Miloslav Jůza

Lineární algebra a projektivní geometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 473--475

[4] *A. Špaček*: Note on K. Menger's probabilistic geometry. Czechoslovak Math. J. 6 (1956), str. 72—74.

[5] *A. Špaček*: Sur l'inversion des transformations aléatoires presque sûrement linéaires. Vyjde v Acta Math.

[6] *A. Špaček*: Zufällige Mengenfunktionen. Vyjde v Math. Nachrichten.

[7] *K. Winkelbauer*: К теории обобщенных случайных процессов. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[8] *O. Hanš*: The strong law of large numbers for generalized random variables. Bull. Acad. Polonaise Sci. Vol. IV, str. 15—17.

[9] *O. Hanš*: Zobecněné náhodné veličiny a náhodné transformace. Kandidátská disertační práce.

[10] *A. Špaček*: Prolongement des transformations aléatoires. Připraveno k publikaci.

[11] *O. Hanš*: Reduzierende zufällige Transformationen. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[12] *O. Hanš*: Inverse and adjoint transforms of random linear transforms. Připraveno k publikaci.

[13] *O. Hanš*: O vlastnostech náhodných transformací. Písemná práce pro kandidátské zkoušky.

[14] *M. Ullrich*: Theorie náhodných distribucí. Připravovaná kandidátská disertační práce.

[15] *M. Driml*: Distribuční a charakteristické funkcionály pro zobecněné náhodné proměnné. Připravovaná kandidátská disertační práce.

Miloslav Driml, Praha.

LINEÁRNÍ ALGEBRA A PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

(Referát Miloslava Jůzy přednesený v matematické obci pražské dne 12. března 1956.)

Obsahem referátu byla 5. a 6. kapitola knihy Hodge-Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, pojednávající o vztahu algebraické a synthetické definice projektivního prostoru.

Budiž T těleso, ne nutně komutativní. Uspořádanou množinu $n + 1$ prvků $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tělesa T takovou, že nejsou všechna a_i rovna nule, nazveme aritmetickým bodem n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Dva aritmetické body $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$ nazveme ekvivalentní zprava, jestliže existuje $\lambda \in T$ tak, že $a_i = b_i\lambda$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Každou třídu sobě ekvivalentních aritmetických bodů nazveme bodem pravostranného n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T, množinu všech takových bodů pravostranným n-rozměrným číselným projektivním prostorem nad T. Podobně definujeme levostranný n-rozměrný číselný projektivní prostor nad T.

Budiž (a_{ij}) regulární matice n-tého stupně nad T. Budiž π zobrazení, které aritmetickému bodu $(x_0, \ldots, x_n)$ přiřazuje aritmetický bod $(y_0, \ldots, y_n)$, při čemž $y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j$ pro $i = 0, \ldots, n$. Snadno zjistíme, že obrazy bodů ekvivalentních zprava jsou opět body ekvivalentní zprava a že je to prosté zobrazení pravostranného projektivního prostoru na sebe. Zobrazení π nazýváme projektivní transformací tohoto prostoru.

Budiž S množina a mějme dáno prosté zobrazení množiny S na pravostranný n-rozměrný číselný projektivní prostor nad T. Pak množinu S nazveme pravostranným n-rozměrným projektivním prostorem nad T a prvkům množiny S budeme říkat body tohoto prostoru. Jestliže bod $A \in S$ je při tomto zobrazení zobrazen na bod $(a_0, \ldots, a_n)$ číselného projektivního prostoru, nazýváme čísla $a_0, \ldots, a_n$ souřadnicemi bodu A. Budeme v tomto případě psát $A = (a_0, \ldots, a_n)$. Budiž π projektivní transformace n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Jestliže každému bodu $X \in S$ místo souřadnic $(x_0, \ldots, x_n)$ přiřadíme souřadnice $\pi(x_0, \ldots, x_n)$, bude množina S opět n-rozměrným projektivním prostorem nad T. Každou takovouto změnu souřadnic budeme nazývat přípustnou transformací souřadnic prostoru S.

