Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Rieger

O některých základních otázkách matematické logiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 342--351

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117210

O NĚKTERÝCH ZÁKLADNÍCH OTÁZKÁCH MATEMATICKÉ LOGIKY

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Došlo dne 27. října 1955.) DT:517.11

Doplněná přednáška*) z 6. 5. 1955 konaná v pondělní schůzce, pořádané matematickou obcí pražskou. Přednáška byla určena širšímu okruhu matematiků nepracujících přímo v matematické logice, resp. v t. zv. základech matematiky, a byla thematicky omezena na otázku pojetí a úkolů matematické logiky, resp. teorie základů matematiky.

K základním otázkám matematické logiky, resp. s ní úzce spjatým t. zv. otázkám základů matematiky nepřímo náleží také — přesněji řečeno, u nás náleží — otázka zájmu a pozornosti k těmto otázkám. V této věci, jak se domnívám, není vše v nejlepším pořádku. Porovnejme stav bádání v tomto oboru a pozornost k jeho základům (které mají zajímat konec konců každého matematika) jen u nás a v sousedních lidově demokratických státech, Polsku, Maďarsku a Německé demokratické republice, o velmoci SSSR na jedné a o západních velmocech s USA v čele na druhé straně nemluvě. Musíme dospět k závěru, že při stoupající úrovni a množství naší vědecké matematické produkce jsme v této oblasti absolutně i relativně pozadu. Přitom nelze říci, že by na naší půdě nebylo žádné tradice bádání v t. zv. otázkách základů matematiky. Zde stačí z minulého století jmenovat Bernarda Bolzana, jehož spisy, zejména spisy týkající se základních otázek matematiky, nejsou dosud z velké části bohužel vydány. Ze začátku tohoto století sluší připomenout jméno prof. Karla Vorovky, i když se zabýval základními otázkami matematiky spíše s hlediska filosofického, a z doby mezi oběma válkami jméno prof. Václava Lásky, který působil na Českém vysokém učení technickém a který

*) K některým zajímavým podrobnostem, o nichž mělo být promluveno, se přednášející pro nedostatek času nedostal — a zde je uvádí; naproti tomu jiné, od vlastního thematu odbočující poznámky, jsou zde uvedeny jen stručně. Na tuto přednášku navazovala druhá přednáška dne 27. 5. 1955, která se týkala již podrobnějšího rozboru matematických prostředků matematické logiky. Tyto otázky hodlá autor ve vhodném rozpracování uveřejnit později.

na sklonku svého života se věnoval otázkám matematické logiky. Pokud však jde o vlastní místo, kde měla být matematická logika pěstována, t. j. o Karlovu universitu, domnívám se, že nebylo správné, že péče o otázky základů matematiky a o matematickou logiku v období mezi oběma válkami byla formálně svěřena prof. V. HLAVATÉMU jako nástupci prof. Vorovky. Protože směr vědeckého zájmu a jistě vynikající práce prof. Hlavatého v diferenciální geometrii byla otázkám matematické logiky a základů matematiky značně vzdálena, prakticky se o matematické logice na KU po stránce matematické v období první republiky nepřednášelo.

Tak se zdá, že došlo téměř všeobecně u nás k určitému podceňování a snad i k určité nedůvěře k výsledkům matematické logiky a teorie t. zv. základů matematiky. Otázky t. zv. základů matematiky a matematické logiky byly považovány většinou za bližší filosofii než matematice. Není sporu o tom, že na tento názor měla vliv okolnost, že — zvláště v období mezi oběma válkami — byly (ve světové literatuře a sporadicky i u nás) publikovány také práce z oboru matematické logiky, které s hlediska matematických nároků na kritičnost a hloubku výsledků nebyly nesporné ceny. A tak našimi matematiky (většinou) nebyl náležitě doceněn fakt, že matematická logika a teorie základů dosáhly v posledních třiceti letech — jako jeden z nejmladších oborů matematiky — ve svém bouřlivém rozvoji významných a trvalých úspěchů v pracích GÖDELA, VON NEUMANNA, TARSKÉHO, CHURCHA, KLEENEHO, MOSTOWSKÉHO, NOVIKOVA, MARKOVA a j.; tyto výsledky podstatně ovlivnily náš dnešní názor na základní pojmy a otázky matematiky. A konečně je třeba litovati i toho, že v programu četných návštěv matematiků ze sousedních lidových demokracií u nás nebylo dosud po dobu desíti let od osvobození pamatováno na pozvání některého z obou vynikajících odborníků v matematické logice — prof. Mostowského z Varšavy (Polsko) či prof. KALMÁRA ze Szegedu (Maďarsko). Přesto se zdá, že o otázky matematické logiky počínají jevit hlubší zájem jednotlivci z nejmladší naší matematické generace; jde tedy jen o to, aby se jejich zájmu dostalo náležitého pochopení.

