Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Poznámky k Listingovej vete o rozklade grafu na otvorené ťahy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 396--404

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117223`

POZNÁMKY K LISTINGOVEJ VETE O ROZKLADE GRAFU NA OTVORENÉ ŤAHY

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Došlo dne 25. dubna 1955.) DT:513.34.001

V článku sa dokazujú vety pre pravidelné grafy nepárneho stupňa, nadväzujúce na Listingovu vetu o rozklade grafu na otvorené ťahy.

1. Základné pojmy a definície

O pojmoch graf, konečný graf, pravidelný graf n-tého stupňa, čiastočný graf grafu, faktor grafu, komponenta grafu, predpokladám, že sú známe; ich definície najde čitateľ napr. aj v mojej práci: *O istých rozkladoch grafu*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 1955, čís. 3. Niektoré ďalšie definície pripomeniem, iné zavediem.

Postupnosť prvkov ľubovoľného konečného grafu G

$$T = u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, h_{n-1,n}, u_n$$

nazývame *ťahom* v grafe G, ak platí: a) $n \geqq 2$; b) u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú uzly a $h_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ sú hrany grafu G; c) hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná s uzlami u_i, u_{i+1} a je $u_i \neq u_{i+1}$; d) ľubovoľná hrana grafu G sa vyskytuje v postupnosti T najviac raz.

Hovoríme, že ťah T je *otvorený*, resp. že je *uzavretý* podľa toho, či je $u_1 \neq u_n$, alebo je $u_1 = u_n$. Otvorený ťah, v ktorom aj každý uzol grafu G sa vyskytuje najviac raz, sa nazýva *cestou spojujúcou uzly* u_1, u_n. Uzavretému ťahu T, v ktorom $u_1 = u_n$, ale pre všetky ostatné dvojice uzlov u_i, u_j platí $u_i \neq u_j$, ak je $i \neq j$, hovoríme *kružnica*.

Pri niektorých úvahách je dôležité rozlišovať uzly, s ktorými je hrana vyskytujúca sa v postupnosti T incidentná tak, že uzol, ktorého označenie má nižší (resp. vyšší) index, považujeme za *počiatočný* (resp. *konečný*) uzol hrany v ťahu. Postupnosti prvkov

$$u_1, h_{1,2}, u_2, \ldots, h_{n-1,n}, u_n \,,$$
$$u_n, h_{n-1,n}, u_{n-1}, \ldots, h_{1,2}, u_1$$

popisujú potom síce ten istý (neorientovaný) ťah, ale ***s rôznym smyslom postupu*** (v ťahoch otvorených) resp. ***s rôznym smyslom obiehania*** (v ťahoch uzavretých).

2. Listingova veta o pravidelných grafoch nepárneho stupňa

Je známa táto veta vyslovená Listingom a dokázaná po prvý raz Lucasom (LISTING, Vorstudien zur Topologie, Göttinger Studien, 1847, str. 60; LUCAS, Recreations Mathématiques I, str. 239): *Ak konečný súvislý graf G má práve $2n$ (> 0) uzlov nepárneho stupňa, vtedy existuje taký systém otvorených ťahov $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, že každá hrana grafu G je hranou práve jedného ťahu. Systém s takýmito vlastnosťami obsahuje najmenej n ťahov.*

Poukážeme v ďalšom na isté možnosti sprísnenia požiadaviek na rozklad grafu na otvorené ťahy pre tie pravidelné grafy nepárneho stupňa, ktoré majú lineárny faktor.

Veta 1. *Nech G je konečný pravidelný graf $(2x + 1)$-ého stupňa ($x > 0$) o $2n$ uzloch, ktorý má aspoň jeden lineárny faktor L; potom existuje systém otvorených ťahov $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, ktorý má tieto vlastnosti:*

α) *Každá hrana grafu G je hranou práve jednoho ťahu systému.*

β) *Každý ťah obsahuje rovnaký počet $(2x + 1)$ hrán.*

γ) *Každý ťah obsahuje práve jednu hranu ϵL a táto hrana svojím poradím je prostrednou hranou ťahu.*

