Jiří Sedláček

O jednom extrémním rovinném grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 426--430

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117227`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O JEDNOM EXTRÉMNÍM ROVINNÉM GRAFU

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo 24. listopadu 1955.) DT:513.34.001

Tento příspěvek z theorie grafů navazuje na práci A. Errery, zobecňující problém tří studní.

Je známa tato **úloha**: Jsou tři domy a tři studně; nelze vést nepřetínající se cesty tak, aby každý dům byl spojen s každou studní (viz [2], str. 32).

Úlohu zobecnil A. ERRERA [1], když dokázal **větu**: Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_{a_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{a_2}$ body roviny, pak z a_1a_2 oblouků $\overline{x_iy_j}$ lze sestrojit nejvýše $2a_1 + 2a_2 - 4$ oblouků, aniž by vznikl průsečík oblouků $(2 \leqq a_1 \leqq a_2)$. Nejmenší počet průsečníků, které vzniknou, vedeme-li zde všech a_1a_2 oblouků a žádáme-li, aby žádné tři z nich neměly společný vnitřní bod, určil K. Zarankiewicz[1]).

V tomto článku se m. j. určuje maximální počet oblouků, které spojují body x_i, y_j, z_l $(1 \leqq i \leqq a_1,\ 1 \leqq j \leqq a_2,\ 1 \leqq l \leqq a_3,\ 2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3)$, při čemž se připouštějí jen oblouky $\overline{x_iy_j}$; $\overline{x_iz_l}$; $\overline{y_jz_l}$.

Budiž dáno k přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$; ať $2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Je-li v rovině E_2 zvoleno n různých bodů, sestrojme rozklad této množiny na k podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_k$, kde a_i je počet prvků v A_i. Dále sestrojme rovinný graf, který má tyto vlastnosti:

1. Množinu jeho uzlů tvoří zvolených n bodů.
2. Je-li $\overline{xy}$ jeho hrana, ať pro žádné i není současně $x \in A_i$, $y \in A_i$.
3. Graf je souvislý, nemá koncové hrany ani most.[2])

Takový graf nazveme *mapou*. Budiž $\mathfrak{M}$ množina map (příslušná k číslům $a_1, a_2, \ldots, a_k$). Je zřejmě $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Pomocí mapy lze definovat rozklad roviny E_2 na oblasti homeomorfní s kruhem. Je-li Ω jedna oblast v E_2, označme $E_2 \dot{-} \Omega$ její komplement. Budiž $\chi(M)$ počet hran mapy $M \in \mathfrak{M}$. Mapu o minimálním

[1]) Fundamenta Math., *41*, 137—145, 1954.

[2]) Tak nazýváme hranu, po jejímž vynechání se poruší souvislost (viz [3], str. 179).

(resp. maximálním) počtu hran nazýváme *minimální* (resp. *maximální*) a označujeme $M_{\min}$ (resp. $M_{\max}$). Podle Eulerovy věty je počet oblastí, na něž se pomocí M rozpadne E_2, roven $\chi(M) - n + 2 = s$. Oblast, jejíž hranice je tvořena r hranami, se nazývá *r-úhelník*. Platí

Věta 1. $\chi(M_{\min}) = \max\,(2a_k; n)$.

Důkaz. Protože z každého uzlu mapy $M \in \mathfrak{M}$ vycházejí aspoň dvě hrany, platí $2\chi(M) \geqq \sum_{i=1}^{k} 2a_i$ čili $\chi(M) \geqq n$.

