ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 82 * PRAHA, 30. III. 1957 * ČÍSLO 1

STUDIE ZE ZÁKLADŮ GEOMETRIE
I. ÚTVARY NEORIENTOVANÉ

BORIS GRUBER, Poděbrady.

(Došlo dne 3. října 1955.) DT: 513,01

Práce je věnována axiomatickému budování základů trojrozměrné euklidovské geometrie. Tato první část studuje vlastnosti incidenční, rovnoběžnost, kolmost a důsledky pátého Euklidova postulátu o rovnoběžkách. Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* (ve smyslu neorientovaný směr) a *kolmý*, pro něž je vysloveno devět axiomů. Definují se zejména pojmy přímka a rovina jako jisté množiny bodů.

Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* a *kolmý*. Body značíme $A, B, C, \ldots$, zaměření $z, z', z_1, z_2, \ldots$ Každé dvojici různých bodů A, B je přiřazeno zaměření, které značíme $\zeta(AB)$. Jsou-li z_1, z_2 zaměření, pak jsou buď kolmá (znak $z_1 \perp z_2$) nebo nejsou kolmá (znak z_1 non $\perp z_2$). Množinu všech bodů nazýváme prostorem a označujeme **P**. Tyto pojmy mají následující vlastnosti:

I. *Existuje aspoň jeden bod a aspoň jedno zaměření.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC), B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Je-li dán bod A a zaměření z, pak existují body B, C tak, že $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Je-li $z_1 \neq z_2$, pak existuje právě jedno zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z, \zeta(AC) \perp z, B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*[1])

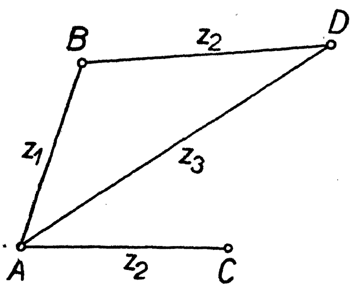
[1]) Nezávislost uvedeného systému axiomů zde nebudeme zkoumat. Že je bezesporný, ukazuje na př. model trojrozměrného euklidovského prostoru. Rozumějme bodem uspořádanou trojici $[a, b, c]$ reálných čísel a zaměřením poměr $p : q : r$ tří reálných čísel. (To je uspořádaná trojice reálných čísel, z nichž aspoň jedno je různé od nuly; přitom poměry $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za totožné, existuje-li číslo $k \neq 0$ tak, že je $p_1 = kp_2$, $q_1 = kq_2$, $r_1 = kr_2$.) Jsou-li body $[a_1, b_1, c_1]$, $[a_2, b_2, c_2]$ různé, přiřadíme jim zaměření $(a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2)$. Zaměření $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za kolmá, je-li $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$. Axiomy I až IX jsou pak zřejmě splněny.

1. Přímka

Zde zkoumáme důsledky axiomů I až IV.

1.1. *Existují aspoň čtyři různé body a tři různá zaměření.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle IV existují body B, C tak, že $\zeta(AB) = z_1$, $\zeta(AC) \neq z_1$ (obr. 1). Označme $\zeta(AC) = z_2$, takže $z_1 \neq z_2$. Jest $B \neq A \neq C$, ježto symboly $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$ mají smysl, a $B \neq C$, ježto $z_1 \neq z_2$. Podle IV existuje bod D tak, že platí $\zeta(BD) = z_2$; tedy jest $B \neq D$. Rovněž jest $A \neq D$; jinak by totiž podle II bylo $z_2 = \zeta(BD) = \zeta(BA) = \zeta(AB) = z_1$ proti předpokladu. Označme $z_3 = \zeta(AD)$. Tvrdíme, že je $z_1 \neq z_3 \neq z_2$. Kdyby bylo $z_1 = z_3$, bylo by $\zeta(AB) = \zeta(AD)$ a z toho podle III $\zeta(AB) = \zeta(BD)$ čili $z_1 = z_2$ — spor. Kdyby bylo $z_2 = z_3$, bylo by $\zeta(DB) = \zeta(DA)$, z toho podle III $\zeta(DB) = \zeta(BA)$, to jest $z_2 = z_1$ — opět spor. Konečně jest $D \neq C$, neboť jinak by bylo $z_2 = z_3$.



Obr. 1.

1.2. Definice. *Množinu $M \subset \mathbf{P}$ nazýváme maximální množinou o vlastnosti V, jestliže*

1. *M má vlastnost V,*
2. *je-li $M \subset M_1 \subset \mathbf{P}$, $M \neq M_1$, pak M_1 nemá vlastnost V.*

1.3. Definice. *Množinu $p \subset \mathbf{P}$ nazýváme přímkou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *je to maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B, C, D \in p,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{1}$$

1.4. Definice. *Zaměřením přímky p rozumíme zaměření $\zeta(AB)$, je-li $A, B \in p$, $A \neq B$. Zaměření přímky p značíme $\zeta(p)$.*

1.5. *Jestliže pro přímky p, p_1 platí $p \subset p_1$, jest $p = p_1$.*

Důkaz. Platí (1) a

$$A, B, C, D \in p_1,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{2}$$

Kdyby bylo $p \neq p_1$, nebyla by p maximální množina vlastnosti (1) — spor s definicí 1.3.

1.6. *Budiž A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\text{buď } X = A \quad \text{nebo} \quad \zeta(AX) = z\,, \tag{3}$$

je přímka o zaměření z obsahující bod A.

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Jest $A \in p$. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Tedy $B \in p$, $B \neq A$, takže p obsahuje aspoň dva různé body. Zvolme v množině p body C, D, E, F tak, aby $C \neq D$, $E \neq F$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest $\zeta(CD) = z$ (užíváme II). Je-li $C \neq A \neq D$, jest $\zeta(AC) = z$, $\zeta(AD) = z$; z III pak plyne $\zeta(CD) = z$. Stejně se dokáže $\zeta(EF) = z$, takže $\zeta(CD) = \zeta(EF)$. Tedy p má vlastnost (1). Budiž konečně $p \subset p_1 \subset \mathbf{P}$, $p \neq p_1$, takže existuje bod G patřící do p_1, nikoli však do p. Podle definice množiny p je $G \neq A$, $\zeta(AG) \neq z$. V množině p_1 vezměme body A, B, A, G, takže $A \neq B$, $A \neq G$. Podle předcházejícího je $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AG) \neq z$, což znamená, že p_1 nemá vlastnost (2). Tedy p je maximální množina o vlastnosti (1), tedy přímka. Obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p) = \zeta(AB) = z$.

1.7. *Budiž A bod, z zaměření. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X splňujících* (3).