Dôkaz. Ak zrušíme v grafe G všetky hrany lineárneho faktora L, vznikne z grafu G istý pravidelný graf G_1 $2x$-tého stupňa. Je známa veta (pozri KÖNIG. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936, str. 204), *Každý pravidelný graf párneho stupňa možno rozložiť na faktory druhého stupňa*:

Nech tedy $G_1 = F_1 F_2 \ldots F_x$ je rozklad grafu G_1 na x faktorov druhého stupňa. Každý z faktorov F_i ($i = 1, 2, \ldots, x$) pozostáva z kružníc (pretože graf G_1 je konečný, pozri König str. 18, veta 28). Označme znakom M_i množinu kružníc faktora F_i. Zvolme pevne pre každú kružnicu $K \epsilon M_i$ smysel obiehania v tejto kružnici a priraďme každému uzlu u kružnice K tú hranu, ktorej konečným uzlom (resp. ktorej počiatočným uzlom) pri zvolenom smysle obiehania je uzol u. Je zrejmé, že každým z uvedených dvoch spôsobov priradenia hrán k uzlom je každému uzlu kružnice K priradená práve jedna hrana a dvom rôznym uzlom v tom istom priradení sú priradené rôzne hrany. Ak týmto spôsobom prevedieme priradenie hrán k jednotlivým uzlom vo všetkých kružniciach faktora F_i, dostaneme tak isté zobrazenie φ_i (resp. ψ_i) množiny všetkých uzlov grafu G na množinu hrán faktora F_i ($i = 1, 2, \ldots, x$).

V zobrazeniach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_x$ (resp. $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_x$) máme zaručené, že množiny obrazov v dvoch rôznych zobrazeniach $\varphi_i \neq \varphi_j$ (resp. $\psi_i \neq \psi_j$) sú disjunktné a že súčet množín obrazov $\sum_{i=1}^{x}\varphi_i(U)$, resp. $\sum_{i=1}^{x}\psi_i(U)$, kde U je množina všetkých uzlov grafu G, je množinou všetkých hrán grafu G_1.

Lineárny faktor L (vzhľadom na to, že G má $2n$ uzlov) má n hrán. Označme tieto hrany znakmi $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Sostrojme z prvkov grafu G postupnosť:

$$v_x, f_{x,x-1}, v_{x-1}, f_{x-1,x-2}, \ldots, f_{1,0}, v_0, h_s, w_0, g_{0,1}, w_1, g_{1,2}, \ldots, g_{x-1,x}, w_x \qquad (*)$$

takto: Nech h_s je ľubovoľná pevne zvolená hrana lineárneho faktora L; v_0, w_t uzly, s ktorými je hrana h_s incidentná. Ustálme hrany $f_{i,i-1}$, $g_{i-1,i}$ a uzly v_i, w_0 v postupnosti (*) postupne pre $i = 1, 2, \ldots, x$ podľa ustálených už uzlov v_{i-1}, w_{i-1} tak, aby platilo:

$$f_{i,i-1} = \varphi_i(v_{i-1})\,, \qquad v_i = \psi_i^{-1}(f_{i,i-1})\,, \qquad g_{i-1,i} = \varphi_i(w_{i-1})\,, \qquad w_i = \psi_i^{-1}(g_{i-1,i})\,,$$

to jest $f_{i,i-1}$ (resp. $g_{i-1,i}$) nech je hrana, ktorá je obrazom uzla v_{i-1} (resp. uzla w_{i-1}) v zobrazení φ_i a v_i (resp. w_i) nech je uzol, ktorý je vzorom hrany $f_{i,i-1}$ (resp. hrany $g_{i-1,i}$) v zobrazení ψ_i.

