uzlů. Tvoří ji množina všech pramenů.*

Důkaz. Uzly grafu G nechť jsou očíslovány podle věty 12. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech pramenů grafu G a nechť U je jistá base uzlů grafu G. Je zřejmě $\mathfrak{M} \subset U$. Dokážeme inklusi $U \subset \mathfrak{M}$. Zvolme $i \in U$ a nechť i non $\in \mathfrak{M}$. Existuje tedy v G hrana $\overrightarrow{ji}$ (kde $j < i$), proto j non $\in U$. Existuje tedy dále uzel $j' \in U$

[15]) [1], str. 94, věta 9.

[16]) *König* [1] užívá pro basi uzlů názvu *Punktbasis* (str. 89), pro řešení pak *Punktbasis 2. Art* (str. 90). Neumann a Morgenstern [2] nazývají řešení *solution* (str. 588).

[17]) Formulováno ovšem v naší terminologii. V citované knize se totiž pojem grafu výslovně nevyskytuje.

tak, že v G platí $j' \to j$ (odtud $j' < j$). Z toho plyne $j' \to i$, což je spor s definicí base uzlů. Pro každé $i \in U$ je tedy $i \in \mathfrak{M}$. Unicita je tím též dokázána.

V souvislosti s acyklickými grafy je snad zajímavá poznámka k jednomu Rédeiovu výsledku (uvedená ve větě 15). Zaveďme však nejprve dva pojmy. Graf, který s každými dvěma různými uzly x, y obsahuje právě jednu z hran $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$, se nazývá *úplný*. Existuje-li v grafu G dráha, která prochází všemi jeho uzly, nazveme ji *osou* grafu G. L. Rédei dokázal[18]), že počet os v úplném grafu je lichý. Dá se též dokázat

Věta 15. *Úplný graf obsahuje jedinou osu právě tehdy, je-li acyklický.*

Důkaz. Uvažujeme úplný graf G o n uzlech. Je-li G acyklický, je každá jeho osa basí hran a tedy existuje jediná (věta 13). Nechť nyní G není acyklický. Zvolme v něm jednu osu a označme její uzly po řadě $1, 2, 3, \ldots, n$. Jsou tedy označeny všechny uzly z G. Protože G není acyklický, existují uzly i, k ($i + 1 < k$) tak, že $\overrightarrow{ki} \in G$. Ze všech existujících dvojic $(i; k)$ této vlastnosti zvolme ty s nejmenším i a z těchto tu dvojici s největším k. Následuje schema, které ukazuje existenci další osy v G.

	Uzly další osy
$i = 1,\ k = n$	$2, 3, 4, \ldots, n-1, n, 1$
$i = 1,\ k = n - 1$	$2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1, 1, n$
$i = 1,\ k < n - 1$	$2, 3, 4, \ldots, k-1, k, 1, k+1, k+2, \ldots, n-1, n$
$i = 2,\ k = n$	$1, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, 2$
$i = 2,\ k = n - 1$	$1, 3, 4, 5, \ldots, n-2, n-1, 2, n$
$i = 2,\ k < n - 1$	$1, 3, 4, 5, \ldots, k-1, k, 2, k+1, k+2, \ldots, n-1, n$
$i > 2,\ k = n$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, n-1, n, i$
$i > 2,\ k = n - 1$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, n-2, n-1, i, n$
$i > 2,\ k < n - 1$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, k-1, k, i, k+1, k+2, \ldots$ $\ldots, n$

Důkaz je podán.

Je-li dán graf G, zaveďme v $\Pi\{G\}$ relaci ϱ takto: Klaďme $x\varrho y$ právě tehdy, platí-li současně $x \to y$, $y \to x$. Relace ϱ je zřejmě reflexivní a symetrická,

[18]) Jeho maďarsky psaná práce je u nás nedosažitelná. Informaci o ni podává [1], str. 20.