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Podle 1.6 je množina p přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Budiž p_1 přímka o zaměření z, obsahující bod A. Pro každý bod X přímky p_1 platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, takže $p_1 \subset p$. Z 1.5 plyne $p_1 = p$.

1.8. *Nechť přímka p obsahuje bod A a má zaměření z. Potom p je množina všech bodů X, pro něž platí* (3).

Důkaz plyne z 1.7.

1.9. *Existuje aspoň jedna přímka.*

Důkaz plyne z I a 1.7.

1.10. *Ke každé přímce existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje přímka, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž p libovolná přímka. Zvolme bod $A \in p$ a označme $z = \zeta(p)$. Podle IV existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) \neq z$; tedy C non $\in p$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle 1.1 existují zaměření $z_1 \neq z_2$ a podle IV lze najít bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$, takže $A \neq B$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod B a má zaměření z_2. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) = z_2$. Ježto $\zeta(BA) = z_1 \neq z_2$, neprochází přímka p bodem A.

1.11. *Budiž $A \neq B$. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje body A, B.*

Důkaz. Označme $z = \zeta(AB)$. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že je $B \in p$. Za druhé nechť každá z přímek p_1, p_2 obsahuje body A, B. Pak každá z nich obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(A, B)$, takže jest podle 1.7 $p_1 = p_2$.

1.12. *Nechť body A, B, C neleží v přímce. Potom jsou tyto body navzájem různé a rovněž zaměření $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$, $\zeta(BC)$ jsou navzájem různá.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve $A = B = C$. Podle I existuje zaměření z a podle 1.7 přímka, která má zaměření z a obsahuje bod A a tedy i body B, C. To je však spor s předpokladem. Za druhé předpokládejme $A = B \neq C$. Podle 1.11 existuje přímka, která obsahuje body B, C, tedy i bod A, opět spor. Stejně v případech $A \neq B = C$, $A = C \neq B$. Tedy body A, B, C jsou navzájem různé. Konečně předpokládejme, že platí $\zeta(AB) = \zeta(AC)$ a označme toto zaměření z. Z 1.7 plyne, že existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z a že tato přímka obsahuje též body B, C, neboť platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) = z$. To však je spor. Tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$ a stejně v ostatních dvou případech.

1.13. *Existují tři (navzájem různé) body, které neleží v přímce.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z a podle IV body B, C, pro něž platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$. Body A, B, C nemohou ležet na žádné přímce, neboť pak by muselo být $\zeta(AB) = \zeta(AC)$.

1.14. Definice. *Přímky p, q nazýváme rovnoběžné,* je-li $\zeta(p) = \zeta(q)$.

1.15. *Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť přímky p, q mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod. Z 1.7 plyne $p = q$.

1.16. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní přímky.*

Důkaz. Podle 1.9 existuje přímka; označme ji p. Podle 1.10 existuje bod A, který neleží na p. Podle 1.7 existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p)$; označme ji q. Přímky p, q jsou rovnoběžné. Nemohou být totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

1.17. *Nechť p, q jsou přímky. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní,*
2. *p, q mají společný právě jeden bod,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li přímky p, q disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, jsou podle 1.11 totožné.

1.18. Definice. *Přímky p, q nazýváme různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

1.19. *Jsou-li přímky p, q různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné přímky p, q byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 1.17, což tato věta vylučuje. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné. Protože nejsou totožné, byly by podle 1.15 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2 a 1 z věty 1.17, což není možné.

1.20. *Existují dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 1.1. existují bod A a zaměření $z_1 \neq z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p_1, která obsahuje bod A a má zaměření z_1, a přímka p_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Kdyby přímky p_1, p_2 měly kromě bodu A společný ještě nějaký jiný bod, byly by podle 1.11 totožné, takže by bylo $z_1 = z_2$ — spor.

1.21. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 1.17. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 1.17. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 1.17.

Důkaz plyne z 1.16, 1.20 a 1.9.

2. Rovina

Zde vyvozujeme důsledky z axiomů I až VIII.

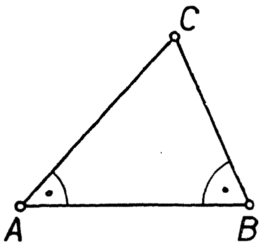
2.1. *Ke každému zaměření existuje zaměření kolmé.*

Důkaz. Budiž z_1 libovolné zaměření. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq z_1$ a podle VII existuje zaměření $z \perp z_1$.

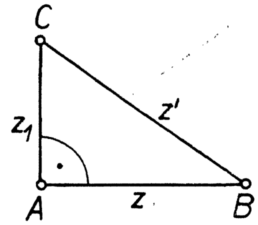
2.2. *Nechť A, B, C jsou tři různé body. Pak neplatí zároveň*

$$\zeta(AB) \perp \zeta(AC)\,, \qquad \zeta(AB) \perp \zeta(BC)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že uvedené vztahy platí, a označme $\zeta(AB) = z$, takže $\zeta(CA) \perp z$, $\zeta(CB) \perp z$, $A \neq B$ (obr. 2). Z VIII plyne $\zeta(AB) \perp z$, t. j. $z \perp z$, což je spor s VI.



Obr. 2:



Obr. 3.

2.3. *Ke každému zaměření z existuje zaměření z', pro něž platí $z' \neq z$, z'* non $\perp$ *z.*

Důkaz. Budiž z libovolné zaměření. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle I bod A (obr. 3). Najděme podle IV body B a C tak, aby platilo

$$\zeta(AB) = z\,, \qquad \zeta(AC) = z_1\,.$$

Jest $B \neq C$, neboť jinak by bylo $z = z_1$ a to není podle VI možné. Označme $z' = \zeta(BC)$. Kdyby bylo $z = z'$, to jest $\zeta(BA) = \zeta(BC)$, plynulo by z III $\zeta(BA) = \zeta(AC)$, to jest $z = z_1$, což není možné. Tedy je $z' \neq z$. Ježto platí $z \perp z_1$, to jest $\zeta(AB) \perp \zeta(AC)$, nemůže podle 2.2 platit $\zeta(AB) \perp \zeta(BC)$, to jest $z \perp z'$. Tedy z' non $\perp$ z.

2.4. *Existují zaměření z_1, z_2, z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_2, z_1 \perp z_3, z_2 \perp z_3$.*

Důkaz. Podle I existuje zaměření z_1 a podle 2.1 zaměření $z_2 \perp z_1$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$, takže podle VII existuje zaměření z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_3 \perp z_2$.