O POJETÍ MATEMATICKÉ LOGIKY

Přejděme k vlastnímu tematu. — Otázka hlavních úkolů, resp. předmětu a metod matematické logiky nepatří ovšem do této disciplíny samé, nýbrž do filosofie a již sama její formulace podstatně závisí na výchozím filosofickém stanovisku. Pokusím se charakterisovat hlavní předmět bádání matematické logiky, vycházeje se stanoviska vědeckého materialismu takto:

Matematická logika je ve své podstatě studium zákonitostí ve vztahu důsledku mezi matematickými větami, prováděné matematickými metodami.

Jestliže jde o věty určité teorie (aritmetiky, elementární geometrie, teorie množin a pod.), lze hovořit o matematické logice v užším slova smyslu, čili — jak se také někdy nepříliš pěkně říká — o metamatematice — a speciálněji o t. zv. teorii základů (té které matematické teorie). Pokud zkoumáme matematické zákonitosti vztahu důsledku, které jsou společné všem matematickým teoriím, hovoříme o obecné matematické logice, někdy (ještě méně pěkně) zvané metalogikou.

Je na místě hned zdůraznit důležitý a zásadní rozdíl oproti opačnému (idealistickému) pojetí matematické logiky (v užším i obecném smyslu). Matematické logice se u nás neukládá „normativní" úkol dávat matematice logická pravidla, resp. vytvářet základy matematiky („konstituovat" matematiku), nýbrž vymezuje se jí skromnější úloha postavit se k logické zákonitosti, ať již jednotlivé matematické discipliny, ať matematiky vůbec, jako k faktu, který přijímáme jako daný a který (kriticky) zkoumáme matematickými metodami.

To, že matematická logika buduje na matematice, která sama ke svému budování potřebuje logiku, neznamená žádné „petitio principii".

Kdybychom chtěli uvést hrubou analogii, mohli bychom říci, že s našeho stanoviska je matematická logika k matematice v podobném vztahu, jako fysiologie smyslů k fysice: Zajisté že fysika (především experimentální) počíná a končí u smyslového vnímání — a opírá se o ně. Přesto je možné a vhodné podrobit zkoumání samy procesy smyslového vnímání, které probíhají při fysikálních pozorováních. Aniž bychom tím sledovali cíl „založit fysiku na fysiologii", můžeme naopak využitím osvědčených fysikálních poznatků v exaktní fysiologii smyslového vnímání zkoumat zajímavé a užitečné zákonitosti smyslového vnímání, které probíhá při fysikálních pozorováních — což v neposlední řadě pomáhá i samé experimentální fysice (na př. při opravování t. zv. osobních chyb, resp. smyslových klamů při fysikálních pozorováních). Při tom se tu neobáváme žádného „petitia principii".

Díváme se tedy na matematickou logiku zásadně jako na s v é h o d r u h u aplikovanou matematiku. Z toho ovšem neplyne, že by výsledky matematické logiky nemohly nebo neměly hrát často význámnou roli při kritickém rozboru způsobů skutečného matematického usuzování v té které matematické disciplině, zejména běží-li o disciplinu poměrně isolovanou jak od ostatních částí matematiky, tak jmenovitě od aplikací na přírodní vědy. (Na př. některé části cantorovské teorie množin, zejména teorie „libovolných" kardinálních a ordinálních transfinitních čísel.)

