Zbyněk Nádeník

O ortocentru normálního mnohoúhelníka

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 292--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117205`

O ORTOCENTRU NORMÁLNÍHO MNOHOÚHELNÍKA

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo dne 23. května 1955.) DT:513.343

Pro normální mnohoúhelník v $\mathbf{E}_n$ (n sudé), který je n-dimensionálním zobecněním trojúhelníka, je v článku prostřednictvím n-rozměrné analogie Feuerbachovy kružnice vyslovena definice jistého význačného bodu V (resp. směru v), která pro $n = 2$ dává ortocentrum trojúhelníka. Jsou uvedeny některé vlastnosti bodu V, které jsou zobecněním známých vlastností průsečíku výšek trojúhelníka. Splyne-li bod V s některým vrcholem normálního mnohoúhelníka, platí pro něj věta analogická větě Pythagorově. Při n lichém je situace podstatně jiná.

Uvedený způsob není jediný, kterým je možno definovat pro normální mnohoúhelník bod, analogický ortocentru trojúhelníka. Některé jiné definice budou podány později.*)

1. Těžnicové nadroviny a těžiště

Budeme stále předpokládat, že přímky stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ jsou orientovány, a všecky indexy, probíhající vždy přirozená čísla, budeme důsledně brát mod $(n + 1)$. V dalším to nebudeme již zvlášť vyznačovat.

Věta 1. *Budiž S_i střed strany a_i normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Je-li n sudé, neleží body*

$$S_1, S_2, \dots, S_{n+1} \tag{1,1}$$

v žádné nadrovině, takže jsou vrcholy normálního mnohoúhelníka $S_1S_2 \dots S_{n+1}$. Je-li n liché, leží body (1,1) *právě v jedné nadrovině σ, která je rovnoběžná s podprostory $\{A_1A_3 \dots A_n\}$ a $\{A_2A_4 \dots A_{n+1}\}$ a kterou nazveme středovou nadrovinou.*

Důkaz. Poněvadž

$$\frac{\overrightarrow{A_iS_i}}{\overrightarrow{A_{i+1}S_i}} = (S_i; A_i, A_{i+1}) = -1 , \tag{1,2}$$

*) Čísla v lomených závorkách odkazují na články uvedené na konci. Terminologií i symbolikou navazuje článek na práci [1].

je

$$\prod_{k=1}^{n+1} (S_k;\, A_k, A_{k+1}) = (-1)^{n+1}\,. \tag{1,3}$$

Je-li n sudé, neexistuje podle (1,3) a věty 2,1 z [1] nadrovina, která by obsahovala body (1,1).

Je-li n liché, leží body (1,1) podle (1,3) a věty 2,2 z [1] právě v jedné nadrovině. Poslední tvrzení věty pak plyne snadno z toho, že přímky $\{A_iA_{i+2}\}$ a $\{S_iS_{i+1}\}$ jsou rovnoběžné.

Definice 1. *Vrcholovou nadrovinu, která spojuje bod S_i s vrcholovým podprostorem protějším straně a_i, nazveme těžnicovou nadrovinou normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ a označíme τ_i.*

Poznámka 1. Pro $n = 2$ je ovšem těžnicová nadrovina těžnicí trojúhelníka.

Věta 2. *$n + 1$ těžnicových nadrovin normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ má společný právě jeden bod T, který nazveme jeho těžištěm.*

Důkaz. Podle (1,3) a věty 2,4 z [1] mají těžnicové nadroviny právě jeden bod anebo právě jeden směr společný. Položíme-li $k_i = (S_i;\, A_i, A_{i+1})$, snadno zjistíme podle (1,2), že $1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^n\, k_1k_2 \dots k_n = n + 1$. To znamená podle věty 3,8 z [1], že těžnicové nadroviny τ_i nemají společný směr.