Postupnosť (*) je ťah o $2x + 1$ hranách, pričom h_s je hrana lineárneho faktora a hrany $f_{i,i-1}$, $g_{i-1,i}$ sú hranami kvadratického faktora F_i, lebo (*) má zrejme vlastnosti a), b), c), a že má tiež vlastnosť d) požadovanú od ťahu, je zrejmé z tejto úvahy: Uzly v_0, w_0 sú dva rôzne uzly a preto aj hrany faktora F_1, ktoré sú obrazmi uzlov v_0, w_0 v zobrazení φ_1, t. j. hrany $f_{1,0}$; $g_{0,1}$ sú rôzne. Vzory týchto hrán v zobrazení ψ_1, t. j. uzly v_1, w_1 sú potom opäť dva rôzne uzly. Opakovaním tejto úvahy postupne pre $i = 1, 2, \ldots, x$ zistíme, že o dvoch hranách postupnosti z toho istého faktora F_i platí $f_{i,i-1} \neq g_{i-1,i}$, z čoho pre uzly v_i, w_i vyplýva $v_i \neq w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, x)$, čiže hrana grafu G sa v postupnosti (*) vyskytuje najviac raz, pričom práve jedna hrana lineárneho faktora je hranou postupnosti (*) a to svojím poradím prostrednou hranou postupnosti. Pretože $v_x \neq w_x$, je (*) ťah otvorený.

Hrana h_s však bola ľubovoľná, pevne zvolená hrana lineárneho faktora. Teda ku každej hrane lineárneho faktora L možno popísaným postupom podľa zobrazení φ_i, ψ_i jednoznačne skonštruovať otvorený ťah o $2x + 1$ hranách. Označme znakom T_s ťah konštruovaný pre hranu $h_s \in L$.

I. Tvrdím: *Ľubovoľná hrana grafu G sa vyskytuje najviac v jednom ťahu T_s.*

Predpokladajme naopak, že existuje hrana h_0, ktorá sa vyskytuje aspoň v dvoch ťahoch T_a, T_b $(a \neq b;\ a, b \in \{1, 2, \ldots, n\})$. Hrana h_0 nemôže byť hranou lineárneho faktora L, lebo T_a, T_b sú skonštruované tak, že obsahujú po jednej hrane lineárneho faktora. Nech teda h_0 je hranou kvadratického faktora F_i $(i = 1, 2, \ldots, x)$.

Označme znakom u_{i-1} (resp. u_i) uzol incidentný s hranou h_0, ktorý je vzorom hrany h_0 v zobrazení φ_i (resp. ψ_i).

A) Nech $i = 1$. Z konštrukcie ťahov T_a, T_b je zrejmé, že uzol $u_{i-1} = u_0$ je incidentný s hranou $h_a \in T_a$ aj s hranou $h_b \in T_b$, ktoré sú hranami lineárneho faktora L. Pretože s ľubovoľným uzlom je incidentná práve jedna hrana lineárneho faktora, je nutne $h_a = h_b$, čo je spor.

B) Nech $i > 1$. Z konštrukcie ťahov T_a, T_b je zrejmé, že uzol u_{i-1} je vzorom istej hrany $h(1)$ z faktora F_{i-1} v zobrazení ψ_{i-1}, ktorá je nutne hranou oboch uvedených ťahov. Tedy z existencie hrany, ktorá je spoločná obom ťahom a je hranou faktora F_i, vyplýva existencia hrany faktora F_{i-1}, ktorá je taktiež spoločná obom ťahom. Ak opakujeme túto úvahu $(i - 1)$-krát, zisťujeme, že v grafe G musí existovať hrana $h(i - 1)$ kvadratického faktora F_1, ktorá je spoločná ťahom T_a, T_b. To však, ako sme ukázali v A), nie je možné. Dva rôzne ťahy T_a, T_b nemôžu mať preto spoločnú hranu.

II. Tvrdím: *Každá hrana sa vyskytuje aspoň v jednom ťahu z ťahov* T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Každý z n ťahov T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ obsahuje práve $2x + 1$ hrán. Pretože žiadna z hrán nevyskytuje sa vo viac ako v jednom ťahu, obsahujú všetky ťahy T_i spolu $(2x + 1)\, n$ hrán. Pravidelný graf $(2x + 1)$-ého stupňa o $2n$ uzloch obsahuje však práve $(2x + 1)\, n$ hrán. Preto v ťahoch T_i musí sa vyskytovať každá hrana a podľa I každá práve raz.

Systém otvorených ťahov $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, ktorý sme skonštruovali, má teda vlastnosti α), β), γ), čo bolo treba dokázať.