2.5. *Budiž $n \geqq 4$, buďtež $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zaměření. Potom existují taková i, j ($1 \leqq \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$), že z_i non $\perp z_j$.*

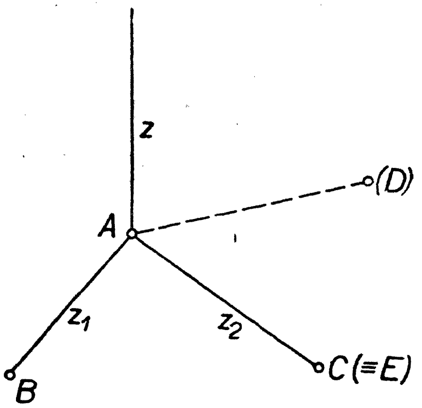
Důkaz. Předpokládejme naopak, že platí $z_i \perp z_j$ pro všechna i, j ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$). Platí tedy $z_1 \perp z_3 \perp z_2$, $z_1 \perp z_4 \perp z_2$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$ a podle VII $z_3 = z_4$, což je spor s předpokladem $z_3 \perp z_4$.

2.6 Definice. *Množinu $\tau \subset$ **P** nazýváme rovinou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B \in \tau\,, \ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{1}$$

2.7. *Každá rovina obsahuje tři body, které neleží v přímce.*



Obr. 4.

Důkaz. Mějme libovolnou rovinu τ. Podle 2.6 existují body $A \neq B$, které leží v τ. Dále existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina vlastnosti (1). Označme $z_1 = \zeta(AB)$. Ježto τ má vlastnost (1), jest $z_1 \perp z$ a tedy $z_1 \neq z$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp z$ (obr. 4), a podle IV můžeme nalézt bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_2$. Protože $z_2 \perp z_1$, je $z_2 \neq z_1$, takže body A, B, C neleží v přímce. Předpokládejme, že bod C neleží v τ, a označme $\tau_1 = \tau \cup \{C\}$, takže $\tau \subset \tau_1 \subset$ **P**, $\tau \neq \tau_1$. Dokážeme implikaci

$$D, E \in \tau_1\,, \ D \neq E \Rightarrow \zeta(DE) \perp z\,. \tag{2}$$

Zvolme libovolně body $D, E \in \tau_1$, $D \neq E$. Je-li $D \neq C \neq E$, patří body D, E do τ a (2) plyne z (1). Nechť je tedy třeba $E = C$, takže $D \in \tau$. Je-li $D = A$, jest $\zeta(DE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Je-li $D \neq A$, jest $\zeta(AD) \perp z$, neboť $D \in \tau$, a $\zeta(AE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Z toho pode VIII je $\zeta(DE) \perp z$. Tím je správnost implikace (2) dokázána. To však znamená, že τ není maximální množina vlastnosti (1), což je spor. Nebyl tedy správný předpoklad, že C neleží v τ. Tedy v τ leží body A, B, C, které neleží v přímce.

2.8. *Žádná množina není zároveň přímkou a rovinou.*

Důkaz plyne z 2.7.

2.9. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1) *a implikace*

$$A, B \in \tau, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z' . \qquad (3)$$

Potom jest $z = z'$.

Důkaz. Podle 2.7 existují v rovině τ body C, D, E, které neleží v přímce. Podle 1.12 jsou tyto body navzájem různé a platí $\zeta(CD) \neq \zeta(CE)$. Protože platí (1), jest $\zeta(CD) \perp z \perp \zeta(CE)$, a protože platí (3), jest $\zeta(CD) \perp z' \perp \zeta(CE)$. Ze VII plyne $z = z'$.

2.10. *Nechť τ jest rovina. Potom existuje právě jedno zaměření z tak, že τ je maximální množinou vlastnosti* (1). *Toto zaměření z nazýváme zaměřením kolmým k rovině τ nebo krátce zaměřením roviny τ a označujeme $\zeta(\tau)$.*[2]

Důkaz. Aspoň jedno takové zaměření z existuje podle 2.6. Předpokládejme, že pro zaměření z' platí, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Potom tedy platí jak implikace (1), tak implikace (3), a z 2.9 dostáváme $z = z'$.

2.11. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1). *Potom z jest zaměřením roviny τ.*

Důkaz. Označme z' zaměření roviny τ. To znamená, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Tedy τ má vlastnost (3), t. j. platí implikace (3) a podle předpokladu implikace (1). Z 2.9 plyne $z = z'$.

2.12. *Jestliže pro roviny τ, τ_1 platí $\tau \subset \tau_1$, jest $\tau = \tau_1$.*

Důkaz. Označíme-li $z = \zeta(\tau)$, $z_1 = \zeta(\tau_1)$, platí (1) a

$$A, B \in \tau_1,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \qquad (4)$$

Je-li A, $B \in \tau$, je také A, $B \in \tau_1$, neboť $\tau \subset \tau_1$, takže

$$A, B \in \tau,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \qquad (5)$$

Z (1) a (5) podle 2.9 plyne $z = z_1$. Kdyby bylo $\tau \neq \tau_1$, plynulo by z (1) a (4), že τ není maximální množinou vlastnosti (1) — spor.

2.13. *Budiž A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\textit{buď } X = A \ \textit{ nebo } \ \zeta(AX) \perp z , \qquad (6)$$

je rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z.

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, pro něž platí (6). Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$. Tedy $B \in \tau$, takže τ obsahuje dva různé body. Za druhé zvolme libovolně body C, $D \in \tau$, $C \neq D$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest podle (6) $\zeta(CD) \perp z$. Je-li $C \neq A \neq D$, plyne ze vztahů $\zeta(AC) \perp z$, $\zeta(AD) \perp z$ podle VIII $\zeta(CD) \perp z$. Je tedy správná

[2]) Zaměření $\zeta(\tau)$ znamená zřejmě zaměření přímky kolmé k rovině τ (viz definici 3.30). Název „zaměření roviny" není sice běžný, ale je zcela důsledný. Přímka i rovina určují jednoznačně jisté zaměření. Nazýváme-li je v prvním případě „zaměření přímky", je přirozené nazývat je v druhém případě „zaměřením roviny".

implikace (1). Konečně vezměme libovolnou množinu τ_1, pro niž platí $\tau \subset \tau_1 \subset \subset \mathsf{P}$, $\tau \neq \tau_1$. Existuje bod E, který patří do τ_1, nikoli však do τ, takže je $E \neq A$, $\zeta(AE)$ non $\perp z$. Protože τ_1 obsahuje bod $E \neq A$, pro nějž neplatí $\zeta(AE) \perp z$, jest τ maximální množinou vlastnosti (1), tedy rovinou. Tato rovina obsahuje bod A a platí pro ni implikace (1), takže podle 2.11 je jejím zaměřením zaměření z.