Poznámka 2. Lze ukázat, že bod T je těžištěm simplexu s vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Z toho a pomocí vět z [1] by bylo možno odvodit řadu vět analogických známým vlastnostem těžiště trojúhelníka a středů jeho stran. To zde nebudeme provádět. (Srovnej [3], odst. 7).

Věta 3. *Budiž n liché. Středová nadrovina σ normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ obsahuje jeho těžiště T.*

Důkaz plyne ihned z vět 1 a 2 v [2] a z věty 1.

2. Feuerbachova $(n - 1)$-koule, výškové nadroviny a ortocentrum

Definice 2. *Existuje-li $(n - 1)$-koule, která obsahuje všecky body (1,1), nazveme ji Feuerbachovou $(n - 1)$-koulí normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.*

Věta 4. *a) Budiž n sudé. Pak existuje právě jedna Feuerbachova $(n - 1)$-koule normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.*

b) Budiž n liché. Nutná a postačující podmínka, aby existovala Feuerbachova $(n - 1)$-koule normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, je: body (1,1) leží na $(n - 2)$-kouli.

Je-li tato podmínka splněna, existuje jednoparametrický svazek Feuerbachových $(n - 1)$-koulí.

Důkaz plyne snadno z věty 1.

Je-li n liché, předpokládáme v definici 3 a ve větě 5, že body (1,1) normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ leží na $(n - 2)$-kouli.

Definice 3. *Není-li přímka strany a_i normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ tečnou jeho určité Feuerbachovy $(n - 1)$-koule, označíme V_i jejich průsečík různý od bodu S_i. V opačném případě budiž $V_i = S_i$.*

Nadrovinu, která spojuje bod V_i s vrcholovým podprostorem protějším straně a_i, nazveme výškovou nadrovinou normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Každý bod, resp. směr, který je společný všem $n + 1$ výškovým nadrovinám normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, odvozeným od určité Feuerbachovy $(n - 1)$-koule, nazveme jeho ortocentrem V, resp. jeho ortocentrickým směrem v.

Poznámka 3. Pro $n = 2$ jsou ovšem výškové nadroviny výškami trojúhelníka. Později uvidíme, že lze i jinak pro normální mnohoúhelník definovat nadroviny, které pro $n = 2$ dávají opět výšky trojúhelníka.

Věta 5. *Nechť žádný z průsečíků V_i určité Feuerbachovy $(n - 1)$-koule normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ s přímkami jeho stran nesplývá s některým jeho vrcholem. Pak příslušných jeho $n + 1$ výškových nadrovin má společný právě jeden bod V nebo právě jeden směr v.*

Důkaz. Z mocnosti vrcholů A_i k Feuerbachově $(n - 1)$-kouli plyne

$$\overrightarrow{A_{i+1}S_{i+1}} \cdot \overrightarrow{A_{i+1}V_{i+1}} = \overrightarrow{A_{i+1}S_i} \cdot \overrightarrow{A_{i+1}V_i}\,, \quad i = 1, 2, \dots \bmod (n + 1)\,. \qquad (2,1)$$

Znásobíme-li těchto $n + 1$ různých rovnic, dostaneme vzhledem k (1,3) relaci $\prod_{k=1}^{n+1}(V_k; A_k, A_{k+1}) = (-1)^{n+1}$. Z ní podle věty 2,4 z [1] plyne věta 5.

Věta 6. *Budiž n sudé. Zaveďme označení $\Sigma_i = (-1)^{i+1} \sum_{k=i}^{n+i} (-1)^k a_k^2$.*

Je-li $V_i \neq A_{i+1}$, je $k_i = (V_i; A_i, A_{i+1}) = -\dfrac{\Sigma_i}{\Sigma_{i+1}}$.

