Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 100--101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117239`

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Rozhodněte, zda každá nespočetná část E_m (resp. E_1) obsahuje řídkou nespočetnou část.

Jan Mařík, Praha.

2. Buď m celé > 1. Jestliže je $A \subset E_m$, $t \in E_1$, i celé, $1 \leqq i \leqq m$, buď A_t^i množina všech $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, pro něž $[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in A$.

Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď A řídká měřitelná množina v E_m. Nechť každá množina A_t^i ($i = 1, \ldots, m$, $t \in E_1$) má jen spočetně mnoho komponent. Potom má A míru 0.

Poznámka. Podle věty 1 z mého článku „Poznámka o řídkých množinách v E_m", který vyšel v loňském 3. čísle tohoto časopisu, platí věta pro $m = 2$.

Jan Mařík, Praha.

3. Je známo, že existují ordinální typy ξ té vlastnosti, že platí $\xi = \xi^n$ pro každé $n \geqq 1$; podobně existují ordinální typy ξ, pro něž ξ^n je různé od $\xi, \xi^2, \ldots, \ldots, \xi^{n-1}$ pro každé n. Rozhodněte, zda existuje ordinální typ ξ tak, že platí na příklad $\xi = \xi^3 \neq \xi^2$, nebo obecněji $\xi = \xi^n$, $n \geqq 3$, při čemž $\xi^i \neq \xi$ pro $i = 2, \ldots, n - 1$.

Poznámka. W. Sierpiński položil v [1] otázku, zda rovnost ordinálních typů $\alpha^2 = \beta^2$ implikuje, že $\alpha = \beta$. A. C. Davisová ukázala na elementárním příkladu*) $\alpha = \omega\eta$, $\beta = \alpha + \omega$, že tomu tak není; několik dalších výsledků je uvedeno v článcích [2], [3]. V [2] jsou dány další problémy: (a) Zda existují ordinální typy α, β takové, že platí $\alpha^2 = \beta^2$ a $\alpha^3 \neq \beta^3$? (b) Zda existují ordinální typy α, β takové, že platí $\alpha^2 \neq \beta^2$ a $\alpha^3 = \beta^3$?

Ukažme, že z kladného řešení našeho problému plyne řešení problémů (a), (b).

(a) Nechť existuje ordinální typ ξ takový, že $\xi = \xi^3 \neq \xi^2$. Položme $\alpha = \xi$, $\beta = \xi^2$. Pak je $\alpha^2 = \xi^2 = \xi^4 = \beta^2$, avšak $\alpha^3 = \xi^3 \neq \xi^2 = \xi^6 = \beta^3$.

(b) Existuje-li takové ξ, že $\xi^4 = \xi \neq \xi^2 \neq \xi^3$, pak pro $\alpha = \xi$, $\beta = \xi^2$ platí $\alpha^2 = \xi^2 \neq \xi^4 = \beta^2$, ale $\alpha^3 = \xi^3 = \xi^6 = \beta^3$.

Poznamenejme ještě, že pro uspořádaná kontinua je náš problém rozřešen záporně (viz. [4]).

*) Jako obvykle značí ω typ uspořádané množiny přirozených čísel, η typ množiny racionálních čísel.

LITERATURA

[1] Colloquium Mathematicum II, Wroclaw, *P74*, 150.

[2] *W. Sierpiński*, M^me^ *A. C. Davis*: Sur les types d'ordre, Comptes Rendus, Tome *235*, N° 16, 850.

[3] M^me^ *A. C. Davis*: Sur l'équation $\xi^n = \alpha$ pour des types d'ordre, Comptes Rendus, Tome *235*, No 17, 924—926.

[4] *M. Novotný*: O podobnosti uspořádaných kontinuí typů τ a τ^ν, Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 59—60.

Karel Karták, Praha.