2.14. *Budiž A bod, z zaměření. Potom existuje právě jedna rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, které splňují (6). Podle 2.13 je τ rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je-li τ_1 rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z, pak τ_1 je maximální množinou vlastnosti (2). Z toho plyne, že pro každý bod X množiny τ_1 platí (6), takže $\tau_1 \subset \tau$. Z 2.12 plyne $\tau_1 = \tau$.

2.15. *Nechť rovina τ obsahuje bod A a má zaměření z. Potom τ je množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz plyne z 2.14.

2.16. *Existuje aspoň jedna rovina.*

Důkaz plyne z I a 2.14.

2.17. *Ke každé rovině existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje rovina, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž τ rovina; označme $z = \zeta(\tau)$ a zvolme $A \in \tau$. Podle IV existuje bod B, pro který platí $\zeta(AB) = z$, tedy vzhledem k VI $\zeta(AB)$ non $\perp z$. Z 2.15 pak plyne B non $\in \tau$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle I existuje zaměření z a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Podle 2.14 existuje rovina τ, která obsahuje bod B a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) \perp z$. Bod A neleží v τ, neboť není ani $A = B$ ani $\zeta(BA) \perp z$.

2.18. *Třemi body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť body A, B, C neleží v přímce. Podle 1.12 jsou navzájem různé a platí $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$. Podle VII existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(AB) \perp z \perp \zeta(AC). \tag{7}$$

Z 2.14 plyne, že existuje rovina τ, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že tato rovina — vzhledem k (7) — obsahuje též body B, C. Za druhé předpokládejme, že rovina τ_1 obsahuje body A, B, C. Pak tedy platí $\zeta(AB) \perp \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(AC)$. Odtud a ze (7) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Každá z rovin τ, τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže $\tau = \tau_1$ podle 2.14.

2.19. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme rovnoběžné, je-li $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.*

2.20. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 rovnoběžné, pak jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod a užijme 2.14.

2.21. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ, a podle 2.14 existuje rovina, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Označme ji τ_1. Roviny τ, τ_1 jsou rovnoběžné. Nejsou totožné, ježto A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.22. *Budiž τ rovina, A bod. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Hledaná rovina musí obsahovat bod A a mít zaměření $\zeta(\tau)$. Podle 2.14 taková rovina existuje, a to právě jedna.

2.23. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje aspoň jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.24. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 mají společný bod, pak mají společnou přímku.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají společný bod A. Označme $z_1 = \zeta(\tau_1)$, $z_2 = \zeta(\tau_2)$. Ze VII nebo 2.1 plyne existence zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp \perp z \perp z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z. Podle 2.15 je τ_1 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp \perp z_1$, a τ_2 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, je podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, to jest buď $X = A$ nebo $z_1 \perp \zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau_1$ i $X \in \tau_2$. Tedy přímka p leží v rovině τ_1 i v rovině τ_2.

2.25. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 se protínají v přímce,*[3]
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz. Zřejmě nemůže nastat zároveň případ 1 a některý z případů 2, 3. Že nemohou nastat zároveň ani případy 2, 3 plyne z 2.8. Nejsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, mají podle 2.24 společnou přímku p. Mají-li společný ještě bod A, který neleží v p, zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, a to není možné, protože A neleží na p. Z 2.18 plyne, že roviny τ_1, τ_2 jsou totožné, neboť každá z nich obsahuje body A, B, C.

2.26. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme různoběžné, protínají-li se v přímce.*

2.27. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné roviny τ_1, τ_2 byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 2.25, což však tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(\tau_1) =$

---

[3]) Tím rozumíme, že průnik množin τ_1, τ_2 je přímka.

$= \zeta(\tau_2)$, byly by τ_1, τ_2 rovnoběžné. Jelikož nejsou totožné, byly by podle 2.20 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 2.25. To však není možné.

2.28. *Existují dvě různoběžné roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ_1 a zvolme na ní bod A. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq \zeta(\tau_1)$ a podle 2.14 existuje rovina τ_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Roviny τ_1, τ_2 nejsou disjunktní, neboť obě obsahují bod A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Z 2.25 plyne, že jsou různoběžné.

2.29. *Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 2.25. *Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 2.25. *Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 2.25.

Důkaz plyne z 2.21, 2.28 a 2.16.

2.30. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme kolmé, je-li $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$.*

2.31. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak nejsou rovnoběžné a tedy jsou navzájem různé.*

Důkaz plyne z VI.

2.32. *Existují tři roviny, z nichž každé dvě jsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.4, I a 2.14.

2.33. *Jsou-li dány více než tři roviny, pak mezi nimi existují dvě, které nejsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.5.

3. Rovina a přímka

Stále předpokládáme platnost axiomů I až VIII.

3.1. *Nechť přímka p má s rovinou τ společný aspoň jeden bod. Potom p leží v τ tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau) . \tag{1}$$

Důkaz. 1. Nechť p leží v τ. Zvolíme-li na přímce p body $A \neq B$, jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$.

2. Nechť přímka p má s rovinou τ společný bod A a nechť platí (1). Označme $z_1 = \zeta(p)$, $z_2 = \zeta(\tau)$, takže $z_1 \perp z_2$. Rovina τ je podle 2.15 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, jest podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z_1$, tedy buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau$. Tedy $p \subset \tau$.

3.2. *Leží-li přímka p v rovině τ, platí* (1).

Důkaz plyne z 3.1.

3.3. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.2 jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Hledaná přímka musí procházet bodem A a mít zaměření $\zeta(p)$. Podle 1.7 taková přímka existuje, a to právě jedna. Z 3.1 pak plyne, že tato přímka leží v rovině τ.

3.4. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ aspoň jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

3.5. *V každé rovině leží dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Nechť τ je rovina. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp \zeta(\tau)$, takže $z_1 \neq \zeta(\tau)$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp \zeta(\tau)$, tedy $z_1 \neq z_2$. Zvolme v rovině τ bod A a označme p_i ($i = 1, 2$) přímku procházející bodem A, která má zaměření z_i. Přímky p_1, p_2 existují podle 1.7. Nejsou disjunktní, neboť obě procházejí bodem A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Tedy jsou podle 1.17 různoběžné. Každá z přímek p_i ($i = 1, 2$) má s rovinou τ společný bod A a platí $\zeta(p_i) = z_i \perp \zeta(\tau)$ pro $i = 1, 2$. Z 3.1 plyne, že přímky p_1, p_2 leží v τ.

