Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

STUDIE FOKÁLY, I

FRANTIŠEK SEDLÁK, Praha a LADISLAV KOSMÁK, Brno.

(Došlo dne 1. března 1956.) DT: 513.618

V článku se používá elementárních synthetických method ke studiu některých základních vlastností fokály.

1. Úvod. V minulém století bylo nashromážděno velké množství detailních poznatků o vlastnostech speciálních křivek, které byly tehdy předmětem živého zájmu matematiků. I když se nám tato jejich práce zdá někdy samoúčelnou, nebyla neužitečná: mnohé z výsledků, k nimž došli, se staly pomůckou nebo i východiskem obecných geometrických úvah, některé našly přímo uplatnění v praxi. Později zájem o tyto velmi speciální otázky ochabl tou měrou, jakou se obracel ke stále obecnějším problémům, týkajícím se nikoliv už jednotlivých geometrických „individuí", nýbrž zpravidla velmi rozsáhlých tříd útvarů. Nutným důsledkem tohoto vývojového procesu je, že jsou dnes již poměrně málo známy i takové starší výsledky, které si dodnes zachovaly svou podnětnost, zajímavost a cenu.

Tato práce pojednává o křivce, bohaté pozoruhodnými vlastnostmi, jejichž studium vede k nejrozmanitějším dalším geometrickým problémům. První práce o ní pocházejí z dvacátých let minulého století od QUETELETA a VAN REESE; později se jí zabývalo mnoho dalších autorů, jejichž výsledky jsou z velké části shrnuty v obsáhlé „sbírce" speciálních křivek, v TEIXEIROVĚ knize „Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches". Literární údaje jsou obsaženy v příslušné stati v „Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften".

V tomto článku ukazujeme, že k některým větám o fokále lze zcela přirozeně dospět velmi elementárními prostředky. Mimoto jsme se pokusili na několika místech doplnit známé výsledky. První část naší práce obsahuje v podstatě důkaz ekvivalence dvou definic fokály*).

---

*) Srov. tuto Steinerovu úlohu (Ges. Werke 2, str. 487):

„Sind in einer Ebene zwei begrenzte Geraden AB und CD in beliebiger fester Lage gegeben, so besteht der Ort desjenigen Punctes, aus welchem dieselben unter gleichen Winkeln (oder auch unter Winkeln, die zwei Rechte betragen) gesehen werden, aus zwei Curven dritten Grades. Beide gehen durch die vier Endpuncte der gegebenen Geraden, sowie durch ihren gegen-

2. Pojmy a definice. Je-li dána skupina čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a žádné tři nejsou spolu rovnoběžné (takové skupině budeme pro stručnost říkat *jednoduchá*), budeme průsečíky přímek této skupiny nazývat jejími *vrcholy*; dvěma vrcholům, které neleží na téže přímce skupiny, říkáme protější. Úsečky, spojující dva vrcholy, které nejsou protější, nazveme *stranami* skupiny a dvě takové úsečky nazveme protější, neleží-li žádné tři z jejich koncových bodů na jedné přímce skupiny. Přímka procházející dvěma protějšími vrcholy se nazývá *diagonála* dané skupiny. Je-li mezi přímkami této skupiny nejvýš jedna dvojice rovnoběžek, nazveme tuto skupinu *regulární*; nejsou-li žádné dvě přímky rovnoběžné, mluvíme o *čtyřstranu*.

Je-li dán svazek kružnic, které procházejí dvěma různými body v rovině (t. zv. eliptický svazek), nazývají se tyto body *základními body* svazku, úsečka, mající v nich krajní body, *základní úsečkou* svazku a její osa *osou* svazku. *Orientovaným svazkem* kružnic nazveme pak svazek, jehož kružnice jsou uspořádány podle tohoto pravidla: Orientujeme osu svazku a definujeme, že ze dvou různých kružnic k_1, k_2 daného svazku je k_1 *před* k_2, platí-li to při zvolené orientaci osy svazku o jejich středech. Dva orientované eliptické svazky kružnic nazveme *podobné*, je-li každé kružnici jednoho svazku přiřazena kružnice druhého svazku tak, že poměr jejich poloměrů je týž jako poměr délek příslušných základních úseček svazků a že toto přiřazení zachovává orientaci. Množinu S (reálných) průsečíků párů sobě odpovídajících kružnic dvou podobných eliptických svazků nazveme *průsekem* těchto svazků; říkáme také, že se tyto svazky protínají v množině S nebo že S je jimi vytvořena.

