Václav Havel
Základní věty centrální axonometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 175--181

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117252`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ZÁKLADNÍ VĚTY CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 12. března 1956.) DT:515.69

V článku je zobecněna základní věta centrální axonometrie, pocházející od E. KRUPPY a N. F. ČETVERUCHINA, dále je uvedena základní věta Stiefelova a konečně je odvozena věta 6, která umožňuje pohodlnou volbu průmětu souřadnicové konfigurace. V závěru je podán přehled o pracích, týkajících se základních vět centrální axonometrie.

Budeme vyšetřovat (reálný resp. komplexní) rozšířený eukleidovský prostor. Nejprve uvedeme několik definic.

Definice 1. Posloupnost bodů O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n nazveme souřadnicovou konfigurací, jestliže platí tyto podmínky: O', A', B', C', jsou navzájem různé vlastní body; úsečky $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé; A'_n, B'_n, resp. C'_n je nevlastní bod přímky $O'A'$, $O'B'$, resp. $O'C'$.

Definice 2. Posloupnost bodů $O, A, B, C, A_n, B_n, C_n$, ležících v téže vlastní rovině nazveme d-konfigurací, když každá trojice O, A, A_n; O, B, B_n; O, C, C_n obsahuje různé kolineární body a když přímky OA, OB, OC současně nesplývají. Nejsou-li (resp. jsou-li) body A_n, B_n, C_n kolineární, pak d-konfiguraci nazveme d_1-konfigurací (resp. d_2-konfigurací).

D o d a t e k k d e f i n i c i 2. Nejsou-li ani body A_n, B_n, C_n, ani body A, B, C kolineární, pak označme p osu perspektivity obou „trojúhelníků"[1]) ABC, $A_nB_nC_n$. (Tato osa perspektivity existuje podle věty Desarguesovy, užité na oba „trojúhelníky" ABC, $A_nB_nC_n$, perspektivní podle středu O). Jsou-li body A, B, C dané d_1-konfigurace kolineární, pak označme p přímku, na níž tyto body leží. Nechť dále P je harmonický pól přímky p vzhledem k „trojúhelníku" $A_nB_nC_n$. Pak označme k imaginární kuželosečku (elipsu nebo kružnici), která je jednoznačně určena polárním „trojúhelníkem" $A_nB_nC_n$ a pólem P s polárou p. Není-li k kružnicí, pak označme a, b délky poloos elipsy $\overline{k}$, která reálně zastupuje k.

[1]) „Trojúhelníkem" rozumíme trojici nekolineárních bodů (z nichž některý může být nevlastní).

Definice 3. Existuje-li bod S a souřadnicová konfigurace $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$, promítající se z centra S do dané d-konfigurace $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$, — a to tak, že bod O je průmětem bodu O', bod A průmětem bodu A' atd., pak tuto danou d-konfiguraci prohlásíme za konfiguraci typu T (vzhledem k S).

Věta 1. a) *Každá d-konfigurace typu T vzhledem k vlastnímu bodu S je d_1-konfigurací.* b) *Každá d-konfigurace typu T vzhledem k nevlastnímu bodu S je d_2-konfigurací.* c) *Má-li d_2-konfigurace typ T vzhledem k bodu S, pak bod S je nevlastní.*

Důkaz. a) Průměty nevlastních bodů souřadnicové konfigurace z vlastního středu S do vlastní roviny π jsou body neležící na téže přímce.

b) Průměty nevlastních bodů souřadnicové konfigurace z nevlastního středu S do roviny π jsou nevlastní body; tyto průměty jsou tedy kolineární.

c) Důkaz plyne bezprostředně z tvrzení a).

Věta 2 (první základní věta). *Daná d_1-konfigurace je typu T právě tehdy, když kuželosečka k je imaginární kružnicí.*

Důkaz. 1. Nechť $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$ je souřadnicová konfigurace, která se ze středu S promítá do roviny π do dané d_1-konfigurace $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$. Přitom platí vztahy $SA_n \perp SB_nC_n$, $SB_n \perp SA_nC_n$, $SC_n \perp SA_nB_n$. Dokážeme, že platí též $SP \perp Sp$. (Bod P a přímka p jsou definovány v dodatku k definici 2.) Proložme přímkou $O'C'$ rovinu $\gamma \perp A'B'$. Pak nevlastní přímka roviny γ promítá se do přímky C_nP. (Bodem O' veďme přímku $c_1 \parallel A'B'$ a přímku c_2 půlící úsečku $A'B'$. Přímky $c_1, c_2, c_3 = O'A', c_4 = O'B'$ tvoří harmonickou čtveřinu; nevlastní body přímek c_1, c_2, c_3, c_4 promítají se tedy též do harmonické čtveřiny bodů $A_nB_n \cap p$, $A_nB_n \cap C_nP$, A_n, B_n. Tedy přímka C_nP je průmětem nevlastní přímky roviny γ.)