3.6. *Budiž τ rovina. Potom platí:*

1. *V τ existují přímky p, q, které jsou disjunktní.*
2. *V τ existují přímky p, q, které jsou různoběžné.*
3. *V τ existují přímky p, q, které jsou totožné.*

Důkaz. Druhé tvrzení je věta 3.5, třetí tvrzení plyne z druhého. Podle třetího tvrzení existuje v τ přímka p a podle 2.8 existuje v τ bod A, který neleží na p. Z 3.4 plyne existence přímky q, která leží v τ a je disjunktní s p. Tím je dokázáno i první tvrzení.

3.7. *Má-li přímka s rovinou společné dva různé body, leží v rovině celá.*

Důkaz. Nechť přímka p má s rovinou τ společné body A, B ($A \neq B$). Potom jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$. Z 3.1 plyne, že p leží v τ.

3.8. *Přímkou a bodem, který na té přímce neleží, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť bod A neleží na přímce p. Zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, což není možné, neboť A neleží na p. Podle 2.18 existuje rovina τ, která obsahuje body A, B, C a podle 3.7 leží p v τ. Jestliže rovina τ_1 prochází bodem A a přímkou p, pak obsahuje body A, B, C a je podle 2.18 totožná s τ.

3.9. *Nechť p je přímka a z zaměření, nechť*

$$z \neq \zeta(p)\,. \tag{2}$$

Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a jejíž zaměření je kolmé k zaměření z.

Důkaz. Na přímce p zvolme bod A. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$, tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(p)$, takže B neleží na přímce p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která obsahuje přímku p a bod B. Užitím 3.2 máme

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(AB) = z\,. \tag{3}$$

Jestliže za druhé rovina τ_1 obsahuje přímku p a má zaměření kolmé k zaměření z, jest

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp z\,. \tag{4}$$

Z (2), (3), (4) plyne podle VII, že roviny τ, τ_1 mají stejná zaměření. Ježto obě obsahují bod A, jsou podle 2.14 totožné.

3.10. *Dvěma různoběžkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť p, q jsou různoběžky a A jejich společný bod. Podle 1.19 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$, takže existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(p) \perp z \perp \zeta(q)\,. \tag{5}$$

Podle 2.14 existuje rovina τ, která prochází bodem A a má zaměření z. Z 3.1 plyne, že přímky p, q leží v τ. Jestliže rovina τ_1 obsahuje přímky p, q, jest podle 3.2

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(q)\,. \tag{6}$$

Z (5) a (6) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Rovina τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže podle 2.14 je totožná s τ.

3.11. *Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť přímky p, q jsou různé a mají obě totéž zaměření. Zvolme na q bod A. Podle 1.15 jsou p, q disjunktní, takže A neleží na p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která prochází přímkou p a bodem A. Z 3.2 plyne $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Ježto $\zeta(p) = \zeta(q)$, jest také $\zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, a užijeme-li 3.1, dostaneme, že q leží v τ. Prochází-li rovina τ_1 přímkami p, q, prochází přímkou p a bodem A, a z 3.8 plyne $\tau_1 = \tau$.

3.12. *Jestliže body A, B, C, D neleží v rovině, pak jsou navzájem různé a žádné tři z nich neleží v přímce.*

Důkaz. Předpokládejme, že na př. body A, B, C leží na přímce p. Jestliže D neleží na p, označme τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem D. Taková rovina τ existuje podle 3.8. Jestliže bod D leží na p, existuje podle 1.10 bod E, který neleží na p. Označme pak τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem E. Rovina τ v obou případech obsahuje body A, B, C, D, což je spor s předpokladem. Tedy žádné tři z bodů A, B, C, D neleží v přímce. Nyní užijeme věty 1.12 na trojice A, B, C, A, B, D, B, C, D.

3.13. *Existují čtyři body, které neleží v rovině.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.7 obsahuje τ body A, B, C, které neleží v přímce, a podle 2.17 existuje bod D, který neleží v τ.

Kdyby nějaká rovina τ_1 obsahovala body A, B, C, D, byla by podle 2.18 totožná s τ. To však není možné, neboť D neleží v τ.

3.14. Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou rovnoběžné, je-li $\zeta(p) \perp \perp \zeta(\tau)$.*

3.15. *Leží-li přímka p v rovině τ, pak p a τ jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 3.2.

3.16. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ, pak buď p leží v τ nebo p a τ jsou disjunktní.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Nejsou-li p, τ disjunktní, plyne z 3.1, že p leží v τ.

3.17. *Existují přímka a rovina, které jsou disjunktní rovnoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina τ a podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ. Podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$ a podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření z. Přímka p je rovnoběžná s τ, avšak neleží v τ, neboť bod A neleží v τ. Z 3.16 plyne, že p, τ jsou disjunktní.

3.18. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou disjunktní,*
2. *p, τ mají společný právě jeden bod,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li p, τ disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, leží p v τ podle 3.7.

3.19 Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

3.20. *Jsou-li přímka p a rovina τ různoběžné, pak p neleží v τ a jest $\zeta(p)$ non $\perp \perp \zeta(\tau)$.*

Důkaz. Kdyby p ležela v τ, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 3.18, což tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, byly by p, τ rovnoběžné. Ježto p neleží v τ, byly by podle 3.16 p a τ disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 3.18. To však není možné.

3.21. *Existují přímka p a rovina τ, které jsou různoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ a zvolme na ní libovolný bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Kdyby p ležela v τ, bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $\zeta(\tau) \perp \zeta(\tau)$, což by byl spor s VI. Z 3.18 plyne, že p, τ jsou různoběžné.

3.22. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 3.18.

Důkaz. První dvě tvrzení plynou z 3.17 a 3.21. Třetí plyne z druhého tvrzení věty 2.29.

3.23. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je p rovnoběžná s τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$. Tedy je $\zeta(p) \perp$. $\perp \zeta(\tau_2)$.

3.24. *Přímka p je rovnoběžná s rovinou τ tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná aspoň s jednou přímkou roviny τ.*

Důkaz. 1. Je-li p rovnoběžná s přímkou q, která leží v τ, jest podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, takže p a τ jsou rovnoběžné.

2. Nechť p je rovnoběžná s τ, takže platí $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. V rovině τ zvolme bod A a označme q přímku, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(p)$. Taková přímka existuje podle 1.7. Přímky p, q jsou rovnoběžné a z 3.1 plyne, že q leží v τ.