Ale vcelku přece jen to je matematika sama, která v průběhu svého rozvoje do šířky i hloubky a zejména ustavičným, třebas často nepřímým stykem se skutečností v aplikacích, vyzkouší a ověří, resp. zavrhne ten který druh úsudků.

Není ovšem lhostejno, jakých matematických prostředků bude matematická logika jakožto aplikace matematiky užívat. Zhruba řečeno, je samozřejmé, že dáme přednost prostředkům jednoduchým a co nejvíce prověřeným celým dosavadním vývojem matematiky (na př. konstruktivní aritmetice) — a zavrhneme silně hypotetické prostředky (jako jsou zmíněné partie cantorovské teorie množin, které spíše samy potřebují ke svému osvětlení přispění matematické logiky).

V určování přípustných, resp. adekvátních matematických nástrojů matematické logiky, tkví jeden ze základních jejích problémů, o kterém budeme ještě podrobněji hovořit. A abychom se v tomto problému lépe orientovali, bude třeba blíže (s přijatého hlediska) osvětlit základní předmět výzkumu matematické logiky, to jest vztah důsledku a jeho zákonitosti.

Na vztah důsledku se můžeme dívat se tří podstatně různých stránek.

A. Především ve smyslu námi přijatého materialistického gnoseologického stanoviska vidíme v každém nalezeném případu vztahu důsledku v matematice (pokud je v běžném matematickém smyslu správný) odraz objektivně existující závislosti jistých matematických faktů na jiných matematických faktech. Jest úkolem té které matematické discipliny, aby stále úplněji vystihovala jednotlivé případy takové podmíněnosti jedněch matematických fakt jinými. Je ovšem zřejmé, že o této stránce vztahu důsledku, o jeho — tak říkajíc — objektivním podkladu, je nesnadno blíže hovořit v nějakém obecném a absolutním významu — a dost možná, že by to ani nemělo smyslu. Kromě toho, že objektivní podklad vztahu důsledku existuje nezávisle na matematice jako lidské myšlenkové činnosti, víme o něm právě jen tolik, kolik nám matematika odhaluje. Přesto však v logické teorii té které matematické teorie potřebujeme zjednat alespoň stávajícímu stavu takové teorie odpovídající matematickou představu o vztazích mezi značkami, resp. větami zkoumané teorie — a mezi předměty, resp. matematickými fakty, které jsou těmito znaky resp. větami míněny. K tomu účelu nemáme dosud lepších představ, než jaké dává obecná cantorovská teorie množin jakožto nejobecnější matematická teorie: na objektivně existující předměty matematické teorie hledíme jako na prvky, na jejich vlastnosti a na vztahy mezi nimi jako na množiny prvků, na vlastnosti a vztahy mezi vlastnostmi jako na množiny množin — atd.

Je tedy cantorovská teorie množin — při veškeré své problematičnosti — v tomto smyslu úzce svázána s matematickou logikou a tento svazek se uplatňuje nevyhnutelně všude, kde jde o význam (interpretaci) symbolů formalisovaných systémů, o otázky modelů a o pojem pravdivosti (matematické věty), pokud tyto pojmy nemíníme v úzkém smyslu překladu (formálně precisovatelného) z jednoho systému (formalisované teorie) do druhého. (K tomu srov. ostatně bod C doleji.)

B. Druhou, subjektivní, resp. intersubjektivní stránku vztahu důsledku mezi matematickými větami tvoří představy a myšlenkové asociace, které matematikové s tím kterým případem vztahu důsledku spojují.

Tato, především do psychologie, resp. do heuristiky matematického myšlení spadající stránka vztahu důsledku je (možná jen prozatím) nejméně přístupná matematickým metodám. To neznamená, že je pro matematickou logiku nedůležitá. Vžití se do skutečných (úspěšných) pochodů matematického (především deduktivního) myšlení je pro odkrytí zákonitosti matematické dedukce právě tak důležité, jako hluboká znalost příslušných matematických výsledků samých; nicméně ono tvoří spíše předsystematickou, přípravnou část práce matematického logika — a my zde se jí blíže obírat nebudeme.

C. Konečně třetí stránka vztahu důsledku mezi matematickými větami je jeho t. zv. stránka formální, lépe řečeno: formalisovatelná. Ta tvoří vlastní a zatím daleko nejrozvinutější pole aplikací matematických metod v logice.