Důkaz. Můžeme předpokládat takovou orientaci přímek stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, že $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = a_i$. Podle (2,1) je pak $a_{i+1} \cdot \overrightarrow{A_{i+1}V_{i+1}} = -a_i \cdot \overrightarrow{A_{i+1}V_i}$, z čehož plyne

$$a_i \cdot \overrightarrow{A_iV_i} + a_{i+1} \cdot \overrightarrow{A_{i+1}V_{i+1}} = a_i^2\,, \quad i = 1, 2, \dots \bmod (n + 1)\,. \qquad (2,2)$$

Zřejmě

$$\Sigma_i + \Sigma_{i+1} = -2a_i^2\,, \qquad (2,3)$$

takže z (2,2) nalezneme

$$\overrightarrow{A_iV_i} = -\frac{\Sigma_i}{2a_i}\,, \quad k_i = \frac{\overrightarrow{A_iV_i}}{\overrightarrow{A_{i+1}V_i}} = -\frac{\Sigma_i}{\Sigma_{i+1}}\,. \qquad (2,4)$$

Věta 7. *V prostoru o sudé dimensi alespoň 4 existují normální mnohoúhelníky, které mají ortocentrický směr (a tedy nikoliv ortocentrum).*

Důkaz. Při sudém $n \geqq 4$ zvolme

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, \quad a_n = a_{n+1} = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}. \tag{2,5}$$

Každé z těchto $n + 1$ čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ je menší než součet zbývajících a existují tedy normální mnohoúhelníky se stranami danými v (2,5). Při označení z věty 6 je pak $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_n = -1$, $\Sigma_{n+1} = \frac{1}{n}$, a tedy $1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + k_1k_2 \ldots k_n = \Sigma_1 \left(\frac{1}{\Sigma_1} + \frac{1}{\Sigma_2} + \ldots + \frac{1}{\Sigma_{n+1}}\right) = 0$. Tím je podle věty 3,8 z [1] věta dokázána.

Definice 4. *Normální mnohoúhelník, který má všecky strany stejné, nazveme rovnostranným.*

Věta 8. *Budiž n sudé. Těžnicová nadrovina τ_i je výškovou nadrovinou právě jen v případě, kdy*

$$a_{i+2}^2 + a_{i+4}^2 + \ldots + a_{i+n}^2 = a_{i+1}^2 + a_{i+3}^2 + \ldots + a_{i+n-1}^2.$$

Tehdy a jen tehdy, když normální mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ je rovnostranný, splývá jeho ortocentrum s těžištěm.

Důkaz. Výšková nadrovina splývá s těžnicovou nadrovinou τ_i podle věty 6 tehdy a jen tehdy, když $\Sigma_i = \Sigma_{i+1}$. Z toho snadno plyne věta 8.

Věta 9. *Budiž n sudé. Feuerbachova $(n - 1)$-koule rovnostranného normálního mnohoúhelníka se dotýká všech jeho stran v jejich středech.*

Důkaz je zřejmý.

Poznámka 4. Označme k_0 kružnici opsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a k_F Feuerbachovu kružnici tohoto trojúhelníka. Je známo, že vnitřní střed podobnosti kružnic k_0 a k_F je těžiště T trojúhelníka $A_1A_2A_3$ a vnější střed je jeho ortocentrum V. Není-li trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný, jsou body T a V vždy různé; jejich spojnicí je t. zv. Eulerova přímka. Budiž n sudé a $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Označme $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ těžiště mnohoúhelníků

$$A_3A_4 \ldots A_{n+1}, \quad A_4A_5 \ldots A_{n+1}A_1, \quad \ldots, \quad A_2A_3 \ldots A_n$$

normálních v podprostorech dimense $n - 2$. Snadno se zjistí, že body $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ neleží v žádné nadrovině a $(n - 1)$-koule jimi jednoznačně určená a Feuerbachova $(n - 1)$-koule normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ mají za vnitřní střed podobnosti jeho těžiště T; poměr podobnosti je $\frac{2}{1-n}$. Výše uvedená $(n - 1)$-koule jdoucí body $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ je pro $n = 2$ ovšem kružnicí k_0 trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Z věty 7 pak plyne, že vnější střed podobnosti zmíněných dvou $(n - 1)$-koulí nemusí být ortocentrem normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Zůstává otevřena otázka, kdy ortocentrum V normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ je vnějším středem podobnosti těchto dvou $(n - 1)$-koulí.

Poznámka 5. Je-li n liché a body (1,1) normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n+1}$ leží na $(n - 2)$-kouli, závisí podle věty 4b a definice 3 jeho ortocentrum V na jednom parametru. Vyplní tedy křivku, která bude studována později. (Srovnej [3], odst. 6.)

Věta 10. *Budiž n sudé. Nutná a postačující podmínka, aby normální mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ měl ortocentrum ve vrcholu A_i, je:*

$$a_i^2 + a_{i+2}^2 + \dots + a_{n+i}^2 = a_{i+1}^2 + a_{i+3}^2 + \dots + a_{n+i-1}^2 \,. \qquad (2,6)$$

Důkaz. Normální mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ má ortocentrum v bodě A_i tehdy a jen tehdy, když $\overrightarrow{A_iV_i} = 0$, což podle (2,4) vede k rovnici (2,6).

Poznámka 6. Je zřejmé, že maximální počet vrcholů, které mohou být ortocentry, je $\frac{1}{2}n$. Na př. v normálním mnohoúhelníku, pro jehož strany platí $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, ..., $a_{n-3} = a_{n-2}$, $a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 = a_n^2$, jsou jeho ortocentry jeho vrcholy $A_1, A_3, \dots, A_{n-1}$.

Věta 11. *Budiž n liché. Nechť body* (1,1) *normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n+1}$ leží na $(n - 2)$-kouli. Pak každý jeho vrchol je ortocentrum a pro jeho strany platí:*

$$a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{n+1}^2 \,. \qquad (2,7)$$

Naopak, je-li splněna rovnice (2,7), *leží body* (1,1) *na $(n-2)$-kouli.* *)

Důkaz. První tvrzení plyne snadno z $n + 1$ rovnic (2,2) a poznámky 5. Druhé dokážeme takto: Proložme $(n - 1)$-kouli body $S_1, S_2, \dots, S_n$ tak, aby přímku strany a_{n+1} protínala v bodech X, Y různých od A_1 a A_{n+1} a přímku strany a_i $(i = 1,2, \dots, n)$ ještě v bodě V_i. Pak platí první až $(n - 1)$-ní z rovnic (2,2), z nichž plyne

$$a_1 \,.\, \overrightarrow{A_1V_1} - a_n \,.\, \overrightarrow{A_nV_n} = a_1^2 - a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2, \qquad (2,8)$$

a dále platí

$$\overrightarrow{A_1X} \,.\, \overrightarrow{A_1Y} = \tfrac{1}{2}a_1 \,.\, \overrightarrow{A_1V_1} \,,\; \overrightarrow{A_{n+1}X} \,.\, \overrightarrow{A_{n+1}Y} = -\tfrac{1}{2}a_n \,.\, \overrightarrow{A_{n+1}V_n} \,. \qquad (2,9)$$

Z (2,7) — (2,9) plyne, že $\overrightarrow{A_1X}$ a $\overrightarrow{A_1Y}$ jsou kořeny rovnice

$$x^2 + \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_1}{a_{n+1}} \,.\, \overrightarrow{A_1V_1}\right) x + \frac{a_1}{2} \,.\, \overrightarrow{A_1V_1} = 0 \,.$$

Avšak jedním jejím kořenem je $-\frac{1}{2}a_{n+1}$. Tím je vše dokázáno.

*) Srovnej [3], odst. 1. Na správnost tohoto obráceného tvrzení upozornil autora M. Fiedler.

LITERATURA

[1] *Z. Nádeník:* Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary. Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 1 — 25 .