Budiž S pravostranný n-rozměrný projektivní prostor nad T, $A = (a_0, \ldots, a_n)$, $A^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j)$, $j = 0, \ldots, k$ body tohoto prostoru. Bod A nazveme lineárně závislým na bodech $A^0, \ldots, A^k$, jestliže existují prvky $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ z T tak, že $a_i = \sum_{j=0}^{k} a_i^j \lambda_j$, $i = 0, \ldots, n$. Body $A^0, \ldots, A^k$ nazveme lineárně závislé, jestliže některý z nich je lineárně závislý na ostatních. Vztah lineární závislosti se zřejmě nemění při přípustné transformaci souřadnic ani nezávisí na tom, jak jednotlivé body vyjádříme pomocí aritmetických bodů.

Buďtež $A^0, \ldots, A^k$, $k \geqq 0$, lineárně nezávislé body prostoru S. Množinu bodů, které jsou na bodech $A^0, \ldots, A^k$ lineárně závislé, nazveme k-rozměrným lineárním podprostorem prostoru S určeným body $A^j, \ldots, A^k$. Vyjádřeme pevně body $A^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j)$ pomocí aritmetických bodů a nechť bod $A = (a_0, \ldots, a_n)$ leží v k-rozměrném podprostoru určeném body $A^0, \ldots, A^k$. Pak $a_i = \sum_{j=0}^{n} a_i^j \lambda_i$, při čemž všechna λ_i nejsou současně rovna nule. Jestliže všechny souřadnice bodu A násobíme zprava prvkem $\lambda \neq 0$ tělesa T, projeví se to tím, že všechna λ_i se též násobí zprava prvkem λ. Snadno zjistíme, že tu máme prosté zobrazení k-rozměrného lineárního podprostoru pravostranného prostoru S do pravostranného k-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Každý k-rozměrný lineární podprostor prostoru S tedy můžeme považovat za pravostranný k-rozměrný projektivní prostor nad T. Rovněž snadno zjistíme, že $k + 1$ bodů prostoru S je lineárně závislých tehdy a jen tehdy, jestliže leží v nějakém q-rozměrném lineárním podprostoru, kde $q < k$. 0-rozměrné lineární podprostory jsou body.

Budiž opět S pravostranný n-rozměrný projektivní prostor nad T. Lineární k-rozměrné podprostory tohoto prostoru budeme značit S_k, po případě s indexy nahoře. Buďtež S_p, S_q dva lineární podprostory prostoru S. Jestliže každý bod podprostoru S_p leží v podprostoru S_q, řekneme, že S_p je částí S_q (leží v S_q a pod.) a budeme psát $S_p \subset S_q$. Můžeme pak dokázat tyto věty:

I. *Jestliže $S_p \subset S_q$ a $S_q \subset S_p$, pak $S_p = S_q$.*

II. *Jestliže $S_p \subset S_q$ a $S_q \subset S_r$, pak $S_p \subset S_r$.*

III. *Každý S_1 obsahuje aspoň tři různé body.*

IV. *Pro každých $p + 1$ lineárně nezávislých bodů existuje aspoň jeden S_p, který je obsahuje.*

V. *V každém S_p existuje aspoň jedna množina z $p + 1$ lineárně nezávislých bodů.*

VI. *Jestliže $p + 1$ lineárně nezávislých bodů leží v nějakém S_q, pak každé S_p obsahující tyto body je částí tohoto S_q.*

VII. *Nechť S_p a S_q jsou dva lineární podprostory v S. Jestliže $p + 1$ bodů $P^0, \ldots, P^p$ ležících v S_p je lineárně nezávislých, $q + 1$ bodů $Q^0, \ldots, Q^q$ ležících v S_q je lineárně nezávislých, ale $p + q + 2$ bodů $P^0, \ldots, P^p, Q^0, \ldots, Q^q$ je lineárně závislých, pak existuje bod R, ležící současně v S_p i v S_q.*