Poznámka 1. Je zrejmé, že graf môže obsahovať lineárny faktor len vtedy, ak počet jeho uzlov je párny. Táto podmienka je v pravidelných grafoch nepárneho stupňa vždy splnená. Je známe, že v grafe môže existovať viac ako jeden lineárny faktor, na druhej strane existujú pravidelné grafy nepárneho stupňa, ktoré nemajú lineárneho faktora.

Poznámka 2. Z dôkazu vety 1 je zrejmé, že pre každý lineárny faktor L a pre každý rozklad grafu G_1 na kvadratické faktory existuje najmenej $x!$ systémov ťahov požadovaných vlastností, pretože existuje $x!$ rôznych označení kvadratických faktorov, od čoho zrejme je závislý vyššie uvedeným spôsobom konštruovaný systém. Počet rôznych systémov (pri danom L a danom rozklade grafu G_1 na kvadratické faktory) je však z pravidla vyšší než $x!$, pretože okrem voľby poradia jednotlivých kvadratických faktorov má vplyv na konštrukciu systému aj voľba smeru obiehania v jednotlivých kružniciach toho ktorého kvadratického faktora. Problém stanovenia počtu rôznych lineárnych faktorov v grafe G a tiež stanovenia počtu rôznych rozkladov grafu G_1 na kvadratické faktory je veľmi složitý a nie je uspokojivo riešený. Stanovenie počtu rôznych systémov otvorených ťahov požadovaných vlastností by si však vyžadovalo okrem uvedeného ešte aj znalosť počtu kružníc v jednotlivých faktoroch toho ktorého rozkladu grafu G_1 a nemáme pritom zaručené, že popísaná konštrukcia vyčerpáva všetky možnosti. Pri dôkaze vety 1 sme si však vytýčili o mnoho skromnejší cieľ: dokázať, že za podmienok vo vete uvedených existuje aspoň jeden hľadaný systém.

Veta 1 nám hovorí, že z existencie lineárneho faktora v konečnom súvislom pravidelnom grafe nepárneho stupňa vyplýva existencia systému otvorených ťahov s vlastnosťami α), β), γ). Natíska sa prirodzene otázka, či z existencie systému otvorených ťahov T, ktorý má vlastnosti α), β), v pravidelnom konečnom súvislom grafe G, nevyplýva existencia aspoň jedného lineárneho faktora. Že v prípade $2x + 1 = 3$ je tomu tak, hovorí táto veta:

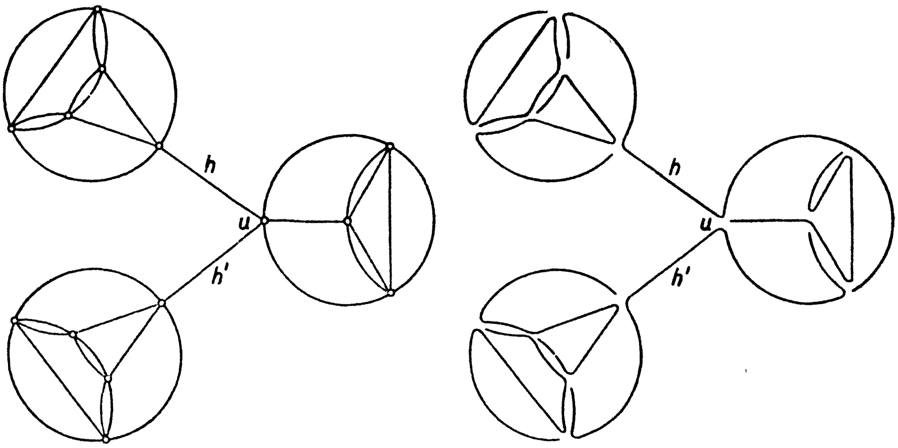
Veta 2. *Nech G je konečný pravidelný graf tretieho stupňa o $2n$ uzloch a nech existuje systém otvorených ťahov $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ v grafe G, ktorý má tieto vlastnosti:* α) *každá hrana grafu G je hranou práve jedného ťahu systému,* β) *každý ťah obsahuje práve tri hrany, potom v grafe G existuje aspoň jeden lineárny faktor L.*