Ukázalo se totiž (zásluhu o to má v prvé řadě německý logik Frege, z konce 19. stol.), že jednotlivé základní druhy logických úsudků v matematice možno po příslušném nahražení mnohoznačné slovní řeči vhodnou precisní soustavou symbolů (zkratek) vystihnout pomocí ryze kombinatorických přeměn seskupení symbolů (základních) v jiná — bez užití jejich významu — bez ohledu na stránku A vztahu důsledku (na to, co symboly označují) i na jeho stránku B (na to, jaké představy a myšlenkové obsahy se symboly spojujeme). To je princip formalisace deduktivního myšlení v matematice, na němž je cosi vzdáleně podobného kartézskému principu vystihování geometrických vztahů čísly.

Tak prvým matematickým nástrojem logiky se stává kombinatorika konečných posloupností, resp. jistých konečných seskupení základních symbolů (značek) formalismu, jakožto zcela libovolných (jen náležitě rozlišených) předmětů. Velkým pokrokem bylo, když Gödel v třicátých letech tohoto století připadl na myšlenku nahradit základní symboly vhodně zvolenými přirozenými čísly a symboly složené nahradit (vzájemně jednoznačně) čísly, aritmeticky složenými z čísel složek. Tak se stala elementární aritmetika a zvláště pak teorie rekursivních funkcí aritmetiky základním matematickým prostředkem logiky (neboť v tomto smyslu v sobě zahrnuje kombinatoriku konečných seskupení znaků). Je to nástroj nesporně spolehlivý a vydatný.

JSOU PŘÍPUSTNÉ INFINITNÍ NÁSTROJE V LOGICE?

Naskýtá se nyní základní otázka, které zde věnujeme zvláštní pozornost: Je nutno se na zmíněný nástroj omezit, anebo je přípustno i vhodno užít i dalších, případně méně elementárních, resp. ne již finitně — konstruktivních prostředků v matematické logice? Při tom máme stále na mysli formalisovatelnou stránku vztahu důsledku; pro teorii významu (interpretace) formalismu je spoluúčast dalších infinitních matematických prostředků (srovn. A shora), všeobecně vzato, jistě nevyhnutelná.

V odpovědi na tuto otázku se odborníci v matematické logice rozcházejí.

Zastánci konstruktivistického a finitistického hlediska popírají, že by užívání jakýchkoli infinitních matematických prostředků a pojmů (jako je třeba pojem reálného čísla) ke zkoumání formalisovatelného vztahu důsledku mezi větami mělo smysl.

S opačného hlediska (k němuž se hlásí i přednášející) považují se sice metody rekursivní aritmetiky resp. metody teorie algoritmů (srov. níže) za základní, ale připouštějí se i takové infinitní pojmy do matematické logiky, které se osvědčily (přímo, nebo nepřímo) v jiných, jmenovitě fysikálních aplikacích. — Pokusím se o stručnou obhajobu tohoto druhého hlediska.

Vycházíme-li důsledně z pojetí matematické logiky jako aplikace matematiky na výzkum důsledku mezi matematickými větami, pak musíme konstatovat, že všech dosud explicitně učiněných (zaznamenaných) deduktivních úsudků v matematice za celou dobu jejího trvání je nesporně konečný počet; myslím, že mohu na př. tvrdit bez důkazu, že tento počet až do konce r. 1960 nepřekročí číslo $100^{100^{\cdot^{\cdot^{100}}}}$ 100-krát za sebou povýšeno. Je tedy matematická logika nejprve v situaci, v níž jsou i jiné vědy aplikující matematiku: bezprostředně je postavena před sice jen konečný, ale ohromný a ve svých zákonitostech zprvu nepřehledný počet případů toho, co má zkoumat. Nezbývá nic jiného, než vyabstrahovat a zobecnit dosud pozorované projevy logických zákonitostí — a studovat tyto zákonitosti na idealisovaných umělých nekonečných symbolických „řečech", jako je formalisovaná aritmetika, formalisovaná geometrie a pod.; v takových teoreticky (matematicky) tak říkajíc extrapolovaných matematických „teoriích" máme co činit i s „větami" takové délky a složitosti, že není v lidských silách je vypsat, natož si plně uvědomit jejich smysl.