3.25. *Rovina τ_1 je rovnoběžná s rovinou τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li dvě různoběžky, které jsou obě rovnoběžné s τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ_1 obsahuje různoběžné přímky p, q, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou τ_2. Označíme-li $z_1 = \zeta(p_1)$, $z_2 = \zeta(q)$, jest podle předpokladu $z_1 \perp \zeta(\tau_2) \perp z_2$, podle 1.19 $z_1 \neq z_2$ a podle 3.2 $z_1 \perp \zeta(\tau_1) \perp z_2$. Z toho plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.

2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Podle 3.5 obsahuje τ_1 dvě různoběžné přímky p, q a podle 3.2 platí

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,, \qquad \zeta(q) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,,$$

takže p, q jsou rovnoběžné s τ_2.

3.26. *Nechť přímka p je rovnoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq$ $\neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(p) = \zeta(q)$, takže p, q jsou rovnoběžné.

3.27. *Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné, nechť přímka p leží v τ_1 a je rovnoběžná s τ_2. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle 3.15 je p rovnoběžná s τ_1, takže podle 3.26 platí 3.27.

3.28. *Nechť rovina τ je různoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Potom průsečnice rovin τ, τ_1 je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ, τ_2.*

Důkaz. Označme p_i ($i = 1, 2$) průsečnici rovin τ, τ_i. Přímka p_1 leží v rovině τ i v rovině τ_1. Podle 3.15 je rovnoběžná s τ_1 a podle 3.23 rovnoběžná s τ_2. Vezmeme-li ve větě 3.27 p_1, τ, τ_2 místo p, τ_1, τ_2, dostáváme, že p_1 je rovnoběžná s p_2.

3.29. *Nechť τ je rovina, A bod. Potom sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ, je rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

D ů k a z. Označme τ_1 sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ. Podle 1.7 existuje aspoň jedna taková přímka, neboť podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$. Speciálně tedy bod A patří do množiny τ_1. Dále označme τ_2 rovinu, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Podle 2.22 existuje právě jedna taková rovina; z 2.15 plyne, že to je množina všech bodů X, pro něž platí

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) \perp \zeta(\tau) . \tag{7}$$

Ježto bod A patří do množiny τ_1 i do množiny τ_2, budeme dále uvažovat jen body $X \neq A$. 1. Budiž $X \in \tau_1$, $X \neq A$. Pak existuje přímka p tak, že platí $A \in p, X \in p, \zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Tedy jest $\zeta(AX) = \zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, takže $X \in \tau_2$ (viz (7)). 2. Budiž $X \in \tau_2$, $X \neq A$. Označíme-li p přímku, procházející body A, X, jest vzhledem k (7) $\zeta(p) = \zeta(AX) \perp \zeta(\tau)$, takže p je rovnoběžná s rovinou τ a prochází bodem A. Tedy $X \in \tau_1$.

3.30. Definice. *Pravíme, že přímka p je kolmá k rovině τ, platí-li $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.*

3.31. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak p neleží v τ a není s τ rovnoběžná.*

D ů k a z. Z VI plyne, že je-li p kolmá k τ, nemůže být rovnoběžná s τ. Podle 3.15 pak p nemůže ležet v τ.

3.32. *Existují přímka p a rovina τ tak, že p je kolmá k τ.*

D ů k a z. Podle 2.16 existuje rovina — označme ji τ — a podle I bod A. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Tedy p je kolmá k τ.

3.33. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a k rovině τ_2, pak roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.*

D ů k a z. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, takže $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.

3.34. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je přímka p kolmá k rovině τ_2.*

D ů k a z. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže je $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$.

3.35. *Nechť přímka p není kolmá k rovině τ. Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ.*

D ů k a z. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \neq \zeta(\tau)$. Že rovina τ_1 obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ, znamená totéž, jako že τ_1 obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(\tau)$. Taková rovina τ_1 existuje podle 3.9, a to právě jedna.

3.36. *Je-li rovina τ kolmá ke dvěma různoběžným rovinám τ_1, τ_2, je kolmá i k jejich průsečnici.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(\tau) = \zeta(q)$, což znamená, že přímka q je kolmá k rovině τ.

3.37 Definice. *Přímky p, q nazýváme kolmé, platí-li $\zeta(p) \perp \zeta(q)$.*

3.38. *Jsou-li přímky p, q kolmé, pak nejsou totožné ani rovnoběžné.*

Důkaz plyne z VI.

3.39. *Existují dvě kolmé přímky.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle 2.1 existuje zaměření $z_2 \perp z_1$. Z 1.7 plyne existence přímek p_i $(i = 1, 2)$, z nichž každá prochází bodem A a má zaměření z_i.

3.40. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak je kolmá ke každé přímce, která leží v τ.*

Důkaz. Nechť přímka q leží v τ. Potom jest podle předpokladu a podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(\tau) \perp \zeta(q)$, takže p, q jsou kolmé.

3.41. *Přímka p je kolmá k rovině τ tehdy a jen tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám ležícím v τ.*

Důkaz. 1. Nechť p je kolmá k různoběžným přímkám q_1, q_2, které leží v τ. Platí tedy $\zeta(q_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(q_2)$, dále podle 1.19 $\zeta(q_1) \neq \zeta(q_2)$ a podle 3.2 $\zeta(q_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(q_2)$. Odtud plyne podle VII $\zeta(p) = \zeta(\tau)$, takže p je kolmá k τ. 2. Nechť p je kolmá k τ. Podle 3.5 obsahuje τ dvě různoběžky a podle 3.40 je p ke každé z těchto různoběžek kolmá.

3.42. *Rovina τ_1 je kolmá k rovině τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li aspoň jednu přímku kolmou k τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ obsahuje přímku p, která je kolmá k τ_2. Pak jest jednak $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, jednak podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$, tedy $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$, takže roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé. 2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé, takže $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Zvolme v rovině τ_1 bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau_2)$. Tedy p je kolmá k τ_2 a z 3.1 plyne, že leží v τ_1.

3.43. Definice. *Přímky p, q nazýváme mimoběžné, neleží-li v rovině.*

3.44. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, jsou disjunktní (tedy navzájem různé) a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Uvažme nejprve, že ke každé přímce existuje rovina, která tuto přímku obsahuje. To plyne na př. z 1.10 a 3.8. Tedy přímky p, q nemohou být totožné. Podle 3.10 nemohou být ani různoběžné, takže podle 1.17 jsou disjunktní. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné disjunktní a věta 3.11 by vedla ke sporu. Tedy je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.

3.45. *Existují dvě mimoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 3.13 existují body A, B, C, D, které neleží v rovině. Podle 3.12 jsou tyto body navzájem různé. Označme p přímku, procházející body

A, B, a q přímku, procházející body C, D. Přímky p, q existují podle 1.11. Kdyby nějaká rovina obsahovala přímky p, q, obsahovala by body A, B, C, D, a to není možné.