Protože platí[19]) $x \to y$, $y \to z \Rightarrow x \to z$, je ϱ také transitivní. Je to tedy ekvivalence. Ekvivalence ϱ definuje jistý rozklad Σ množiny $\Pi\{G\}$. Prvky rozkladu Σ lze považovat za uzly grafu $\Sigma(G)$, definujeme-li hrany takto: jsou-li V, W dva různé prvky ze Σ, existuje hrana $\overrightarrow{VW} \in \Sigma(G)$ právě tehdy, existují-li v $\Pi\{G\}$ prvky $x \in V$, $y \in W$ tak, že $\overrightarrow{xy} \in K\{G\}$. Graf $\Sigma(G)$ nazveme *faktorovým* grafem příslušným ke G.

Věta 16. *Graf $\Sigma(G)$ je acyklický.*

Důkaz. Nechť $\Sigma(G)$ obsahuje cyklus $V_1V_2V_3 \ldots V_rV_1$. Pak v grafu G lze sestrojit posloupnost uzlů $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r$ takovou, že $x_i, y_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq r)$ a že v G existují hrany $\overrightarrow{x_1y_2}, \overrightarrow{x_2y_3}, \overrightarrow{x_3y_4}, \ldots, \overrightarrow{x_{r-1}y_r}, \overrightarrow{x_ry_1}$. Pro $x \in V_1$, $y \in V_2$ tedy v G platí $x \to y$, avšak také $y \to x$ (existuje dráha procházející uzly $x_2, y_3, x_3, y_4, \ldots, x_r, y_1$), čili $x\varrho y$ (spor).

Poznámka 6. Každou basi uzlů U grafu G můžeme určit takto: Sestrojíme faktorový graf $\Sigma(G)$ a vyhledáme v něm prameny. To jsou podmnožiny v $\Pi\{G\}$; v každé z nich zvolíme libovolně jeden uzel. Dostáváme U.

Že takto konstruované U je base uzlů z G, nahlédneme takto: Je-li $x \in U$, $y \in U$, $x \neq y$, nemůže v G být $x \to y$, neboť pramen, který odpovídá uzlu y, by byl v $\Sigma(G)$ koncovým uzlem jisté hrany. Je-li z non $\in U$, pak buď existuje $x \in U$ tak, že $x\varrho z$, tedy v G platí $x \to z$, nebo neexistuje. Uzlu z odpovídá pak v $\Sigma(G)$ jistý uzel Z a můžeme v $\Sigma(G)$ najít pramen X tak, že v $\Sigma(G)$ platí $X \to Z$. Pramenu X odpovídá v G uzel $x_0 \in U$ a v G tedy platí $x_0 \to z$.

Obráceně, je-li U base uzlů v G, nemůže dvěma různým prvkům z U odpovídat týž uzel ze $\Sigma(G)$. Sestrojme všechny uzly ze $\Sigma(G)$, které odpovídají po řadě uzlům z U. Ukáže se, že jsou to všechny prameny ze $\Sigma(G)$ a žádný jiný uzel.

a) Kdyby nějaký pramen P ze $\Sigma(G)$ zde nebyl, zvolíme v G nějaký jemu příslušný uzel w. Nemůže však existovat $x \in U$ tak, že v G platí $x \to w$.

b) Kdybychom popsanou konstrukcí došli i k jiným uzlům než k pramenům v $\Sigma(G)$, nechť Q je jeden z nich odpovídající uzlu $q \in U$. Pak by existoval v $\Sigma(G)$ pramen V tak, že v $\Sigma(G)$ platí $V \to Q$. Pramenu V nechť odpovídá v G uzel $v \in U$, tedy v G je $v \to q$ (spor). Tvrzení poznámky 6 je tedy dokázáno.

LITERATURA

[1] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *J. Neumann-O. Morgenstern:* Theory of games and economic behaviour, Princeton 1947.

[3] *L. Rédei:* Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen, Acta math. Sci. Hungar., *5*, 1954, p. 17—24.

[19]) Viz [1], str. 88, věta 1.