Dôkaz. Čiastočný graf grafu G pozostávajúci z hrán a uzlov ťahu T_i označme znakom G_i. Graf G_i má práve tri hrany, ktoré netvoria kružnicu o troch hranách, lebo ináč by ťah T_i nebol otvorený. Teda G_i buď neobsahuje žiadnu kružnicu (prvý prípad), alebo obsahuje kružnicu o dvoch hranách (druhý prípad). V prvom prípade jedna z hrán grafu G_i je incidentná s dvoma uzlami druhého stupňa v G_i (označme túto hranu znakom h_i) a zbývajúce dve hrany sú incidentné s jedným uzlom prvého a s jedným uzlom druhého stupňa v G_i. Ak G_i obsahuje kružnicu o dvoch hranách (druhý prípad), vyberme pevne ľubovoľnú z nich a označme ju znakom h_i. Hrana h_i je incidentná v tomto prípade s jedným uzlom tretieho a s jedným uzlom druhého stupňa v G_i.

Tvrdím: *Množina hrán $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ je množina hrán istého lineárneho faktora L grafu G.*

Dôkaz tvrdenia. Je treba dokázať, že každý uzol grafu je incidentný práve s jednou z hrán množiny H. Dokážeme najprv, že žiadný uzol grafu G nie je incidentný s viac ako s jednou hranou množiny H, t. j., že žiadne dve hrany z H nie sú incidentné s tým istým uzlom. Predpokladajme naopak, že existujú hrany $h_i \neq h_j$ v H, ktoré sú incidentné s uzlom u. Uzol u je incidentný podľa predpokladu najmenej s dvoma hranami grafu G_i a najmenej s dvoma hranami grafu G_j a pretože G_i a G_j nemajú spoločných hrán, znamená to, že uzol u je incidentný najmenej so štyrmi hranami grafu G. To je však spor, lebo G je podľa predpokladu pravidelný graf tretieho stupňa. Teda žiadne dve hrany z H nie sú incidentné s tým istým uzlom v G. Dokážeme teraz, že každý uzol v G je incidentný s jednou hranou množiny H. Každá z n hrán množiny H je incidentná práve s dvoma uzlami a teda hrany množiny H sú incidentné spolu s $2n$ uzlami, lebo žiadne dve hrany $\in H$ nie sú incidentné s tým istým uzlom. Množina uzlov incidentných s hranami množiny H má práve $2n$ uzlov grafu G. Graf G má však podľa predpokladu práve $2n$ uzlov, teda každý uzol z G je incidentný práve s jednou hranou z H. Preto H je množina hrán lineárneho faktora grafu G.

Veta obdobná vete 2 pre $x > 1$ však neplatí. Existujú totiž také konečné pravidelné grafy $(2x + 1)$-ého stupňa, v ktorých existuje systém otvorených ťahov s vlastnosťami α), β), ktoré nemajú lineárny faktor. Uveďme aspoň jeden príklad pre $x = 2$. Graf znázornený na obrázku je konečný, pravidelný súvislý



Obr. 1.

graf piateho stupňa a dá sa rozložiť na systém otvorených ťahov s vlastnosťami α), β), ale má také dve hrany (h, h'), ktoré nie sú hranami žiadnej kružnice a sú incidentné s tým istým uzlom u grafu, t. j. má dva mosty incidentné s uzlom u, preto (pozri König, str. 195) nemá lineárneho faktora.

3. Nutná podmienka pre existenciu systému otvorených ťahov s rovnakým počtom hrán

Odvoďme si ešte jednu podmienku (nutnú) pre existenciu systému T o vlastnostiach α), β) v konečnom pravidelnom grafe $(2x + 1)$-ého stupňa.

Veta 3. *Konečný pravidelný graf G $(2x + 1)$-ého stupňa možno rozložiť v systém T otvorených ťahov o vlastnostiach α), β) len vtedy, ak v G niet takého uzla, ktorý je incidentný s viac ako x mostami.*

Poznámka 3. Pod *mostom* rozumie sa taká hrana grafu, ktorá nie je hranou žiadnej kružnice grafu. Je známe, že ak v grafe G, ktorý má most, zrušíme tento most, vznikne taký graf G', v ktorom komponenta z G, v ktorej sa zrušil most, rozpadá sa na dve komponenty v G'. Tieto komponenty nazývajú sa *brehy mostu*. Je tiež známe, že každý breh mostu má práve jeden uzol incidentný s mostom (König, str. 179).