Zcela obdobně jako u eliptických svazků můžeme pojmy orientace, podobnosti atd. zavést i pro parabolický svazek kružnic nebo svazek kružnic soustředných.

3. Pomocné věty.

Věta 3.1. *Nechť úsečky AB, CD jsou protější strany jednoduché skupiny čtyř přímek; pak úhel, sevřený spojnicemi ohniska F libovolné kuželosečky, dotýkající se daných čtyř přímek, s koncovými body úsečky AB je buďto stejně veliký jako úhel sevřený spojnicemi ohniska s body C, D, anebo je k němu výplňkový; tato druhá možnost nastává jen v těchto případech:*

1. *body A, B, C, D jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka omezeného přímkami dané skupiny, bod F je ohniskem elipsy a leží uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$;*

2. *F je ohnisko hyperboly a přímky AB, CD se dotýkají každá jiné větve této hyperboly.*

---

seitigen Schnittpunct. Ferner haben die Curven diejenigen zwei Puncte gemein, aus welchen beide Geraden unter rechten Winkeln erscheinen. Die zwei übrigen gemeinschaftlichen Puncte der Curven sind imaginär und liegen auf der unendlich entfernten Geraden. Der Satz umfasst viele, theils interessante specielle Fälle, welche unter besonderen Annahmen rücksichtlich der gegenseitigen Lage und der Grösse der beiden Geraden eintreten."

Důkaz této věty lze najít na př. v [1], str. 59—60, 94, 119.

Věta 3.2. *Nechť je dána jednoduchá skupina čtyř přímek. Bod P, který není vrcholem dané skupiny, je ohniskem kuželosečky dotýkající se přímek této skupiny právě tehdy, když paty kolmic vedených z něho k daným přímkám leží na kružnici nebo na přímce.*

Důkaz viz opět na př. [1], str. 54, 89—90, 109—110.

Mějme nyní jednoduchou skupinu čtyř přímek; tyto přímky omezují jistý konvexní čtyřúhelník, který svými stranami hraničí se čtyřmi oblastmi, které jsou určeny vždy právě třemi z daných čtyř přímek. Tyto oblasti nazveme *trojstranné*.

Snadno se zjistí, že existují právě čtyři dvojice podobných svazků kružnic se základními úsečkami v týchž dvou protějších stranách dané jednoduché skupiny a že tyto čtyři dvojice svazků lze rozdělit do dvou tříd tak, že každá obsahuje dvě dvojice svazků lišící se jen tím, že svazky jedné dvojice jsou oba orientovány opačně než svazky druhé dvojice a že se tedy obě dvojice protínají v téže množině bodů. V dalších úvahách bude důležitá tato pomocná věta:

Věta 3.3. *Nechť* **K** *je libovolný orientovaný svazek kružnic se základní úsečkou v libovolné straně jednoduché skupiny čtyř přímek. Jestliže existuje k této straně protější strana, pak ze dvou orientovaných svazků kružnic, které mají základní úsečku v této protější straně a jsou podobné svazku* **K**, *jeden se protíná se svazkem* **K** *v množině bodů mající společné body se všemi čtyřmi trojstrannými oblastmi omezenými přímkami dané skupiny, zatím co průsek druhého svazku se svazkem* **K** *nemá společný bod se žádnou z těchto oblastí.*

Toto tvrzení lze snadno ověřit vyšetřením jednotlivých možných případů. Vzhledem k tomu, že podrobný důkaz je dosti dlouhý a při tom myšlenkově jednoduchý, přenecháváme jej čtenáři.

4. Základní věta o fokále.

Definice. Nechť AB, CD jsou protější úsečky jednoduché skupiny čtyř přímek. Dva orientované eliptické svazky kružnic mající v nich základní úsečky nazveme *souhlasně orientované*, jestliže jejich průsek nemá společných bodů s žádnou trojstrannou oblastí určenou přímkami dané skupiny.