I. Budiž $a_k \leqq \sum_{i=1}^{k-1} a_i$. Dokážeme, že $\chi(M_{\min}) = n$. Sestrojme v rovině n-úhelník. Lze pevně označit a_k jeho vrcholů za prvky z A_k tak, že uvnitř každé hrany vzniklého a_k-úhelníka leží aspoň jeden vrchol původního n-úhelníka. Označme libovolně těchto $n - a_k$ vrcholů jako prvky z $\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ ale tak, aby a_i jich bylo v množině A_i $(1 \leqq i \leqq k - 1)$. Řekneme nyní, že dva sousední vrcholy n-úhelníka tvoří *kontakt*, patří-li téže množině A_j. Existuje jistě situace s minimálním počtem kontaktů. Tento počet je pak nula; kdyby totiž při tomto minimu existoval kontakt, který tvoří dva sousední vrcholy x_1, x_2 ležící v A_j, proveďme tuto úvahu:

Existuje hrana n-úhelníka, jejíž žádný koncový vrchol neleží v A_j. V opačném případě by totiž bylo $2a_j \geqq n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ čili buď $a_j > a_k$ (spor s předpokladem $a_j \leqq a_k$) nebo $k = 2$, $j = 1$, $a_1 = a_2$ (spor s existencí kontaktu). Zmíněnou hranu označíme h. Zrušme nyní vrchol $x_1 \in A_j$, rozpulme hranu h a nový vrchol označme jako prvek z A_j. Počet kontaktů se tím zmenší o jeden, což je spor s minimalitou.

II. Budiž $a_k \geqq \sum_{i=1}^{k-1} a_i$. Pak pro $M \in \mathfrak{M}$ je $\chi(M) \geqq 2a_k$, neboť z každého vrcholu ležícího v A_k vycházejí aspoň dvě různé hrany. Indukcí podle a_k čtenář dokáže, že $\chi(M_{\min}) = 2a_k$ (indukce začíná u $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i$).

Věta 2. *Oblasti, příslušné k maximální mapě, jsou trojúhelníky nebo čtyřúhelníky.*

Důkaz. Kdyby existovala oblast Ω o delší hranici, můžeme označit pět po řadě sousedních vrcholů hranice x, y, z, u, v. Ať $z \in A_{i_1}$. Pak pro y, u platí buď I. $y \in A_{i_2}$, $u \in A_{i_2}$ nebo II. $y \in A_{i_2}$, $u \in A_{i_3}$ $(i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1)$.

I. V prvním případě není $v \in A_{i_2}$. Existuje tedy v $E_2 \dot{-} \Omega$ hrana $\overline{yv}$. Dále vidíme, že není $x \in A_{i_2}$. Podle Jordanovy věty neexistuje v $E_2 \dot{-} \Omega$ hrana $\overline{xu}$, tedy existuje v Ω (spor).

II. V druhém případě existuje v $E_2 \dot{-} \Omega$ hrana $\overline{yu}$. Dále je buď 1. $v \in A_{i_4}$ $(i_1 \neq i_4)$ nebo 2. $v \in A_{i_1}$.

1. Je-li $v \in A_{i_4}$, existuje v Ω hrana $\overline{zv}$ (spor).

2. Je-li $v \in A_{i_1}$, existuje v $E_2 \dot{-} \Omega$ hrana $\overline{yv}$, proto tam nemůže existovat hrana $\overline{xz}$ ani $\overline{xu}$, tedy aspoň jedna z nich je v Ω — podle toho, kam patří x (spor).

Poznámka. Pro $k = 2$ plyne odtud, že všechny oblasti jsou čtyrúhelníky.

Věta 3. *Je-li $k = 2$, má minimální (resp. maximální) mapa $2a_2$ (resp. $2a_1 + + 2a_2 - 4$) hran. Je-li $-a_1 + a_2 + 2 < s < a_1 + a_2 - 2$, existuje mapa $M \in \mathfrak{M}$ o s oblastech.*