Takové nekonečně idealisované matematické „teorie" musejí být ovšem sestrojeny tak, aby obsahovaly skutečné matematické teorie (ve vhodné symbolické formulaci) jako svůj (konečný) fragment.

Zhruba zásadně podobně je tomu na př. v každé fysikální teorii: také zde je všech dosud učiněných pozorování a měření zajisté konečný počet — a k jejich číselnému záznamu bychom vystačili (na dlouhou dobu napřed) s omezeným dostatečně velikým (konečným) počtem racionálních čísel.

Avšak již v samé experimentální fysice je téměř samozřejmá a přirozená představa nekonečného spočetného množství všech racionálních čísel jakožto všech možných údajů měření (kdyby se přesnost měření neomezeně stupňovala).

Teoretická fysika však vyžaduje další matematické idealisace, ještě daleko více infinitní představy nespočetného množství všech reálných, resp. komplexních čísel. Ačkoli těchto čísel k vyjádření výsledku libovolně přesného měření nepotřebujeme, ve většině fysikálních teorií se skutečné fysikální veličiny považují za proměnné v oboru reálných čísel (resp. jejich skupin), kdežto naměřené racionální údaje se považují za aproximaci skutečných reálných hodnot. Ohromné úspěchy této představy v aplikacích dovolují závěr, že tato idealisace má reálný obsah a je správným krokem na cestě stále hlubšího poznání objektivních přírodních zákonitostí.

Jestliže jsme se tedy v matematické logice neomezili finitním stanoviskem v nejstriktnějším smyslu slova, t. j. připouštíme výzkum souvislostí nesporně „ideálních" matematických „vět" libovolné délky, pak není vidět přesvědčujícího důvodu, proč bychom — jestliže to bude vhodné, přirozené a hlavně plodné pro výzkum zákonitostí vztahu důsledku — nemohli připustit i další idealisací „věty" nekonečné délky, odpovídající v hrubé analogii reálným číslům ve fysice. Rozhodující odpověď na tuto otázku nemůže ovšem dát nic jiného, nežli úspěšné vyzkoušení takových infinitních pojmů v matematické logice. V tomto směru bylo zatím učiněno málo pokusů (na př. Carnap ve své „Logische Syntax", v nejnovější době práce Henkina a Sikorského o predikátovém počtu s nespočetně mnoha individuovými proměnnými a práce přednášejícího) — a to ještě je otázka, zda byly učiněny ve správném směru. Na přesvědčivou odpověď je třeba ještě delší dobu počkat, ale prvé počátky tu jsou.

Doplňme tuto obhajobu užívat též infinitních matematických pojmů ještě příměrem, který bude snad přesvědčivější než značně hrubé srovnání s fysikou.

Aritmetisace formalisovaných systémů dovoluje vyjadřovat logické vztahy mezi formalisovanými větami jako vztahy mezi jejich (přirozenými) t. zv. Gödelovými čísly. Avšak vztahy mezi přirozenými čísly možno studovat i pomocí neelementárních metod analytické teorie čísel, za pomocí vysoce infinitních pojmů. Proč by tedy nebylo možno studovat podobnými prostředky i formalisovaný vztah důsledku, když běží v zásadě o totéž.

Konstruktivní a finitní metody v matematické logice zůstanou ovšem základními metodami už proto, že (zejména v některých systémech, jako je na př. Gentzenův systém „přirozeného usuzování") bezprostředně idealisují postup skutečné diskursivní deduktivní myšlenkové činnosti. Podobně i aritmetika přirozených čísel v konstruktivním pojetí (elementární teorie čísel) zůstane základní matematickou disciplinou jako teorie základní početní činnosti. Podobně však jako nelze očekávat, že všechny předměty matematiky lze „zkonstruovat" prostředky aritmetiky, t. j. konec konců vytvořit je teoretickou lidskou činností, tak ani nelze očekávat, že formalisovatelné logické vztahy důsledku budou jen takové, které lze sestrojit z předem daného východiska konečným počtem konečně-kombinatorických kroků. Že ostatně taková představa v matematické logice je nemožná, to plyne ze známých Gödelových výsledků o nemožnosti rekurentní konstrukce celé relace důsledku ve formalisované aritmetice resp. v neelementární logice (kde se „existence“ a „všeobecnost“ týká i vlastností a vztahů — nejen předmětů.)