Obdobně určíme roviny α, β, jejichž nevlastní přímky promítají se do přímek A_nP, B_nP. Tedy bod P je průmětem nevlastního bodu přímky $m = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Poněvadž ale přímka p je průmětem nevlastní přímky roviny $A'B'C'$, plyne z relace $m \perp A'B'C'$ též relace $SP \perp Sp$.

Kuželosečka k je základní kuželosečkou polarity $\mathfrak{P}$ v rovině π; polarita $\mathfrak{P}$ promítá se z bodu S prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. V polaritě $\mathfrak{P}'$ odpovídají přímkám SA_n, SB_n, SC_n, resp. SP roviny SB_nC_n, SA_nC_n, SA_nB_n, resp. Sp. Poněvadž platí $SA_n \perp SB_nC_n$, $SB_n \perp SA_nC_n$, $SC_n \perp SA_nB_n$, $SP \perp Sp$, je polarita $\mathfrak{P}'$ pravoúhlá, a tedy kuželosečka k je imaginární kružnicí.

2. Nechť pro danou d_1-konfiguraci $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$, ležící v rovině π, je kuželosečka k imaginární kružnicí. Zvolme jeden z Laguerrových bodů kružnice k, označme jej S a prohlašme jej za střed promítání do průmětny π. Rovinná polarita $\mathfrak{P}$ o základní kuželosečce k promítá se z bodu S pravoúhlou prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. Bodu P odpovídá v polaritě $\mathfrak{P}$ přímka p, takže

přímce SP odpovídá v polaritě $\mathfrak{P}'$ rovina $Sp \perp SP$. Na přímce SO zvolme libovolný bod O' tak, aby byl vlastní a aby nesplýval s bodem S. Bodem O' veďme přímky $a \parallel SA_n$, $b \parallel Sb_n$, $c \parallel SC_n$; zřejmě přímky a, b, c jsou navzájem kolmé. Sestrojme body $A' = SA \cap a$, $B' = SB \cap b$, $C' = SC \cap c$. Body A', B', C' jsou vlastní. (Je-li ku př. bod A' nevlastní, pak $SA \parallel SA_n$, a tedy $A = A_n$, což odporuje definici d-konfigurace.)

($^+$) Přímka p je průmětem nevlastní přímky roviny $A'B'C'$; bod P je průmětem nevlastního bodu přímky m, jdoucí bodem O' kolmo k rovině $A'B'C'$.[2])

($^{++}$) Přímka C_nP je průmětem nevlastní přímky roviny γ, jdoucí přímkou $O'C'$ a půlící úsečku $A'B'$. (Body $A_nB_n \cap p$, $A_nB_n \cap C_nP$, A_n, B_n tvoří harmonickou čtveřinu; jsou to průměty promítacích přímek $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4$. Proložme bodem O' přímky $c_i \parallel \bar{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Pak platí tyto vztahy: $c_1 \parallel A'B'$, c_2 půlí úsečku $A'B'$, $c_3 = O'A'$, $c_4 = O'B'$. Poněvadž C_n je průmětem nevlastního bodu přímky $O'C'$, je tím tvrzení dokázáno.)

Obdobně bychom zavedli roviny α, resp. β a dokázali, že přímka A_nP je průmětem nevlastní přímky roviny α a že přímka B_nP je průmětem nevlastní přímky roviny β. Z tvrzení ($^+$), ($^{++}$) plyne relace $m = \alpha \cap \beta \cap \gamma$, a tedy trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Tedy úsečky $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ jsou kolmé a mají touž délku, což bylo dokázat.