3.46. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q.*

Důkaz. Podle 3.44 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$. Že rovina τ obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q, znamená totéž, jako že τ obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(q)$. Podle 3.9 taková rovina τ existuje, a to právě jedna.

4. Euklidovské vlastnosti

K axiomům I až VIII připojme nyní ještě axiom IX.

4.1. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje právě jeden bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

Důkaz. Existence bodu C je zaručena axiomem IX. Předpokládejme dále, že body C_1, C_2 splňují vztahy

$$\zeta(AC_1) = z_1\,, \quad \zeta(BC_1) \perp z_2\,, \tag{1}$$

$$\zeta(AC_2) = z_1\,, \quad \zeta(BC_2) \perp z_2\,. \tag{2}$$

Označme p přímku, která prochází bodem A a má zaměření z_1, a τ rovinu, která prochází bodem B a má zaměření z_2. Taková přímka a rovina existují podle 1.7 a 2.14. Z těchto vět zároveň plyne s ohledem na (1) a (2), že body C_1, C_2 leží na přímce p i v rovině τ. Kdyby bylo $C_1 \neq C_2$, ležela by p podle 3.7 v τ a bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $z_1 \perp z_2$, což by byl spor s předpokladem.

4.2. *Jestliže přímka p není rovnoběžná s rovinou τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímka p má s rovinou τ společný nejvýše jeden bod. Jinak by totiž podle 3.7 ležela v τ a tedy byla podle 3.15 rovnoběžná s τ proti předpokladu. Existují tedy body $A \in p$, A non $\in \tau$, $B \in \tau$, B non $\in p$, takže $A \neq B$.

Označme z_1 zaměření přímky p, z_2 zaměření roviny τ. Protože p není rovnoběžná s τ, jest z_1 non $\perp z_2$. Podle IX existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$. Odtud plyne podle 1.8 $C \in p$ a podle 2.15 $C \in \tau$, takže p a τ mají společný aspoň jeden bod.

4.3. *Jestliže přímka p je kolmá k rovině τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz plyne z 3.31 a 4.2.

4.4. *Jestliže přímka p a rovina τ jsou disjunktní, pak p je rovnoběžná s τ.*

Důkaz plyne z 4.2.

4.5. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *p, τ jsou různoběžné,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz plyne z 3.18 a 4.4.

4.6. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 nejsou rovnoběžné, pak se protínají v přímce.*

Důkaz. Podle 3.5 obsahuje rovina τ_1 dvě různoběžné přímky p, q. Kdyby každá z těchto přímek byla rovnoběžná s rovinou τ_2, byly by τ_1, τ_2 podle 3.25 rovnoběžné, což podle předpokladu nenastává. Tedy jedna z přímek p, q — budiž to třeba přímka p — není rovnoběžná s rovinou τ_2. Podle 4.2 existuje bod, který leží v rovině τ_2 a na přímce p, tedy i v rovině τ_1. Roviny τ_1, τ_2 tedy nejsou disjunktní a také ne totožné, neboť pak by byly rovnoběžné. Z 2.25 plyne, že se protínají v přímce.

4.7. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak se protínají v přímce.*

Důkaz plyne z 2.31 a 4.6.

4.8. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.6.

4.9. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 jsou různoběžné,*
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz plyne z 2.25 a 4.8.

4.10. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ. Je to rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Jsou tedy podle 2.20 disjunktní. Jestliže rovina τ_2 prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ, pak je podle 4.8 rovnoběžná s τ a podle 2.22 totožná s τ_1.

4.11. *Jestliže přímky p_1, p_2 leží v rovině a nejsou rovnoběžné, pak mají společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímky p_1, p_2 mají společný nejvýše jeden bod. Jinak by byly podle 1.11 totožné a tedy rovnoběžné proti předpokladu. Označme τ rovinu, v níž leží přímky p_1, p_2. Podle 3.31 nejsou přímky p_1, p_2 kolmé k τ. Podle 3.35 existují roviny τ_i ($i = 1, 2$) tak, že τ_i obsahuje přímku p_i a je kolmá k rovině τ. Přímka p_i leží v rovině τ_i i v rovině τ a tyto roviny se podle 4.7 protínají v přímce. Z 1.5 plyne, že touto přímkou je přímka p_i. Kdyby roviny τ_1, τ_2 byly rovnoběžné, byly by podle 3.28 i přímky p_1, p_2 rovnoběžné, což by byl spor s předpokladem. Z 4.9 plyne, že τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Označme q jejich průsečnici. Podle 3.36 je přímka q kolmá k rovině τ, takže s ní má podle 4.3 společný bod; označme jej A. Protože $A \in q \subset \tau_i$ $(i = 1, 2)$, $A \in \tau$, leží bod A na průsečnici p_i rovin τ_i, τ. Tedy přímky p_1, p_2 mají společný aspoň jeden bod.

4.12. *Jestliže přímky p, q leží v rovině a jsou disjunktní, pak jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.11.

4.13. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p. Je to přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A leží na q a neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní. Jestliže přímka q_1 leží v rovině τ, prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p, pak je podle 4.12 rovnoběžná s p a podle 3.3 totožná s q.

4.14. *Nechť přímky p, q leží v rovině. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní rovnoběžné,*
2. *p, q jsou různoběžné,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz plyne z 1.17 a 4.12.

Резюме

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ I. НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ФИГУРЫ

БОРИС ГРУБЕР (Boris Gruber), Подебрады.

(Поступило в редакцию 3/X 1955 г.)

Работа посвящена аксиоматическому построению оснований трехмерной евклидовой геометрии. В настоящей первой части исследуются свойства инцидентности, параллельности, перпендикулярности, равно как и следствия пятого постулата Евклида о параллельных.

Основными понятиями являются: *точка*, *неориентированное направление* и *перпендикулярность*. Каждой паре различных точек A, B поставлено в соответствие одно и только одно (неориентированное) направление, обозначаемое через $\zeta(AB)$. Два направления z_1, z_2 являются, или взаимно перпендикулярными (символ $z_1 \perp z_2$), или неперпендикулярными (символ

z_1 non $\perp z_2$). Множество всех точек называем пространством и обозначаем через $\mathbf{P}$. Эти понятия удовлетворяют следующим девяти аксиомам:

I. *Существует по меньшей мере одна точка и по меньшей мере одно (неориентированное) направление.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC),\ B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Если дана точка A и направление z, то существуют точки B, C так, что $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Если $z_1 \neq z_2$, то существует в точности одно направление z, для которого $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z,\ \zeta(AC) \perp z,\ B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Если $A \neq B$ и z_1 non $\perp z_2$, то существует точка C, для которой $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

На основании первых четырех аксиом разработано главным образом понятие прямой, затем присоединением дальнейших четырех, понятие плоскости. Из девятой аксиомы следует пятый постулат Евклида о параллельных.