Důkaz. Tvrzení o minimální mapě plyne z věty 1. Errera [1] dokázal, že maximální mapa má $2a_1 + 2a_2 - 4$ hran. Podle Eulerovy věty má minimální (resp. maximální) mapa $-a_1 + a_2 + 2$ (resp. $a_1 + a_2 - 2$) oblastí. Budiž $-a_1 + a_2 + 2 < s < a_1 + a_2 - 2$ a předpokládejme, že existuje mapa $M' \in \mathfrak{M}$, která má $s - 1$ oblastí. Tyto oblasti jsou r-úhelníky se sudým r. Nejsou to však vesměs čtyrúhelníky, neboť pak by $4(s - 1) = 2\chi(M')$ čili podle Eulerovy věty

$$2(s - 1) = \chi(M') = (a_1 + a_2) + (s - 1) - 2\,,$$

čili $s = a_1 + a_2 - 1$ (spor). Existuje tam tedy oblast Ω, která má aspoň šestiúhelníkovou hranici. Označme $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ po řadě sousední vrcholy na této hranici ($x_i \in A_1, y_j \in A_2$). Když v $E_2 \dot{-} \Omega$ neexistuje hrana $\overline{x_1y_2}$, sestrojíme mapu M o s oblastech tím, že v Ω vedeme hranu $\overline{x_1y_2}$. Když tato spojnice existuje v $E_2 \dot{-} \Omega$, neexistuje podle Jordanovy věty v $E_2 \dot{-} \Omega$ hrana $\overline{y_1x_3}$ a tedy ji sestrojíme v Ω. Důkaz je podán.

Věta 4. *Je-li $k = 3$, pak*

$$\chi(M_{\max}) = \min\,(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6;\ 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8).$$

Důkaz. Pro $M \in \mathfrak{M}$ platí $3s \leqq 2\chi(M)$ a podle Eulerovy věty

$$3(\chi(M) + 2 - a_1 - a_2 - a_3) \leqq 2\chi(M) \text{ čili } \chi(M) \leqq 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6\,.$$

I. Je-li $a_2 \leqq a_3 \leqq a_1 + a_2 - 2$, je tím spíše $-a_1 + a_2 + 2 \leqq a_3 \leqq a_1 + + a_2 - 2$ a můžeme sestrojit pomocnou mapu $M(a_3)$ definovanou pomocí čísel a_1, a_2 a mající a_3 oblastí (věta 3). Do každé ze vzniklých oblastí umístíme jeden vrchol z množiny A_3 a spojíme jej hranami se všemi vrcholy oblasti. Vzniklá mapa $M_1(a_3) \in \mathfrak{M}$ má všechny oblasti trojúhelníkové, tedy má $3a_1 + + 3a_2 + 3a_3 - 6$ hran a je proto maximální.

II. Je-li $a_3 > a_1 + a_2 - 2$, dokážeme, že $\chi(M_{\max}) = 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8$. Mapa $M_1(a_1 + a_2 - 2)$ sestrojená podle bodu I má $6(a_1 + a_2 - 2)$ hran. Je možné do jedné její (trojúhelníkové) oblasti umístit $a_3 - a_1 - a_2 + 2$ bodů (prvků z A_3) a spojit je každý se dvěma vrcholy této oblasti. Vznikne mapa $M_2 \in \mathfrak{M}$, která má počet hran daný číslem $6(a_1 + a_2 - 2) + 2(a_3 - a_1 - a_2 + + 2)$. Je tedy

$$\chi(M_{\max}) \geqq 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8\,. \tag{1}$$

Podle věty 2 je $M_{\max}$ prvkem množiny $\overline{\mathfrak{M}}$ map, jejíž oblasti jsou buď trojúhelníky nebo čtyrúhelníky. Pro $M \in \overline{\mathfrak{M}}$ označme $s_3(M)$ (resp. $s_4(M)$) počet trojúhelníkových (resp. čtyrúhelníkových) oblastí mapy M. Platí $3s_3(M) + 4s_4(M) = 2\chi(M)$ čili $3s + s_4(M) = 2\chi(M)$, tedy podle Eulerovy věty $\chi(M) = 3(a_1 + a_2 + a_3) - 6 - s_4(M)$. Podle (1) je $3(a_1 + a_2 + a_3) - 6 - s_4(M_{\max}) \geqq 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8$, čili