Poznámka. V druhé části předchozího důkazu bylo možno bod O' volit kdekoliv na přímce SO s výjimkou bodu S a bodu nevlastního. Každé takové volbě bodu O' odpovídaly body A', B', C'; doplněním nevlastních bodů A'_n, B'_n, resp. C_n přímek $O'A'$, $O'B'$, resp. $O'C'$ získáme souřadnicovou konfiguraci $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech těchto souřadnicových konfigurací. Zřejmě každé dvě konfigurace z $\mathfrak{M}$ jsou homothetické podle středu S. Ke každému kladnému číslu c existují v $\mathfrak{M}$ dvě konfigurace, pro něž úsečka $O'A'$ má délku c.

Věta 3. *Nechť $\mathfrak{S}$ je souřadnicová konfigurace a nechť je dále dána d-konfigurace ϑ ležící v rovině ϱ. Pak lze sestrojit rovinu π, d-konfiguraci ϑ_π v rovině π, bod S non ϵ π a lineární transformaci l mezi rovinami π, ϱ tak, že ϑ_π je průmětem konfigurace $\mathfrak{S}$ ze středu S a že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

Věta 4 (druhá základní věta). *Ke každé d-konfiguraci ϑ v rovině ϱ lze sestrojit rovinu π, d-konfiguraci ϑ_π typu T v rovině π a lineární transformaci l mezi rovinami π, ϱ tak, že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

Dokážeme, že věty 3, 4 jsou ekvivalentní: Zřejmě z věty 3 plyne věta 4 Nechť nyní platí věta 4. Poněvadž ϑ_π je typu T, existuje pro ni množina $\mathfrak{M}$ určená podle poznámky za větou 2. V $\mathfrak{M}$ vybereme tu konfiguraci γ^*, která je shodná s konfigurací $\mathfrak{S}$ z věty 3. Existuje právě jedna lineární transformace L prostoru, pro niž platí $L(\mathfrak{S}^*) = \mathfrak{S}$. Konfigurace $L(\vartheta_\pi)$ je průmětem konfigurace

[2]) Důkaz je snadný.

$\mathfrak{S}$ a dále platí $lL^{-1}(L(\vartheta_\pi)) = \vartheta$. Věta 3 je tím dokázána (symboly l, ϑ_π, π ve větě 3 nahradíme ovšem symboly lL^{-1}, $L(\vartheta_\pi)$, $L(\pi)$).

Nyní dokážeme větu 4. Označme $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$ danou konfiguraci $\vartheta \subset \varrho$ a bez omezení obecnosti předpokládejme, že přímky OA, OB nesplývají. Zvolme libovolnou vlastní rovinu $\pi^\bullet$ a vyberme v ní kterýkoliv pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $O^\bullet A^\bullet B^\bullet$ (s rameny $O^\bullet A^\bullet$, $O^\bullet B^\bullet$). Označme $A_n^\bullet B_n^\bullet$ nevlastní body přímek $O^\bullet A^\bullet$, resp. $O^\bullet B^\bullet$. Existuje právě jedna lineární transformace t mezi rovinami $\pi^\bullet$, ϱ, pro niž $t(A^\bullet) = A$, $t(B^\bullet) = B$, $t(A_n^\bullet) = A_n$, $t(B_n^\bullet) = B_n$; zřejmě jest též $t(O^\bullet) = O$. Označme ještě $C^+ = t^{-1}(C)$, $C_n^+ = t^{-1}(C_n)$. V transformaci t odpovídá tedy konfiguraci $\vartheta_{\pi^\bullet} = (O^\bullet, A^\bullet, B^\bullet, C^+, A_n^\bullet, B_n^\bullet, C_n^+)$ daná konfigurace ϑ.

Ukážeme, že $\vartheta_{\pi^\bullet}$ je typu T. Stanovme vlastní bod $C^\bullet \neq O^\bullet$ tak, aby $C^\bullet O^\bullet \perp \pi^\bullet$ a aby úsečky $O^\bullet C^\bullet$, $O^\bullet A^\bullet$ měly touž délku; bod $C^\bullet$ je určen dvojznačně. Dále označme $C_n^\bullet$ nevlastní bod přímky $O^\bullet C^\bullet$. Souřadnicová konfigurace $\mathfrak{S}^\bullet = (O^\bullet, A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet, A_n^\bullet, B_n^\bullet, C_n^\bullet)$ promítá se z bodu $S = C^\bullet C^+ \cap C_n^\bullet C_n^+$ do konfigurace $\vartheta_{\pi^\bullet}$. Věta je dokázána (symboly l, π nahradíme ovšem symboly t, $\pi^\bullet$).