Prv než prikročíme k dôkazu vety 3. dokážeme si ešte túto pomocnú vetu:

Veta 4. *Nech G je konečný pravidelný graf $(2x + 1)$-ého stupňa o $2n$ uzloch; $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ systém otvorených ťahov o vlastnostiach α), β) a h istý most grafu G. Nech T_i je ten ťah systému T, ktorý obsahuje hranu h, vtedy platí: Každý breh mostu h obsahuje práve x hrán z ťahu T_i.*

Dôkaz. Označme znakom B_1, B_2 brehy mosta h, znakom G' graf, ktorý vznikne z G zrušením mosta h. Pretože hrana h je incidentná s dvoma uzlami, budú v grafe G' všetky uzly okrem uvedených uzlov opäť stupňa $2x + 1$, uzly incidentné v G s hranou h budú mať v G' stupeň $2x$. Označme znakom m_1 (resp. m_2) počet uzlov brehu B_1 (resp. B_2).

Je známe, že dvojnásobok počtu hrán komponenty dostaneme tak, keď sčítame stupeň všetkých uzlov komponenty. Teda o počte g_1 (resp. g_2) hrán brehu B_1 (resp. brehu B_2) platí:

$$2g_1 = (2x + 1)(m_1 - 1) + 2x\,, \tag{1}$$

$$2g_2 = (2x + 1)(m_2 - 1) + 2x\,. \tag{2}$$

Z rovníc (1), (2) je zrejmé, že platí $m_1 \equiv 1 \pmod 2$; $m_2 \equiv 1 \pmod 2$ čiže $m_1 = 2n_1 + 1$; $m_2 = 2n_2 + 1$, kde n_1, n_2 sú čísla celé. Rovnice (1), (2) možno preto upraviť na tvar:

$$g_1 = n_1(2x + 1) + x\,, \tag{3}$$

$$g_2 = n_2(2x + 1) + x\,. \tag{4}$$

Pretože čiastočné grafy B_1, B_2 grafu G nemajú spoločných hrán ani spoločných uzlov a súvisia len cez hranu h, existuje najviac jeden ťah T taký, ktorý obsahuje hrany aj z B_1 aj z B_2. Tedy s výnimkou najviac jednoho ťahu systému všetky hrany ťahu patria buď do B_1, alebo do B_2, alebo (ak G má viac komponent) ani do B_1 ani do B_2. Z toho vyplýva, že hrany v B_1 (resp. v B_2) patria k n_1 (resp. k n_2) rôznym ťahom $\in T$. Zbývajúcich x hrán v B_1 a x hrán z B_2 nutne spolu s hranou h tvoria istý ťah $\in T$. Každý breh mosta h obsahuje preto práve x hrán ťahu $T_i \in T$, čo bolo treba dokázať.

Vykonajme teraz dôkaz vety 3. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety 3, že existuje konečný pravidelný graf G $(2x + 1)$-ého stupňa, ktorý možno rozložiť na systém $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ o vlastnostiach α), β), pričom v G existuje uzol u, ktorý je incidentný s mostami $h_1, h_2, \ldots, h_y$; $(y > x)$. Počet hrán incidentných s uzlom u, ktoré nie sú mostami $(2x + 1 - y)$ je menší, ako počet mostov incidentných s u.

Označme znakom $u_i \neq u$ druhý uzol, s ktorým je hrana h_i incidentná a znakom B_i ten breh mosta h_i, ktorý obsahuje uzol u_i, znakom B_0 breh mosta h_i, ktorý obsahuje uzol u (je to zrejme breh, ktorý je spoločný všetkým mostom h_i; $i = 1, 2, \ldots, y$) a napokon znakom T_{α_i} ťah systému T, ktorý obsahuje hranu h_i.

Podľa vety 4 práve x hrán z ťahu T_{α_i} patrí do B_0, a pretože h_i je hranou T_{α_i}, musí mať B_0 aspoň jednu hranu z T_{α_i}, ktorá je incidentná s uzlom u. Teda v B_0 existuje najmenej y hrán incidentných s uzlom u. To je však spor, lebo B_0 má práve $2x + 1 - y$ takých hrán a za predpokladu, že platí $y > x$, je nutne $2x - y + 1 < y$.