[4] *H. E. Robbins:* A theorem of graphs, with an application to a problem of traffic control, Amer. Math. Monthly, 1939, p. 281—283.

[5] *H. Whitney:* Non-separable and planar graphs, Transactions of the Amer. Math. Soc., *34*, 1932, p. 339—362.

Резюме

О КОНЕЧНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага.

(Поступило в редакцию 4/IV 1956 г.)

Работа состоит из четырех частей. Часть I содержит определения основных понятий: Граф, у которого любые два ребра с общей вершиной лежат на некоторой окружности графа, мы назовем (согласно [5]) *несепарабельным* графом. Понятия *путь*, *базис ребер*, *базис вершин*, *сеть* и *плоский граф* определены в [1]. Число вершин 2-й степени в графе G обозначим через $\nu(G)$.

В части II исследуются базисы ребер сетей, в особенности такие базисы B, для которых $\nu(B)$ мало. Главные свойства этих графов B таковы: Для любого B будет $\nu(B) \geqq 2$ (теорема 4). Если B — несепарабельный граф с четным (соотв. нечетным) числом вершин и если $\nu(B) \leqq 3$ (соотв. $\nu(B) \leqq 4$), то B есть плоский граф (теорема 8). На рис. 5 показан неплоский граф B^* с 10 вершинами, для которого $\nu(B^*) = 4$. (Эта часть работы примыкает к [3].)

Часть III посвящается *хорошо ориентированным* графам (так мы называем графы, в которых из каждой вершины ведет путь к каждой из остальных — см. [4]). Показана связь с понятием *неразложимая матрица*. Если данной матрице $A = \|a_{ik}\|_1^n$ поставить в соответствие граф G_A (в более широком смысле слова), который имеет n вершин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и ребра которого даны формулой (1), то A будет неразложимой матрицей тогда и только тогда, если G_A есть хорошо ориентированный граф (теорема 9). Хорошо ориентированный граф с h ребрами и u вершинами содержит по меньшей мере $h - u + 1$ циклов (теорема 11).

Часть IV рассматривает ациклические графы. *Ациклическим* называется граф, не содержащий среди своих подграфов ни одного цикла. Если опять поставить в соответствие матрице A граф G_A, то G_A будет ациклическим тогда и только тогда, если существует такая перестановка столбцов и строк матрицы A, которая переводит A в треугольную матрицу (замечание 5). Далее показано, что в ациклическом графе существует один и только один базис ребер (теорема 13) и только один базис вершин (теорема 14). Если определить полный граф как ориентированный граф, в котором с каждой парой различных вершин u, v существует одно и только одно из ребер $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$, то справедливо утверждение: Полный граф G содержит один единственный путь, проходящий через все вершины тогда и только тогда, если G—ациклический граф (теорема 15).

В множестве вершин $\Pi\{G\}$ произвольного ориентированного графа G можно определить следующую эквивалентность: Пусть $x\varrho y$ тогда и только тогда, если путь ведет из x к y и также путь ведет из y к x. Отношением ϱ определено разбиение Σ множества $\Pi\{G\}$. Элементы из Σ можно считать вершинами графа $\Sigma(G)$ и его ребра определить следующим образом. Для $V \neq W$, $V \in \Sigma$, $W \in \Sigma$ существует ребро $\overrightarrow{VW}$ тогда и только тогда, если существуют вершины $x \in V$, $y \in W$ так, что $\overrightarrow{xy} \in G$. Тогда $\Sigma(G)$ является ациклическим графом. Также показано, как можно при помощи графа $\Sigma(G)$ построить каждый базис вершин графа G.

Zusammenfassung

ÜBER ENDLICHE GERICHTETE GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Eingelangt am 4. April 1956.)