Věta 5. *Ke každé d_1-konfiguraci ϑ v rovině ϱ lze sestrojit rovinu π, d_1-konfiguraci ϑ_π typu T v rovině π a afinitu l*[3]) *mezi rovinami π, ϱ tak, že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

Důkaz. Navážeme na důkaz věty 4. Je-li ve větě 4 konfigurace ϑ d_1-konfigurací, pak bod S (určený v důkazu věty 4) je podle věty 1 vlastním bodem. Je-li n_ϱ nevlastní přímka roviny ϱ, pak položme $n^+ = t^{-1}(n_\varrho)$. Zvolme libovolnou rovinu π tak, aby neprocházela bodem S a aby byla rovnoběžná s rovinou Sn^+. Promítáním ze středu S je mezi rovinami π, $\pi^\bullet$ zprostředkována lineární transformace h_π tak, že $h_\pi^{-1}(\vartheta_{\pi^\bullet}) = \vartheta_\pi$ je též průmětem konfigurace $\mathfrak{S}^\bullet$ ze středu S (do roviny π). Dále je $h^{-1}(n^+)$ nevlastní přímka n_π roviny π. Tedy v transformaci th_π odpovídá konfiguraci ϑ_π konfigurace ϑ a přímce n_π odpovídá přímka n_ϱ. Položíme-li $l = th_\pi$, je tím důkaz proveden.

Nechť A je afinita (v rovině π), v níž trojúhelníku o jednotkovém obsahu odpovídá trojúhelník o obsahu m; číslo m nazývá se modulem afinity A.

Pomocná věta. *Nechť k je reálná elipsa v rovině π, při čemž $a > b$ jsou délky jejích poloos. Pak existuje perspektivní afinita A_1, jejímž modulem je libovolné číslo z intervalu $\left\langle \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\rangle$, perspektivní afinita A_2 o libovolné ose (resp. libovolném směru), kolmá afinita A_3 a elace A_4 tak, že $A_i^{-1}(k)$ je kružnice $(i = 1, 2, 3, 4)$.*[4])

Věta 6. *Ke každé d_1-konfiguraci ϑ, která leží v rovině π a není typu T, existuje perspektivní afinita l v rovině π tak, že konfigurace $l^{-1}(\vartheta)$ je typu T; tato perspek-*

[3]) Afinitou rozumíme lineární transformaci mezi dvěma rovinami, která převádí nevlastní přímku jedné roviny v nevlastní přímku druhé roviny.

[4]) Elementární důkaz nebudeme uvádět.

tivní afinita l může mít za svůj modul libovolné číslo z intervalu $\left\langle \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\rangle$ [5]), *dále může být l perspektivní afinitou o libovolné ose (resp. libovolném směru) a konečně může být l též kolmou afinitou, resp. elací.*

Důkaz plyne ihned z věty 2 a z pomocné věty, zavedeme-li označení podle dodatku k definici 2.

Závěrečné poznámky. 1. V sovětské literatuře jsou podrobně zpracovány obě základní věty centrální axonometrie, při nichž d_1-konfigurace není degenerovaná (t. j. pro případ, že přímky OA, OB, OC jsou navzájem různé a body A, B, C nejsou kolineární). N. M. Beskin a I. S. Džaparidze nahradili souřadnicovou konfiguraci prostorovou polyedrickou konfigurací a odvodili věty analogické větám 3, 4. Pro docílení jednoznačnosti vyšetřovali unimodulární afinitu, t. j. afinitu o modulu 1. Projektivní důkaz I. S. Džaparidze doplňuje analytický důkaz Beskinův. Poznamenejme však, že v citovaných sovětských pracích (viz seznam literatury) se nepřihlíží k degenerovaným případům vyšetřované d-konfigurace. Degenerované případy lze zahrnout do vyšetřování užitím methody Stiefelovy (viz důkaz vět 4, 5). Ed. Stiefel zabýval se též zobecněním Pohlkeovy věty pro vícerozměrný případ a ukázal, že ve vícerozměrném případě ztrácí Pohlkeova věta charakter jednoznačnosti. N. F. Četveruchin a L. Drs zabývali se podobným thematem: otázkou doplnění částečné konfigurace na nedegenerovanou d_1-konfiguraci typu T.