Věta 4.1. *Množina* **F** *ohnisek všech kuželoseček dotýkajících se přímek jednoduché čtveřice* **P** *je totožná s průsekem dvou souhlasně orientovaných podobných svazků kružnic majících za základní úsečky dvě protější strany skupiny* **P**.

Důkaz. Nejprve dokážeme toto pomocné tvrzení: *Paty kolmic vedených na přímky skupiny* **P** *z průsečíků sobě odpovídajících kružnic svazků, uvedených ve větě* 3.1, *leží na kružnici nebo na přímce.*

Označme dané přímky p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a pro $i, k = 1, 2, 3, 4$, $i \neq k$ nechť P_{ik} je průsečík přímek p_i, p_k; dále označme F průsečík sobě odpovídajících kružnic zmíněných svazků a nechť Q_i jsou paty kolmic spuštěných z bodu F

na přímky p_i. Body Q_i leží na přímce právě tehdy, když bod F je ohniskem paraboly dotýkající se daných přímek. Neleží-li body Q_i na přímce, spojme je uzavřenou lomenou čarou s vrcholy v bodech Q_i tak, aby se přímky, na nichž leží body spojené jednou úsečkou této lomené čáry, protínaly vždy v některém krajním bodě základních úseček svazků. Z tětivových čtyřúhelníků, jejichž vrcholy jsou: bod F, dva různé koncové body úseček lomené čáry spojující body Q_i a průsečík přímek, na nichž tyto dva body leží, snadno vidíme, že úhly při protějších vrcholech naší lomené čáry jsou stejné, po případě výplňkové, podle toho, zda některé dvě úsečky lomené čáry mají společný vnitřní bod či nikoliv. Body Q_i leží tedy na kružnici.

Z tohoto pomocného tvrzení použitím věty 3.2 ihned plyne, že sobě odpovídající kružnice dvou podobných souhlasně orientovaných svazků se základními úsečkami v protějších stranách jednoduché čtveřice přímek se protínají v ohniskách kuželoseček, které se těchto přímek dotýkají. Mimoto lze lehce dokázat, že pomocné tvrzení neplatí pro žádné další průsečíky sobě odpovídajících kružnic svazků nesouhlasně orientovaných. Ježto však podle věty 3.1 je ohnisko každé kuželosečky, která se dotýká daných čtyř přímek, průsečíkem dvou kružnic, z nichž jedna prochází A, B, druhá body C, D a které mají poloměry úměrné délkám těchto úseček, je tím věta 4.1 dokázána.

Poznámky. Z věty 4.1 plyne důležitý důsledek, že dva podobné souhlasně orientované svazky kružnic mající základní úsečky v kterýchkoliv dvou protějších stranách jednoduché skupiny čtyř přímek se vždy protínají v téže množině **F**.

Připojíme-li k množině **F** vrcholy dané skupiny, dostaneme křivku, zvanou *fokála*; tento název souvisí s její definicí pomocí ohnisek kuželoseček. Rozbor speciálních případů provedeme v druhé části této práce, která bude věnována podrobnějšímu studiu vlastností fokály.

LITERATURA

[1] *J. Steiner - C. F. Geiser:* Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, Leipzig 1887.

Резюме

ИЗУЧЕНИЕ ФОКАЛЬНОЙ КРИВОЙ, I

ФРАНТИШЕК СЕДЛАК (Fr. Sedlák), Прага
и ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Lad. Kosmák), Брно
(Поступило в редакцию 1/III 1956 г.)

Центральным моментом работы является элементарное доказательство эквивалентности двух определений фокальной кривой; в одном из них

фокальная кривая определяется как множество фокусов конических сечений данной системы, в другом — как кривая, возникающая при помощи определенных пучков окружностей (это тесно связано с задачей найти все точки плоскости, из которых два данных отрезка видны под теми же углами).

Zusammenfassung

STUDIE DER FOKALE, I

FRANTIŠEK SEDLÁK, Praha und LADISLAV KOSMÁK, Brno.

(Eingelangt 1. III. 1956.)

Es wird ein elementarer Beweis der Aequivalenz zweier Definitionen der Fokale gegeben; nach der ersten wird die Fokale als der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar definiert, nach der zweiten wird sie mittels gewisser Kreisbüschel erzeugt. Dies hängt mit der Aufgabe zusammen, den Ort aller Punkte der Ebene zu finden, von denen aus zwei Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen.