

Karel Svoboda

Poznámka o plochách s lokálně sférickou indikací normální křivosti v pětirozměrném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 299--303

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117206>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA O PLOCHÁCH S LOKÁLNĚ SFÉRICKOU INDIKATRICÍ
NORMÁLNÍ KŘIVOSTI V PĚTIROZMĚRNÉM PROSTORU

KAREL SVOBODA, Brno.

(Došlo dne 2. června 1955.)

DT 513.735

Autor vyšetřuje zvláštní případ ploch s lokálně sférickou indikatricí normální křivosti v pětirozměrném prostoru konstantní křivosti a doplňuje tím výsledky uvedené v pojednání *Sur une caractérisation métrique de la surface de Véronèse*.

1. V pětirozměrném prostoru S_5 konstantní křivosti c přiřadíme každému bodu M pohyblivý reper (R) složený z ortonormálních vektorů e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . Libovolné změně parametrů prostoru v okolí určitého bodu odpovídá změna reperu a zvláště platí rovnice tvaru

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_4 e_4 + \omega_5 e_5, \\ de_i &= -c\omega_i M + \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 + \omega_{i4} e_4 + \omega_{i5} e_5, \end{aligned} \quad (1)$$

$(i = 1, \dots, 5),$

při čemž ω jsou lineární formy v diferenciálech proměnných, na nichž závisí reper (R) .

Formy ω vyhovují vzhledem k předpokladům o vektorech e_i lineárním rovnicím

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (i, j = 1, \dots, 5) \quad (2)$$

a vnějším kvadratickým relacím

$$\begin{aligned} [d\omega_i] &= [\omega_1\omega_{1i}] + [\omega_2\omega_{2i}] + [\omega_3\omega_{3i}] + [\omega_4\omega_{4i}] + [\omega_5\omega_{5i}], \\ [d\omega_{ij}] &= [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\omega_{3j}] + [\omega_{i4}\omega_{4j}] + [\omega_{i5}\omega_{5j}] - c[\omega_i\omega_j], \end{aligned} \quad (3)$$

$(i, j = 1, \dots, 5),$

které jsou rovnicemi struktury prostoru S_5 s konstantní křivostí c . Tento prostor je pro $c = 0$ eukleidovský a pro $c \neq 0$ neeukleidovský.

Z rovnic (1) vychází pro lineární element vztah

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2. \quad (4)$$

Budeme se zabývat množinou (M) bodů M v prostoru S_5 , která je definována tímto způsobem:

Každému bodu M množiny (M) lze přiřaditi pohyblivý reper (R) takový, že příslušné formy ω vyhovují kromě rovnic (2) soustavě Pfaffových rovnic

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 0, & \omega_4 &= 0, & \omega_5 &= 0, \\ \omega_{13} &= v\omega_1, & \omega_{14} &= r\omega_1, & \omega_{15} &= r\omega_2, \\ \omega_{23} &= v\omega_2, & \omega_{24} &= -r\omega_2, & \omega_{25} &= r\omega_1, \end{aligned} \quad (5)$$

v nichž funkce v, r jsou vázány podmínkou

$$v^2 + r^2 = R^2, \quad (6)$$

kde R značí kladnou konstantu.

Z rovnic (1) a (5) je patrné, že uvažovanou množinou bodů M je plocha vnořená do prostoru S_5 a že pohyblivý reper přiřazený libovolnému jejímu bodu má tu vlastnost, že vektory e_1, e_2 jsou rovnoběžné s tečnou rovinou plochy v bodě M .

V libovolném bodě plochy jest její normální křivost definována vektorem kolmým k tečné rovině, jehož souřadnicemi jsou kvadratické formy

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} &= v(\omega_1^2 + \omega_2^2), \\ \omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_{24} &= r(\omega_1^2 - \omega_2^2), \\ \omega_1\omega_{15} + \omega_2\omega_{25} &= 2r\omega_1\omega_2, \end{aligned} \quad (7)$$

dělené výrazem ds^2 . Položíme-li $\omega_1 = ds \cdot \cos \Theta$, $\omega_2 = ds \cdot \sin \Theta$ a označíme-li X_3, X_4, X_5 souřadnice vektoru normální křivosti v prostoru S_3 , který je totálně kolmý k tečné rovině plochy (M) v bodě M , dostaneme

$$X_3 = v, \quad X_4 = r \cos 2\Theta, \quad X_5 = r \sin 2\Theta. \quad (8)$$

Mění-li se Θ , vyplní koncový bod vektoru normální křivosti kuželosečku, která se nazývá *indikatrix normální křivosti* uvažované plochy v bodě M .

Z rovnic (8) vychází podle (6) $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = R^2$, takže uvažovaná plocha má vlastnost, že *indikatrix normální křivosti v každém bodě plochy je kružnice ležící na kouli prostoru S_3 , která má konstantní poloměr R a střed v příslušném bodě plochy*.

Je zřejmé, že r značí poloměr indikatrixe a v vzdálenost její roviny od bodu plochy. Budeme říkati, že tyto plochy mají lokálně sférickou indikatrixi normální křivosti.

2. Vyšetříme nyní existenci a obecnost ploch, které mají výše uvedenou vlastnost, při čemž budeme předpokládati $v \neq 0$. Příklad $v = 0$ podrobně vyšetřil O. BORŮVKA v pojednání *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante* (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 106, 1929).

Vnější diferencováním rovnic (5) a užitím rovnic struktury (3) dostaneme především vnější kvadratické relace

$$\begin{aligned}
& \left[\omega_1 \left(\frac{dv}{r} - \omega_{34} \right) \right] - [\omega_2 \omega_{35}] = 0, \\
& [\omega_1 \omega_{35}] - \left[\omega_2 \left(\frac{dv}{r} + \omega_{34} \right) \right] = 0, \\
& \left[\omega_1 \left(\frac{dr}{r} + \frac{v}{r} \omega_{34} \right) \right] + [\omega_2 (2\omega_{12} - \omega_{45})] = 0, \\
& [\omega_1 (2\omega_{12} - \omega_{45})] - \left[\omega_2 \left(\frac{dr}{r} - \frac{v}{r} \omega_{34} \right) \right] = 0, \\
& \left[\omega_1 \left(2\omega_{12} - \frac{v}{r} \omega_{35} - \omega_{45} \right) \right] - \left[\omega_2 \frac{dr}{r} \right] = 0, \\
& \left[\omega_1 \frac{dr}{r} \right] + \left[\omega_2 \left(2\omega_{12} + \frac{v}{r} \omega_{35} - \omega_{45} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

v nichž diferenciály funkcí v a r vyhovují podle (6) podmínce

$$v dv + r dr = 0. \tag{10}$$

Z (9) a (10) plyne, že soustava Pfaffových rovnic (5) není v involuci. Prodloužíme ji proto rovnicemi

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{r} &= 2(A\omega_1 - B\omega_2), \quad 2\omega_{12} - \omega_{45} = \frac{v}{r} (B\omega_1 + A\omega_2), \\
\omega_{34} &= -A\omega_1 - B\omega_2, \quad \omega_{35} = B\omega_1 - A\omega_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

v nichž A, B jsou nové funkce.

Podmínky integrability prodloužené soustavy rovnic (5), (11) dostaneme pak ve tvaru

$$\begin{aligned}
& [\omega_1(dA + B\omega_{12})] - [\omega_2(dB - A\omega_{12})] = 0, \\
& [\omega_1(dB - A\omega_{12})] + [\omega_2(dA + B\omega_{12})] + \\
& + \frac{r}{v} \left(6r^2 - 2v^2 - 2c - 1 + 2 \frac{v^2}{r^2} \cdot \overline{A^2 + B^2} \right) [\omega_1\omega_2] = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$[\omega_1(dA + B\omega_{12})] + [\omega_2(dB - A\omega_{12})] - 2 \frac{v}{r} AB [\omega_1\omega_2] = 0,$$

$$[\omega_1(dB - A\omega_{12})] - [\omega_2(dA + B\omega_{12})] + \frac{v}{r} (A^2 - B^2) [\omega_1\omega_2] = 0.$$

Z rovnic (12) je však patrné, že také prodloužená soustava Pfaffových rovnic není v involuci. Položíme proto znovu na základě Cartanova lemmatu

$$\begin{aligned}
dA + B\omega_{12} &= \\
&= \frac{r}{2v} (6r^2 - 2v^2 - 2c - 1 + 2 \frac{v^2}{r^2} \cdot \overline{A^2 + B^2} - \frac{v^2}{r^2} \cdot \overline{A^2 - B^2}) \omega_1 + \frac{v}{r} AB\omega_2,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
dB - A\omega_{12} &= \\
&= -\frac{v}{r} AB\omega_1 - \frac{r}{2v} \left(6r^2 - 2v^2 - 2c - 1 + 2 \frac{v^2}{r^2} \cdot \overline{A^2 + B^2} + \frac{v^2}{r^2} \cdot \overline{A^2 - B^2} \right) \omega_2.
\end{aligned}$$

Vnější diferencováním pak dostaneme z rovnic (13) relace

$$\begin{aligned} B\{(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2\} &= 0, \\ A\{(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2\} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Z nich je patrné, že je třeba rozlišovati dva případy podle toho, zda obě veličiny A, B jsou nebo nejsou současně rovny nule.

Buď nejprve $A = B = 0$. Pfaffovy rovnice (11) mají v tomto případě tvar

$$dv = 0, \quad 2\omega_{12} - \omega_{45} = 0, \quad \omega_{34} = 0, \quad \omega_{35} = 0 \quad (15)$$

a uvažované plochy mají vlastnost, že vzdálenost v roviny indikatrice od příslušného bodu plochy je konstantní. Z (6) pak vychází, že poloměr r indikatrice je rovněž konstantní.

Podmínkou integrability soustavy rovnic (5) a (15) je podle (12) $3r^2 - v^2 - c = 0$, takže uvedená soustava je úplně integrabilní a její obecné řešení závisí jen na konstantách.

Předpokládejme nyní, že není současně $A = B = 0$, takže podle (11) v není konstantní podél celé plochy. Podle (14) je pak

$$(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2 = 0. \quad (16)$$

Diferencováním tohoto vztahu a dosazením podle (10), (11), (12) dostaneme relaci, kterou lze na základě (16) zjednodušiti na tvar

$$(v^2 + r^2)c + (v^2 - r^2)(v^2 + 6r^2) = 0.$$

Tato relace vede pak po opětovném diferencování a odloučení výrazu $v dv$, který je podle předpokladu různý od nuly, k podmínce

$$17r^2 - 3v^2 = 0.$$

Odtud pak stejným postupem odvodíme spor s uvedeným předpokladem. Uvažované plochy tedy v tomto případě neexistují.

3. Shrnutím předcházející úvahy dospíváme k tomuto výsledku:

V pětirozměrném prostoru konstantní křivosti c existuje právě jedna třída ploch, které mají lokálně sférickou indikatrici normální křivosti, ležící na kouli s konstantním poloměrem a se středem v příslušném bodě plochy a v rovině neprocházející tímto bodem. Vzdálenost roviny indikatrice od bodu plochy a tedy také její poloměr jsou u těchto ploch konstantní.

V pojednání *Sur une caractérisation métrique de la surface de Veronèse* (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 368, 1955) jsem odvodil, že tyto plochy jsou dokonale určeny tím, že jejich lokálně sférická indikatrix normální křivosti má konstantní poloměr podél celé plochy, a uvedl základní geometrické vlastnosti těchto ploch. Zejména jsem zjistil, že každá taková plocha je *Veronésovou plochou* v projektivně rozšířeném prostoru S_5 , a podal tak metrické vlastnosti klasické Veronésovy plochy.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ С МЕСТНО-СФЕРИЧЕСКОЙ ИНДИКАТРИСЕЙ НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно.

(Поступило в редакцию 2/VI 1955 г.)

Поверхности, определенные в пятимерном пространстве постоянной кривизны системой дифференциальных уравнений (1), коэффициенты ω которых удовлетворяют линейным отношениям (2) и (5), имеют в каждой точке в качестве индикатрисы нормальной кривизны окружность, находящуюся на сфере с центром в соответствующей точке поверхности и с постоянным радиусом.

В этой работе доказывается, что существует только один класс таких поверхностей по предположению, что плоскость индикатрисы не проходит через соответствующую точку поверхности. Ее расстояние от точки поверхности, подобно как и ее радиус, у этих поверхностей постоянные.

Résumé

REMARQUE SUR LES SURFACES À L'INDICATRICE DE COURBURE NORMALE LOCALEMENT SPHÉRIQUE DANS UN ESPACE À CINQ DIMENSIONS

KAREL SVOBODA, Brno.

(Reçu le 2 juin 1955.)

Les surfaces, qui sont définies dans un espace à cinq dimensions à courbure constante par le système d'équations différentielles (1), dont les coefficients ω satisfont aux relations linéaires (2) et (5), ont à chaque point pour l'indicatrice de courbure normale une circonférence située sur la sphère centrée au point correspondant de la surface et de rayon constant.

Dans ce Mémoire on démontre qu'il existe précisément une classe de telles surfaces sous la supposition que le plan de l'indicatrice ne passe pas par le point correspondant de la surface. La distance de ce plan au point correspondant de la surface, ainsi que son rayon est constant pour les surfaces en question.