VIII. *Existuje aspoň jedna množina z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů, ale každých m bodů při $m > n + 1$ je lineárně závislých.*

Mějme naopak množinu nějakých objektů, které budeme nazývat lineárními podprostory dimense $0, 1, \ldots, n$ a označovat $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$. Mezi těmito lineárními podprostory mějme definován jakýsi vztah $S_p \subset S_q$ (S_p je částí S_q, S_q obsahuje S_p). Lineární podprostory dimense 0 budeme nazývat body. $k + 1$ bodů nazveme lineárně závislými, jestliže existuje lineární podprostor dimense $q < k$, který je všechny obsahuje. Nechť jsou splněny vlastnosti I—VIII. Budiž S množina všech bodů $S_0, S_0', \ldots$ Pak v případě $n > 2$ lze sestrojit takové těleso T, že S je pravostranným n-rozměrným projektivním prostorem nad T, při čemž ke každému k-rozměrnému lineárnímu podprostoru tohoto prostoru existuje takové S_k, že tento podprostor je právě množina těch bodů X, pro které $X \subset S_k$. Pro $n = 2$ takové těleso obecně neexistuje, nýbrž existuje právě tehdy, jestliže mezi objekty $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$ je splněna známá Desarguesova věta.

Miloslav Jůza, Bratislava.

MATEMATICKÁ PROBLEMATIKA THEORIE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

(Referát o přednášce VÁCLAVA DOLEŽALA, přednesené v Matematické obci pražské dne 16. dubna 1956.)

V přednášce jsem se pokusil ilustrovat povahu problémů v theorii lineárních elektrických obvodů se soustředěnými parametry na příkladě synthesy $2n$-pólu.

Pod pojmem $2n$-pól rozumí se v elektrotechnice jistý útvar, kterému je možno jednoznačně přiřaditi charakteristickou matici, která vystihuje jeho fysikální vlastnosti a která je maticí semipositivní. Pod synthesou rozumíme pak sestrojení takového $2n$-pólu, jehož charakteristická matice je rovna předepsané matici.

Označme Γ množinu všech komplexních čísel λ, pro něž $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\overline{\Gamma}$ pak její uzávěr. Semipositivní matici zavedeme definicí:

Řekneme, že čtvercová matice $\|w_{st}\|$ n-tého řádu je semipositivní maticí, jestliže:

1. její prvky jsou racionálními funkcemi proměnné λ, které jsou reálné pro λ reálné,
2. $w_{st} = w_{ts}$ pro všechna $s, t \leqq n$,
3. pro každý systém reálných čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pro každé $\lambda \in \Gamma$, které není pólem žádné w_{st}, je splněna nerovnost

$$\operatorname{Re} \sum_{s,t} w_{st} x_s x_t \geqq 0 .$$

Je-li nadto splněna nerovnost $\|\operatorname{Re} w_{st}(i\omega)\| \equiv 0$ (ω reálné), nazveme $\|w_{st}\|$ reaktanční maticí. Pak platí tyto věty:

Věta 1. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu; nechť žádná z funkcí w_{st} nemá na množině $\overline{\Gamma} - \Gamma$ póly jinde než v bodech $0, \infty, i\omega_r, -i\omega_r$ ($\omega_r > 0$; $r = 1, 2, \ldots, m$). Potom je*

$$\|w_{st}\| = \frac{1}{\lambda} H^{(0)} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_r^2} H^{(r)} + \lambda H^{(\infty)} + \|z_{st}\| ,$$

kde $H^{(0)}, H^{(r)}, H^{(\infty)}$ jsou číselné matice positivně semidefinitních kvadratických forem, při čemž $\|z_{st}\|$ je semipositivní matice, jejíž prvky nemají pólů v $\overline{\Gamma}$.

Věta 2. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu, jejíž žádný prvek nemá pólů na imaginární ose a v ∞, a pro niž matice $\|\operatorname{Re} w_{st}(i\omega)\|$ má hodnost 1.*