Прямая вводится так: *множество $M \subset \mathbf{P}$ мы называем максимальным множеством со свойством V, если*

1. *M обладает свойством V,*
2. *если $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, то M' не обладает свойством V.*

Тогда мы называем прямой такое множество $p \subset \mathbf{P}$, которое

1. *содержит хотя бы две различные точки,*
2. *является максимальным множеством, имеющим следующее свойство:*

$$A, B, C, D \in p,\quad A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,.$$

Очевидно, любым двум различным точкам прямой p отвечает одно и то же (неориентированное) направление, которое мы называем неориентированным направлением прямой p и обозначаем через $\zeta(p)$. Две прямые мы называем параллельными, если их неориентированное направление одинаково. Мы называем их взаимно перпендикулярными, если их направления перпендикулярны, и пересекающимися, если они имеют в точности одну общую точку.

Для большего удобства при работе с понятием прямой мы будем пользоваться следующей теоремой:

Пусть A — точка, z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) = z$, является прямой, содер-

жащей точку A и имеющей направление z. При помощи аксиом I—IV доказан ряд теорем о существовании и определенности прямых.

Плоскость определяется так: *множество $\tau \subset \mathbf{P}$ мы называем плоскостью, если*

1. *оно содержит хотя бы две различные точки,*

2. *существует такое направление z, что τ является максимальным множеством, имеющим следуыщее свойство:*

$$A, B \in \tau,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{*}$$

Показано, что если τ — плоскость, то существует в точности одно такое направление z, что τ является максимальным множеством со свойством (*). Это направление z мы называем неориентированным направлением, перпендикулярным к плоскости τ или, короче, направлением плоскости τ и обозначаем через $\zeta(\tau)$. Плоскости τ_1, τ_2 мы называем параллельными, соотв. перпендикулярными, если $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$ соотв. $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Мы их называем пересекающимися, если они пересекаются в прямой. Прямую p называем параллельной плоскости τ, если $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Мы называем ее перпендикулярной к плоскости τ, если $\zeta(p) = \zeta(\tau)$. Мы говорим, что прямая p и плоскость τ пересекаются, если они имеют в точности одну общую точку. Две прямые называем скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Исходной точкой рассуждений о плоскостях является теорема:

Пусть A — точка и z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) \perp z$, будет плоскостью, содержащей точку A и имеющей направление z.

Отсюда затем выводятся основные теоремы стереометрии о существовании и определенности плоскости, равно как и известные теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых.

В работе уделяется внимание вопросам о существовании для того, чтобы показать, что сформулированные теоремы непусты.

Résumé

UNE ÉTUDE DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE I. LES FIGURES NON ORIENTÉES

BORIS GRUBER, Poděbrady.

(Reçu le 3 octobre 1955.)

Le présent travail construit, par la méthode axiomatique, les fondements de la géometrie euclidienne. La première partie publiée étudie des propriétés d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité, et les conséquences du cin-

quième postulat euclidien des parallèles. Les notions fondamentales sont „point", „direction non orientée"*) et „perpendiculaire". A chaques deux points différents A, B est associée une direction, que nous désignons par $\zeta(AB)$. Deux directions z_1, z_2 sont ou perpendiculaires (signe $z_1 \perp z_2$), ou non perpendiculaires (z_1 non $\perp z_2$). L'ensemble de tous les points est appelé espace et il est désigné par $\mathbf{P}$. Ces notions accomplissent les neuf axiomes suivants:

I. *Il existe au moins un point et une direction.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC)$, $B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Soit A un point et z une direction. Il existe des points B, C tels que* $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Soit $z_1 \neq z_2$. Il n'existe qu'une direction z, pour laquelle $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z$, $\zeta(AC) \perp z$, $B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Soit $A \neq B$, z_1* non $\perp$ *z_2. Il existe un point C tel que $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp \perp z_2$.*

La notion de droite est construite avec les quatre premiers axiomes. En ajoutant les quatre axiomes suivants, la notion de plan est fondée. Le cinquième postulat euclidien des parallèles résulte du neuvième axiome.

La droite est introduite ainsi: *Un ensemble $M \subset \mathbf{P}$ est appelé ensemble maximal de la propriété V, si*

1° *M possède la propriété V,*

2° *si $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, alors M' ne possède pas la propriété V.*

Nous entendons par droite l'ensemble $p \subset \mathbf{P}$ qui

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *est l'ensemble maximal de la propriété suivante*:

$$A, B, C, D \in p,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\ .$$

A chaques deux points différents de la droite p appartient évidemment la même direction que nous appelons direction de la droite p; nous la désignons par $\zeta(p)$. Deux droites sont appelées parallèles, si elles ont la même direction. On les apelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires.

Avec la notion de „droite" on manipule avec facilité en appliquant le théorème suivant:

Soit A un point, z une direction; la droite de la direction z qui passe par le point A est ainsi l'ensemble de tous les points X pour lesquels on a ou bien $X = A$, ou bien

*) Ci-après „direction" seulement.

$\zeta(AX) = z$. A l'aide des axiomes I—IV on démontre quelques théorèmes d'existence et d'unicité des droites.

Le plan est défini ainsi: *L'ensemble $\tau \subset$ **P** sera appelé „plan", s'il*

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *il existe une direction z, telle que τ est l'ensemble maximal de la propriété suivante:*

$$A, B \in \tau, \quad A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{*}$$

De cette définition découle: si τ est un plan, il n'existe qu'une direction z telle que τ est l'ensemble maximal de la propriété (*). Cette direction z est appelée direction perpendiculaire au plan τ ou en peu de mots direction du plan τ. Nous la désignons par $\zeta(\tau)$. On appelle deux plans parallèles, s'ils possèdent la même direction. On les appelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires. Une droite p est dite parallèle au plan τ, si $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. On l'appelle perpendiculaire au plan τ, si $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.

Pour ce qui concerne le plan, on applique le théorème suivant:

Soit A un point, z une direction; l'ensemble de tous les points X pour lesquels on a ou $X = A$, ou $\zeta(AX) = z$, est le plan qui contient le point A, et qui possède la direction z.

De là on déduit des théorèmes stéréométriques d'existence et d'unicité d'un plan ainsi que des théorèmes bien connus sur le parallélisme et la perpendicularité des plans et des droites.

Dans ce travail on concentre l'attention sur les questions d'existence.