$$s_4(M_{\max}) \leqq a_3 - a_1 - a_2 + 2\,. \tag{2}$$

V mapě $M_{\max}$ zrušme vrcholy ležící v A_3 a hrany z nich vycházející. Vznikne graf G, který podle věty 3 má nejvýše $2a_1 + 2a_2 - 4$ hran. (Odhad je správný i tehdy, není-li G mapa.) Protože každý trojúhelník mapy $M_{\max}$ obsahuje právě jednu hranu z G a každá hrana z G je nejvýše ve dvou trojúhelnících, je $s_3(M_{\max}) \leqq 2(2a_1 + 2a_2 - 4)$, čili $s \leqq 2(2a_1 + 2a_2 - 4) + s_4(M_{\max})$; podle (2) je $s \leqq 3a_1 + 3a_2 + a_3 - 6$ a podle Eulerovy věty $\chi(M_{\max}) \leqq 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8$. Vzhledem k (1) je důkaz hotov.

LITERATURA

[1] *A. Errera*: Un théorème sur les liaisons, Comptes Rendus, Paris, *177*, r. 1923, str. 489—491.

[2] *Dynkin-Uspenskij*: Matematické besedy, Praha 1955, St. nakl. techn. lit.

[3] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

Резюме

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ПЛОСКОМ ГРАФЕ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага.

(Поступило в редакцию 24/XI 1955 г.)

Пусть дано k натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \geqq 2$); пусть $2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Картой, соответствующей числам a_i, мы назовем каждый связный плоский граф без концевых ребер и без мостов, состоящий из n узлов, подразделенных на k групп $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с $a_1, a_2, \ldots, a_k$ элементами и не содержащий ни одного ребра $\overline{xy}$ для $x \in A_i$, $y \in A_i$ ($1 \leqq i \leqq k$). Такую карту с минимальным (соотв. максимальным) числом ребер мы обозначаем через $M_{\min}$ (соотв. $M_{\max}$). Число ребер карты M обозначим через $\chi(M)$.

А. Эррера [1] доказал, что для $k = 2$ будет $\chi(M_{\max}) = 2a_1 + 2a_2 - 4$. В настоящей работе мы доказываем **теоремы:**

1. $\chi(M_{\min}) = \max(2a_k; n)$.

2. $M_{\max}$ *разделяет плоскость на треугольные или четырехугольные области.*

3. *Для* $k = 3$ *будет*

$$\chi(M_{\max}) = \min(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6; 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8) .$$

Zusammenfassung

ÜBER EINEN EXTREMEN EBENEN GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Eingelangt am 24. November 1955.)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gegebene natürliche Zahlen ($k \geqq 2$), wobei $2 \leqq a_1 \leqq \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Als eine (zu den Zahlen a_i gehörige) Karte bezeichnen wir jeden zusammenhängenden ebenen Graphen mit n Knotenpunkten ohne Endkanten und ohne Brücken, dessen Knotenpunkte in k Klassen A_1, $A_2, \ldots, A_k$ mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ Elementen eingeteilt sind, wobei keine Kante $\overline{xy}$ für $x \in A_i$, $y \in A_i$ ($1 \leqq i \leqq k$) existiert. Als Minimalkarte $M_{\min}$ (resp. Maximalkarte $M_{\max}$) bezeichnen wir so eine Karte, die eine minimale (resp. maximale) Anzahl von Kanten besitzt. Es sei $\chi(M)$ die Anzahl von Kanten für die Karte M.

A. Errera [1] hat bewiesen, dass $\chi(M_{\max}) = 2a_1 + 2a_2 - 4$ für $k = 2$ ist. Die vorliegende Arbeit enthält folgende Sätze:

1. $\chi(M_{\min}) = \max(2a_k; n)$.

2. *Die der Karte* $M_{\max}$ *entsprechenden Elementarflächen in der Ebene sind Dreiecke oder Vierecke.*

3. *Für* $k = 3$ *gilt*

$$\chi(M_{\max}) = \min(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6; 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8).$$