[2] *Z. Nádeník:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka. Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 287 — 291 .

[3] *Z. Nádeník:* O některých otázkách v geometrii n-rozměrného eukleidovského prostoru. (Rozmnožený rukopis.)

Резюме

ОБ ОРТОЦЕНТРЕ НОРМАЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.
(Поступило в редакцию 23/V 1955 г.)

Пусть $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ — нормальный многоугольник, S_i ($i = 1, 2, \dots, \dots, n + 1$) — середина его стороны a_i и τ_i — вершинная гиперплоскость, которая проходит через точку S_i и через вершинное подпространство, противоположное стороне a_i. (Терминологию и символику смотри русское резюме к работе автора ,,Распространение теорем Менелая и Чевы на n-размерные фигуры'', Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956)).

Гиперплоскости τ_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), *аналогичные медианам треугольника, имеют всегда общую точку, аналогичную центру тяжести треугольника. Если* n — *нечётное число, и только в таком случае, точки* $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ *лежат в гиперплоскости, которая проходит через совместную точку гиперплоскостей* τ_i.

Если существует гиперсфера, которая содержит все точки (1) (если n — чётное, то это имеет место всегда), мы назовём её гиперсферой Фейербаха нормального многоугольника $A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Если эта гиперсфера имеет с прямой стороны a_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) ещё совместную точку, несовпадающую с точкой S_i, обозначим эту точку через V_i; в противном случае положим $V_i = S_i$. Вершинную гиперплоскость, которая из вершинного подпространства, противоположного стороне a_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), проектирует точку V_i, обозначим через ν_i. Она является аналогом высоты треугольника.

Пусть существует гиперсфера Фейербаха нормального многоугольника $A_1A_2 \dots A_{n+1}$; $n + 1$ *вершинных гиперплоскостей* ν_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) *имеют в точности одну общую точку* (*аналоги ортоцентра треугольника*) *или же в точности одно общее направление* (не оба случая одновременно).

Résumé

SUR LE POINT QUI FORME UNE ANALOGIE DU POINT DE CONCOURS DES HAUTEURS D'UN TRIANGLE POUR UN POLYGONE NORMAL

ZBYNĚK NÁDENÍK, Prague.

(Reçu le 23 mai 1955.)

Soit $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ un polygone normal, S_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ le milieu de son côté a_i et τ_i l'hyperplan de sommets, qui passe par le point S_i et par le sous-espace de sommets opposé au côté a_i. (En ce qui concerne la terminologie et la symbolique voir le résumé français du travail de l'auteur „L'élargissement du théorème de Ménélaüs et de Céva sur les figures n-dimensionnelles", Časopis pro pěstování matematiky, 81 (1956).)

Les hyperplans τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ (analogiques aux médianes d'un triangle) *ont toujours un point commun* (analogue au centre de gravité d'un triangle). *Si n est un nombre impair et seulement en ce cas-là, les points*

$$S_1, S_2, \ldots, S_{n+1} \tag{1}$$

sont dans un hyperplan qui passe par le point de concours des hyperplans τ_i.

S'il existe une hypersphère qui contient tous les points (1) (si n est un nombre pair, cela a lieu toujours), nous l'appellons l'hypersphère de Feuerbach du polygone normal $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Si cette hypersphère a encore avec la droite du côté a_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ un point commun, qui est différent du point S_i, nous le désignons par V_i; dans le cas opposé soit $V_i = S_i$. Nous désignons encore par ν_i l'hyperplan déterminé par le point V_i et par le sous-espace de sommets opposé au côté a_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Il est une analogie d'une hauteur d'un triangle.

Supposons, qu'il existe une hypersphère de Feuerbach du polygone normal $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. *Les hyperplans* ν_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ *ont toujours un point commun (l'analogie du point de concours des hauteurs d'un triangle) ou une direction commune.*

Puis on démontre aussi les analogies du théorème de Pythagore.