Predpoklad existencie uzla u incidentného s y $(y > x)$ mostami grafu viedol ku sporu. Preto ak graf G má uzol incidentný s viac ako x mostami, neexistuje v ňom rozklad na systém otvorených ťahov T o vlastnostiach α), β).

Poznámka 4. U skúmaných grafov neuplatnili sme požiadavku súvislosti, neomedzili sme sa len na súvislé grafy, ako je tomu v Listingovej vete. Často pri úvahách podobného druhu skúma sa každá komponenta grafu osobitne a potom dokazujú sa vety pre grafy s viacerými komponentami. V našom prípade ukázalo sa účelnejším upustiť od požiadavky súvislosti a skrátili sme tak cestu ku zovšeobecneniu.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ ЛИСТИНГА О РАЗЛОЖЕНИИ ГРАФА НА ОТКРЫТЫЕ ВЕТВИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава.

(Поступило в редакцию 25/IV 1955 г.)

В статье доказываются следующие теоремы, примыкающие к известной теореме Листинга:

1. Пусть G — конечный регулярный граф $(2x + 1)$-ой степени $(x > 0)$ с $2n$ вершинами, в котором существует хоть один линейный множитель L; тогда существует система открытых ветвей $\mathfrak{Z} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ со следующими свойствами:

а) Каждое ребро графа является ребром в точности одной ветви из L.

б) Все ветви содержат одинаковое число ребер $2x + 1$.

в) Каждая ветвь содержит в точности одно ребро из L.

2. Пусть G — конечный связный регулярный граф третьей степени с четным числом $2n$ вершин и пусть существует система открытых ветвей $\mathfrak{Z} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$, имеющая следующие свойства:

а) Каждое ребро графа G является ребром в точности одной ветви из $\mathfrak{Z}$.

б) Каждая ветвь содержит в точности три ребра.

Тогда в графе G существует хотя бы один линейный множитель.

Теорема, аналогичная теореме 2 для графа $(2x + 1)$-ой степени, где $x > 1$, не имеет места.

3. Конечный регулярный граф $(2x + 1)$-ой степени можно разложить на систему открытых ветвей $\mathfrak{Z}$ со свойствами а), б) только тогда, если G не содержит такой вершины, которая была бы инцидентной с более, чем x мостами.

Zusammenfassung

BEMERKUNGEN ZUM LISTINGSCHEN SATZ ÜBER DIE ZERLEGUNG EINES GRAPHEN IN OFFENE ZÜGE

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Eingegangen am 25. April 1955.)

In der Arbeit sind folgende Sätze, die sich dem bekannten Satz von Listing anknüpfen, bewiesen:

1. Es sei G ein endlicher regulärer Graph $(2x + 1)$-ten Grades $(x > 0)$, in dem die Anzahl von Knotenpunkten $2n$ ist und in welchem mindestens ein Faktor ersten Grades L existiert. Dann existiert ein System von offenen Zügen $\mathfrak{Z} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ mit diesen Eigenschaften:

a) Jede Kante des Graphen G ist eine Kante genau eines Zuges aus $\mathfrak{Z}$.

b) Jeder Zug besitzt dieselbe Anzahl $2x + 1$ von Kanten.

c) Jeder Zug besitzt eine und nur eine Kante des linearen Faktors L.

2. Es sei G ein endlicher regulärer Graph dritten Grades mit $2n$ Knotenpunkten. Es existiere ein System von offenen Zügen $\mathfrak{Z} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Jede Kante des Graphen G ist eine Kante genau eines Zuges aus $\mathfrak{Z}$.

b) Jeder Zug besitzt genau drei Kanten.

Dann existiert im Graphen G mindestens ein Faktor ersten Grades.

Der analogische Satz für einen Graphen $(2x + 1)$-ten Grades mit $x > 1$ ist nicht gültig.

3. Man kann einen endlichen regulären Graphen $(2x + 1)$-ten Grades G in ein System $\mathfrak{Z}$ von offenen Zügen mit den Eigenschaften a), b) nur dann zerlegen, wenn G keinen Knotenpunkt besitzt, der mit mehr als x Brücken inzidiert.