Die vorliegende Arbeit hat vier Teile. Der erste Teil enthält Definitionen der Grundbegriffe: Als *unseparabel* bezeichnen wir (nach [5]) einen Graphen, dessen jede zwei Kanten mit einem gemeinsamen Knotenpunkt in irgendeinem Kreis liegen. Die Begriffe *Bahn*, *Kantenbasis*, *Punktbasis*, *Netz* und *ebener Graph* sind in [1] definiert. Mit $\nu(G)$ bezeichnen wir die Anzahl der Knotenpunkte 2. Grades im Graphen G. Im zweiten Teil studieren wir Kantenbasen für Netze und besonders solche Kantenbasen B, für welche $\nu(B)$ eine kleine Zahl ist. Haupteigenschaften dieser Graphen B sind: Für jedes B ist $\nu(B) \geqq 2$ (Satz 4). Ist B ein unseparabler Graph mit gerader (resp. ungerader) Anzahl von Knotenpunkten und $\nu(B) \leqq 3$ (resp. $\nu(B) \leqq 4$), dann ist B ein ebener Graph (Satz 8). Fig. 5 zeigt einen nichtebenen Graphen B^* mit 10 Knotenpunkten, wo $\nu(B^*) = 4$. (Dieser Teil unserer Arbeit knüpft an [3].) Der dritte Teil ist den *wohlgerichteten* Graphen gewidmet (so bezeichnen wir solche Graphen, in denen von jedem Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn führt — siehe [4]). Der Begriff des wohlgerichteten Graphen hängt mit dem algebraischen Begriffe der *unzerlegbaren* Matrix eng zusammen. Wenn wir nämlich einer gegebenen Matrix $A = \|a_{ik}\|_1^n$ einen Graphen G_A (in weiterem Sinn) zuordnen, der n Knotenpunkte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ hat, und dessen Kanten

durch die Formel (1) gegeben sind, dann ist A eine unzerlegbare Matrix dann und nur dann, wenn G_A ein wohlgerichteter Graph ist (Satz 9). Ein wohlgerichteter Graph, der h Kanten und u Knotenpunkte hat, enthält wenigstens $h - u + 1$ Zyklen (Satz 11).

Der vierte Teil behandelt *azyklische* Graphen. Ein Graph ist azyklisch, wenn kein Teilgraph ein Zyklus ist. Wenn wir der gegebenen Matrix A wieder einen Graphen G_A zuordnen, so ist G_A azyklisch dann und nur dann, wenn so eine Permutation der Spalten und Reihen der Matrix A existiert, welche die Matrix A in eine Dreiecksmatrix umformt (Anmerkung 5). Weiter wird gezeigt, dass ein azyklischer Graph nur eine einzige Kantenbasis (Satz 13) und eine einzige Punktbasis (Satz 14) enthält. Wenn wir einen vollständigen Graphen als gerichtet definieren, in dem zu jedem Paar verschiedener Knotenpunkte u, v eine und nur eine der Kanten $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$ existiert, dann gilt der Satz: Ein vollständiger Graph enthält dann und nur dann eine einzige Bahn, die durch alle Knotenpunkte führt, wenn G azyklisch ist (Satz 15).

In der Knotenpunktmenge $\Pi\{G\}$ eines beliebigen gerichteten Graphen G definieren wir die folgende Äquivalenzrelation: Es sei $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn eine Bahn aus x nach y und zugleich auch eine Bahn aus y nach x führt. Die Relation ϱ definiert eine Zerlegung Σ der Menge $\Pi\{G\}$. Die Elemente von Σ können wir für Knotenpunkte eines Graphen $\Sigma\{G\}$ halten, wobei Kanten folgendermassen definiert sind: für $V \neq W$, $V \in \Sigma$, $W \in \Sigma$ existiert $\overrightarrow{VW}$ dann und nur dann, wenn es Knotenpunkte $x \in V$, $y \in W$ mit $\overrightarrow{xy} \in G$ gibt. Es gilt dann, dass $\Sigma(G)$ ein azyklischer Graph ist. Es wird auch gezeigt, dass man mit Hilfe des Graphen $\Sigma(G)$ jede Punktbasis des Graphen G leicht bilden kann.