V doplňujícím protikladu k finitně-konstruktivní teorii diskursivního usuzování (t. j. postupného nalézání jednotlivých případů vztahu důsledku) v matematice je tedy s našeho stanoviska přirozené a potřebné studovat také hypothetické systémy nekonečně, po př. i nespočetně mnoha případů vztahu důsledku jako současně existujících, t. j. studovat idealisované nespočetné matematické teorie jako „hotové“.

Oprávněnost takových infinitních představ v matematické logice — při nezbytné kritičnosti a opatrnosti — je možno spatřovat v úspěších podobných představ ve fysice (a jiných exaktních vědách). Podnětem k zavedení takových představ do matematické logiky může být konec konců — kromě již řečeného — také okolnost (srovn. odst. sub B shora), že v matematickém myšlení hrají značnou úlohu i myšlenkové pochody nikoli diskursivní, tedy na finitně pojatý kalkul neredukovatelné povahy, které dost možná ke svému matematickému zachycení budou vyžadovat infinitních prostředků.

O NĚKTERÝCH NOVĚJŠÍCH ÚSPĚŠÍCH A O CENĚ MATEMATICKÉ LOGIKY

Na konec této přednášky bych rád odpověděl ještě na jednu otázku zásadního rázu: K čemu je vlastně matematická logika dobrá — a co dává matematikovi, zejména pokud jde o jeho disciplinu, kromě vědomí, že aplikace matematiky na logiku je možná a zajímavá sama o sobě? V čem spočívá (a v čem je falešné hledat) přitažlivost otázek matematické logiky?

Především jsme často v logice schopni dokázat, že z jistého vymezeného východiska (axiomů) té které matematické teorie a za ostře definovaných a důsledně dodržovaných logických pravidel mohou být odvozeny věty jistého („žádoucího“) druhu — a nemohou být odvozeny věty jiného (v nějakém smyslu „nežádoucího“) druhu (čili že axiomy a pravidla dávají to, co od nich chceme). Nejčastěji běží o to, že nemůže být odvozena věta tvaru „A et non A“, t. j. o otázku bezespornosti. Tato otázka, s idealistického hlediska (na př. v koncepsi Hilbertově) považovaná za ústřední otázku matematické logiky vůbec, ustoupila dnes poněkud do pozadí. Díváme se na věc v případě všestranně prověřených matematických teorií spíše tak, že důkazy bezespornosti (jedné formalisované teorie pomocí druhé, v důkazu užité a neformální) jednak skýtají často zajímavé a netušené vzájemné vztahy mezi odlehlými matematickými teoriemi, jednak do jisté míry ověřují nutnou podmínku a dávají kontrolu toho, že jsme formalisaci správně provedli. (Na př. Genztenův důkaz bezespornosti aritmetiky pomocí transfinitní indukce typu prvního spočetného epsilonového čísla (1936).)

Jiná je situace v logickém rozboru oněch teorií, jako je především obecná cantorovská teorie množin, které jsou do značné míry hypotetické a od ostatních dílů matematiky i od aplikací poměrně isolované.

Zde ovšem jsme nejen daleko od jakéhokoli náznaku důkazu bezespornosti (a zde by důkaz bezespornosti měl vzhledem k výskytu množinových paradoxů zvláštní význam), ale dokonce ani dosavadní formalisace a axiomatisace nelze považovat za zcela uspokojivé. Nicmnéně i zde bylo dosaženo pro matematiku významného úspěchu, když bylo Gödelem v r. 1938 dokázáno toto: Jestliže (při výlučném použití elementární logiky — nižšího predikátového počtu) nelze vyvodit spor z běžných „důvěryhodných" axiomů „nepříliš silné" teorie množin, pak ani po připojení tolik kritisovaného axiomu výběru — a dokonce po připojení obecné Cantorovy hypothesy kontinua ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) — ke sporu nemůže dojít.