2. (Psáno při korektuře — 25. 3. 1957.) Autor se zabývá zobecněním obou základních vět a zobecněním věty Pohlkeovy v těchto článcích: *O větě Pohlkeově*, Pokroky mat., fys. a astron. *1*, 1956, 694-696; *Několik poznámek k theorii promítání*, Pokroky mat., fys. a astron. *1*, 1956, 692-694; *O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie*, Mat. fyz. čas. SAV *6*, 1957, sešit 2; *O dvojici (m, n) konfigurací*, Čas. pro pěst. mat. *82*, 1957.

LITERATURA

[1] *Н. М. Бескин:* Основное предложение аксонометрии, Сб. Вопросы современной начертательной геометрии, Москва-Ленинград 1947, 55—126.

[2] *Н. Ф. Четверухин:* Об основной теореме аксонометрии в центральной проекции, ДАН СССР, *50*, 1945, 75—76.

[3] *Н. Ф. Четверухин:* Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции, Сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 105—111.

[4] *L. Drs:* O základní větě centrální axonometrie, Čas. pro pěst. mat. *82*, 1957, 165—174.

[5] *И. С. Джапаридзе:* Проективно-синтетическое доказательство теоремы Н. М. Бескина, Сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 100—104.

[5]) Čísla a, b jsou definována v dodatku k definici 2.

[6] *E. Müller:* Vorlesungen über darstellende Geometrie, I, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Leipzig-Wien 1923.
[7] *В. Н. Первикова:* Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространство n измерении, Сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 141—151.
[8] *Ed. Stiefel:* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Basel 1947.
[9] *Ed. Stiefel:* Zum Satz von Pohlke, Commentarii Math. Helv. *10*, 1938, 208—223.

Резюме

ОСНОВНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 12/III 1956.)

В работе исследуются плоские дезарговы конфигурации (d-конфигурации) в расширенном пространстве и пространственные координатные конфигурации (составленные из начала координат, из единичных точек, лежащих на перпендикулярных осях, и из несобственных точек координатных осей). В статье определена d-конфигурация типа T, как проекция некоторой координатной конфигурации.

В начале обобщено первое основное предложение центральной аксонометрии (предложение Круппы-Четверухина), дающее необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная d-конфигурация была типа T. Формулировку не будем повторять, так как она требует специальных понятий. Дальше приведено второе основное предложение центральной аксонометрии (предложение Бескина-Шмифеля), по которому всякая d-конфигурация находится в проективном соответствии с некоторой d-конфигурацией типа T. Доказательство проведено методом Штифеля. В конце работы доказано следующее предложение:

Всякая d-конфигурация на плоскости ϱ находится в перспективно-аффинном соответствии с некоторой d-конфигурацией типа T на плоскости ϱ. На это перспективно-аффинное соответствие можно наложить специальные требования.

Zusammenfassung

DIE FUNDAMENTALSÄTZE DER ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 12. 3. 1956.)

In dieser Abhandlung werden die ebenen Desarguesschen Konfigurationen, sowie die Koordinatenkonfigurationen in dem ergänzten euklidischen Raum

untersucht (die erwähnte Koordinatenkonfiguration besteht aus dem Nullpunkt, aus den Einheitspunkten auf den senkrechten Koordinatenachsen und aus den uneigentlichen Punkten der Koordinatenachsen). Weiter wird die sg. d-Konfiguration vom Typus T definiert, die als Projektion einer Koordinatenkonfiguration betrachtet werden kann.

Zunächst wird der erste Fundamentalsatz der Zentralaxonometrie (der sg. Satz von Kruppa-Četveruchin) verallgemeinert, der die notwendige und hinreichende Bedingung dafür gibt, dass der gegebenen d-Konfiguration der Typus T zugehört. Die Formulation des Satzes erfordert die Einführung spezieller Begriffe und darum wird hier nicht eingeführt. Weiter ist der zweite Fundamentalsatz der Zentralaxonometrie (der sg. Satz von Beskin-Stiefel) abgeleitet. Nach diesem Satze steht jede d-Konfiguration mit einer d-Konfiguration vom Typus T in der projektiven Beziehung. Zum Beweis wird die Methode von Stiefel gebraucht. Zum Schluss wird folgender Satz bewiesen:

Jede d-Konfiguration in der Ebene ϱ ist mit einer d-Konfiguration vom Typus T in der Ebene ϱ in der Beziehung der perspektiven Affinität. Auf diese perspektive Affinität können spezielle Forderungen gelegt werden.