Dále jsme schopni často říci, zda dané přesně formálně vymezené logické prostředky stačí anebo nestačí k tomu, aby z daných konečně mnoha axiomů byly odvozeny všechny věty té které obsahově — axiomaticky budované teorie, které musíme považovat za pravdivé poučky. Jeden z nejproslulejších výsledků matematické logiky, pocházející od Gödela z r. 1933 a zdokonalený Rosserem, Tarskim a Mostowskim v nedávné době, říká, že běžné (formalisované) logické úsudky k tomu nestačí ani v případě aritmetiky přirozených čísel (a tím spíše ani v teoriích obsažnějších).

Dále se podařilo — po precisaci dříve toliko intuitivního pojmu algoritmu jakožto mechanisovatelného početního postupu — dokázat, že na některé druhy aritmetických otázek nelze odpovědět algoritmickým způsobem. Jinak řečeno, zdařilo se řešit (záporně) některé t. zv. problémy rozhodnutelnosti. Tak na př. neexistuje algoritmický způsob, jak rozhodnout o výrazu nižšího predikátového počtu, zda je či není t. zv. identickou formulí (Church 1936). Matematicky významnější je však záporné řešení problému existence algoritmu pro některé úlohy maticového počtu a obecněji asociativních systémů (Markov 1949, 1950). Zvláště významným výsledkem je tu záporné řešení proslulého, přes 30 let starého problému slov teorie grup, t. j. problému nalezení algoritmu, který by dovoloval rozhodnout, zda dvě dané formy prvků grupy s konečným počtem generátorů a definujících relací udávají týž prvek nebo ne (Novikov, 1952).

Po positivní stránce zatím nejobsažnější formalisovaná matematická teorie, u níž se podařilo nalézt algoritmus dovolující rozhodovat o správnosti či nesprávnosti logicko-matematické formule, je formalisovaná t. zv. elementární algebra a geometrie (algebra je bez indukce, geometrie bez axiomu spojitosti). To je výsledek Tarského z r. 1949.

Tolik na ukázku jednotlivých matematicky významných výsledků matematické logiky. Více nelze v této přednášce přinést; doufám, že to stačí pro povzbuzení zájmu těch, kteří snad o uvedených výsledcích nevěděli. Přitom nehovoříme o určitém významu, který má matematická logika pro teorii matematických strojů (teorie obecně rekurentních funkcí a algoritmů), jakož i o aplikaci na teorii releových elektrických obvodů. Nerozvádím také jistý význam, jaký má podle mého názoru hlubší znalost výsledků matematické logiky (ovšem bohužel zatím nikoli u nás) pro otázky t. zv. elementární matematiky a didaktiky.

V čem však tkví zvláštní přitažlivost, kterou matematická logika a t. zv. teorie základů má pro většinu hlouběji přemýšlejících matematiků? Je nedorozuměním spatřovat tuto přitažlivost v tom, že by snad matematická logika učila matematika „logicky myslet“. Je idealistickým sebeklamem vidět tuto přitažlivost v tom, že matematická logika je prý jakousi „vědou všech věd“, „základem matematiky“, obecnou deduktivní metodologií anebo jiným kamenem mudrců. A přece nelze popřít, že v zájmu o problémy matematické logiky jest i jistý — chcete-li — filosofický moment, kterého není tolik v jiných matematických disciplinách — možná s výjimkou obecné teorie množin. Kdybych se chtěl ve formě jakéhosi stručného, ovšemže jen osobního vyznání blíže vyslovit o tomto momentu (který zajisté není jediný a který nemá ovšem nic společného s idealistickými spekulacemi), řekl bych to asi takto: Matematika vzdor zásadní konečnosti svých výrazových prostředků proniká stále hlouběji do zákonitostí nekonečna a lze říci, že se zmocňuje dokonce (pokud příliš neutíká skutečnosti) nekonečen různých druhů. Jedním z nejhlubších a nejúchvatnějších úkolů matematické logiky jest kriticky objasňovat dialektiku vztahů mezi konečnem a nekonečnem v matematice, tento zápas matematiky o nekonečno — a pomoci matematice nalézt v něm nové cesty.